4.10 – EXERCÍCIOS – pg. 132

Nos exercícios 1 a 5 calcular as derivadas laterais nos pontos onde a função não é derivável. Esboçar o gráfico.

1. $f(x) = 2|x-3|$.

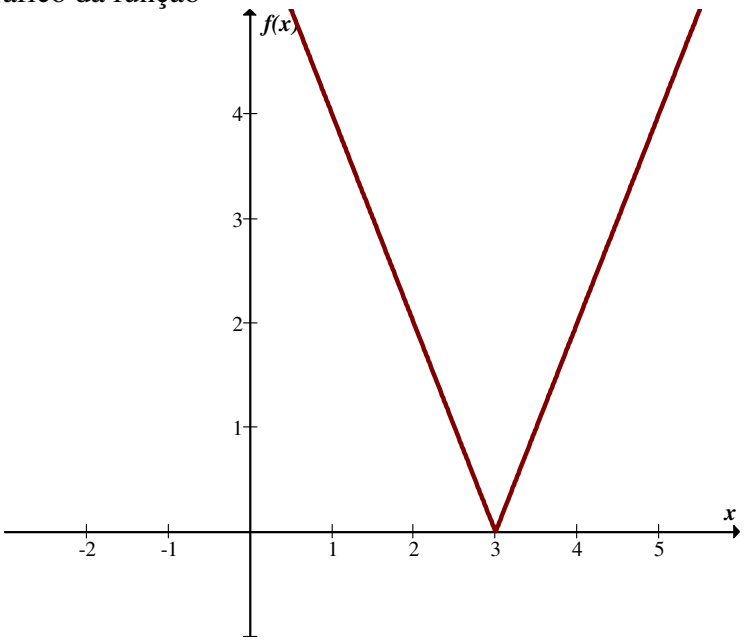
Temos:

$$\begin{cases} 2x-6, & x \geq 3 \\ -2x+6, & x < 3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2(3+\Delta x) - 6 - 2.3 + 6}{\Delta x} = 2$$

$$f'(3^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-2(3+\Delta x) - 6 + 2.3 - 6}{\Delta x} = -2.$$

Segue o gráfico da função

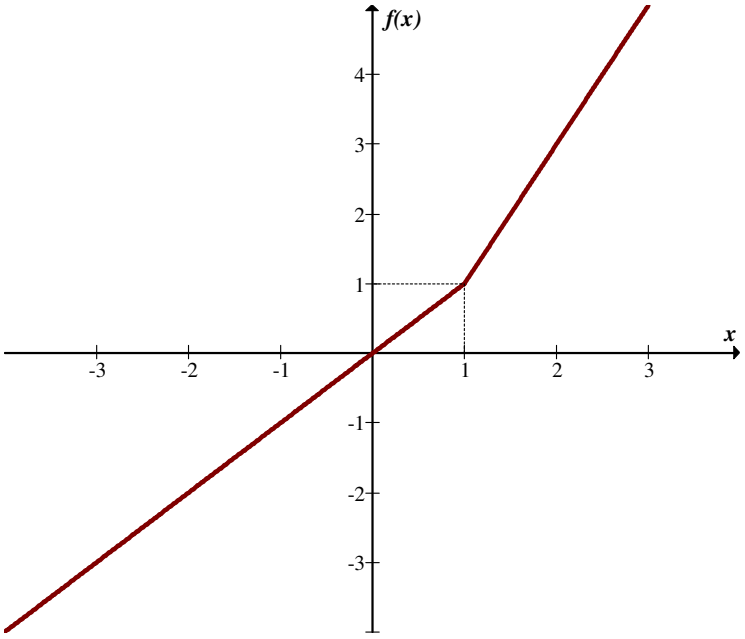


2. $f(x) = \begin{cases} x & , \quad se\ x < 1 \\ 2x-1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$.

$$f'(1^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2(1+\Delta x) - 1 - 2.1 + 1}{\Delta x} = 2.$$

$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1+\Delta x) - 1}{\Delta x} = 1.$$

Segue o gráfico da função



3. $f(x) = |2x+4|+3.$

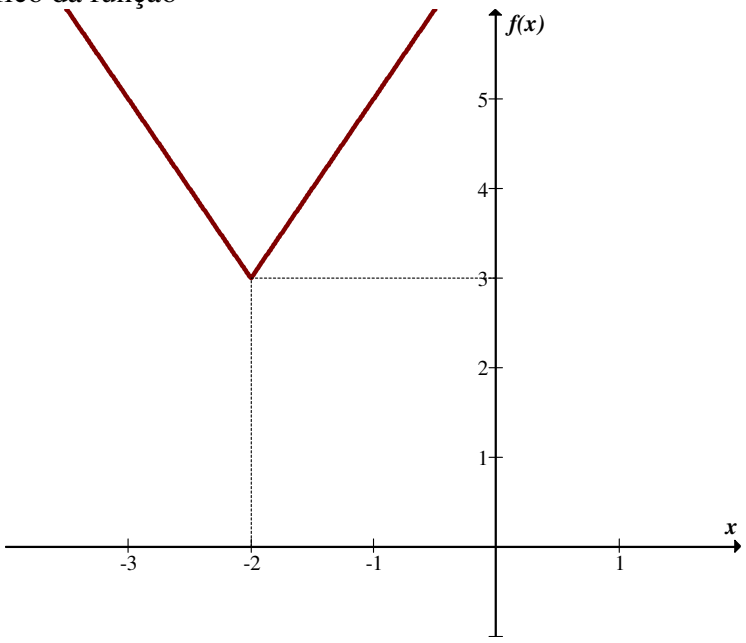
Temos a função reescrita:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4+3 = 2x+7 & se \quad x \geq -2 \\ -2x-4+3 = -2x-1 & se \quad x < -2 \end{cases}$$

$$f'(-2^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{2(-2+\Delta x)+7-2.(-2)-7}{\Delta x} = 2.$$

$$f'(-2^{-}) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{-2(-2+\Delta x)-1+2.(-2)+1}{\Delta x} = -2.$$

Segue o gráfico da função



4. $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|>1\\ 0 \quad\ , & |x|\le 1\end{cases}.$

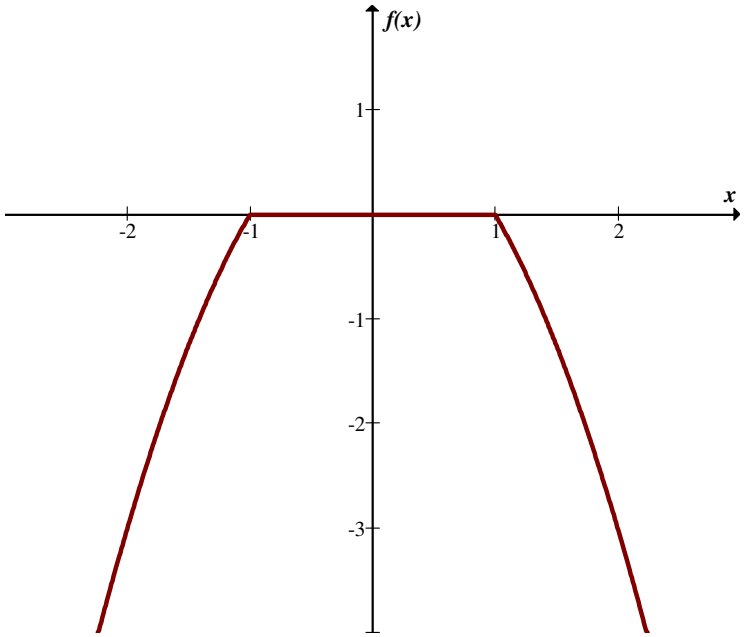
$$f'(-1^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

$$f'(-1^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-1-(-1+\Delta x)^2-1+(-1)^2}{\Delta x}=2.$$

$$f'(1^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left(1-(1+\Delta x)^2\right)-1+1^2}{\Delta x}=-2.$$

$$f'(1^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

Segue o gráfico da função



5. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & x<-2\\ -2 \quad\ \ & |x|\le 2.\\ 2x-6, & x>2\end{cases}$

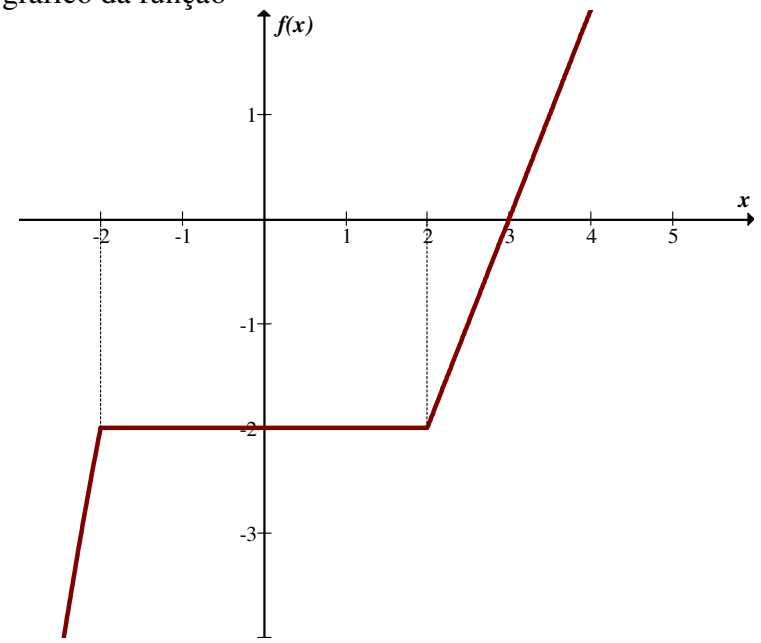
$$f'(-2^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-2+2}{\Delta x}=0.$$

$$f'(-2^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2-(-2+\Delta x)^2-2+(-2)^2}{\Delta x}=4$$

$$f'(2^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2(2+\Delta x)^2-6-2x+6}{\Delta x}=2$$

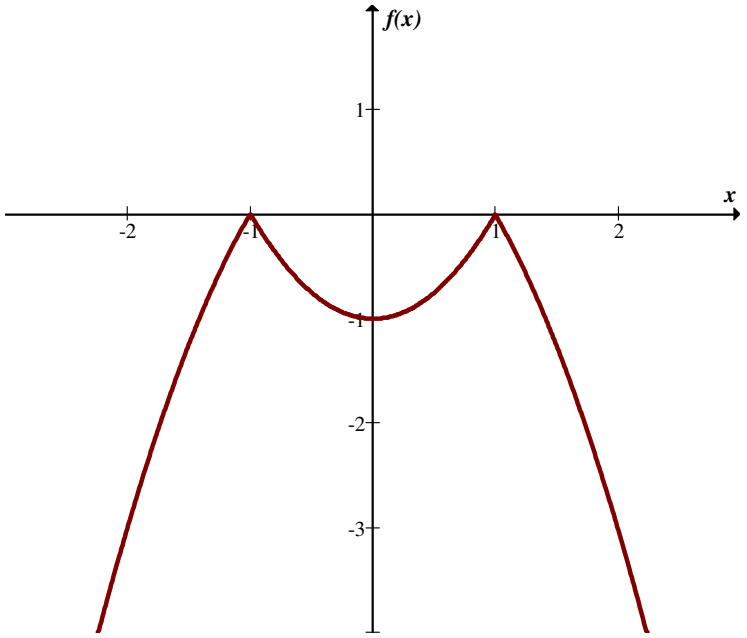
$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2-2}{\Delta x} = 0.$$

Segue o gráfico da função



6. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \quad |x| \leq 1 \\ 1 - x^2, & se \quad |x| > 1 \end{cases}$.

a) Esboçar o gráfico de f .



b) Verificar se f é contínua nos pontos -1 e 1.

Temos,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1-x^2) = 0 = f(1)$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2-1) = 0 = f(1)$$

Logo, *f* é contínua em *x=1*. Analogamente, *f* é contínua em *x=-1*.

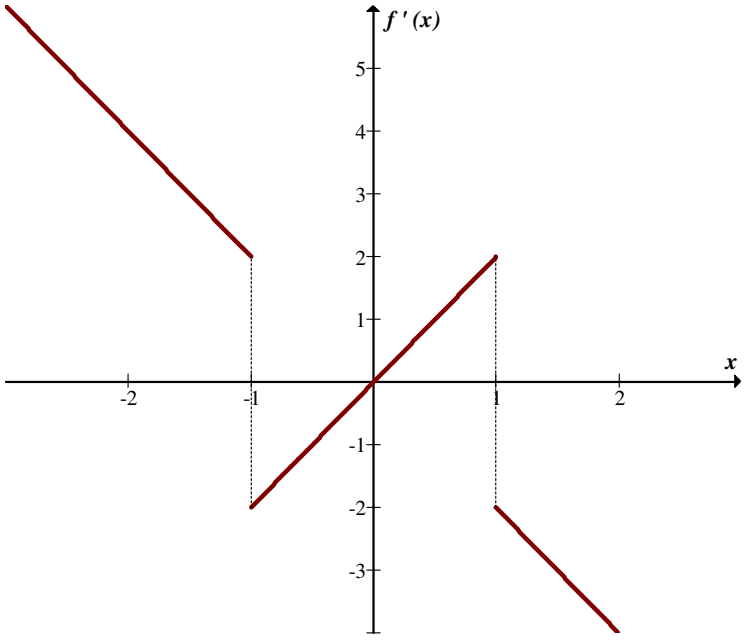
c) Calcular $f'(-1^-)$, $f'(1^+)$, $f'(1^-)$ *e* $f'(1^+)$.

$$f'(-1^+) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(-1+\Delta x)^2 - 1 - (-1)^2 + 1}{\Delta x} = -2.$$
$$f'\left((-1)^-\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1-(-1+\Delta x)^2 - 1 + (-1)^2}{\Delta x} = 2.$$
$$f'(1^+) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(1-(1+\Delta x)^2\right) - 1 + 1^2}{\Delta x} = -2.$$
$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1 - 1^2 + 1}{\Delta x} = 2.$$

d) Calcular $f'(x)$, obter o seu domínio e esboçar o gráfico.

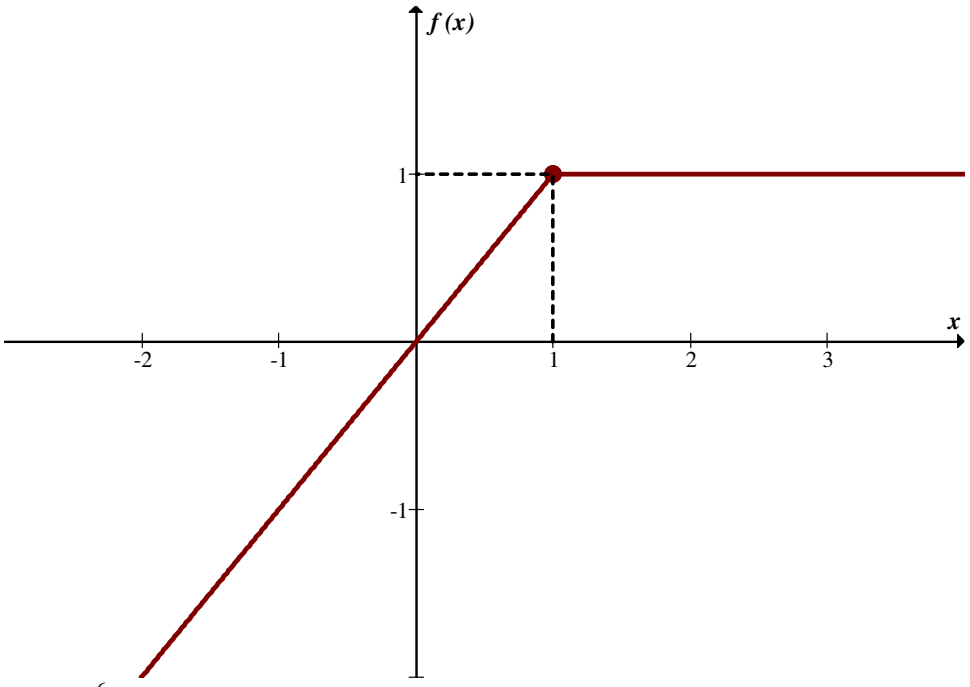
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & se \quad |x|<1. \\ -2x & se \quad |x|>1. \end{cases} \qquad D = R - \{-1,1\}$$

Segue o gráfico:



7. Encontrar as derivadas laterais, das seguintes funções, nos pontos indicados. Encontrar os intervalos onde $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.

(a)



Temos $f(x)=\begin{cases} x, x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$

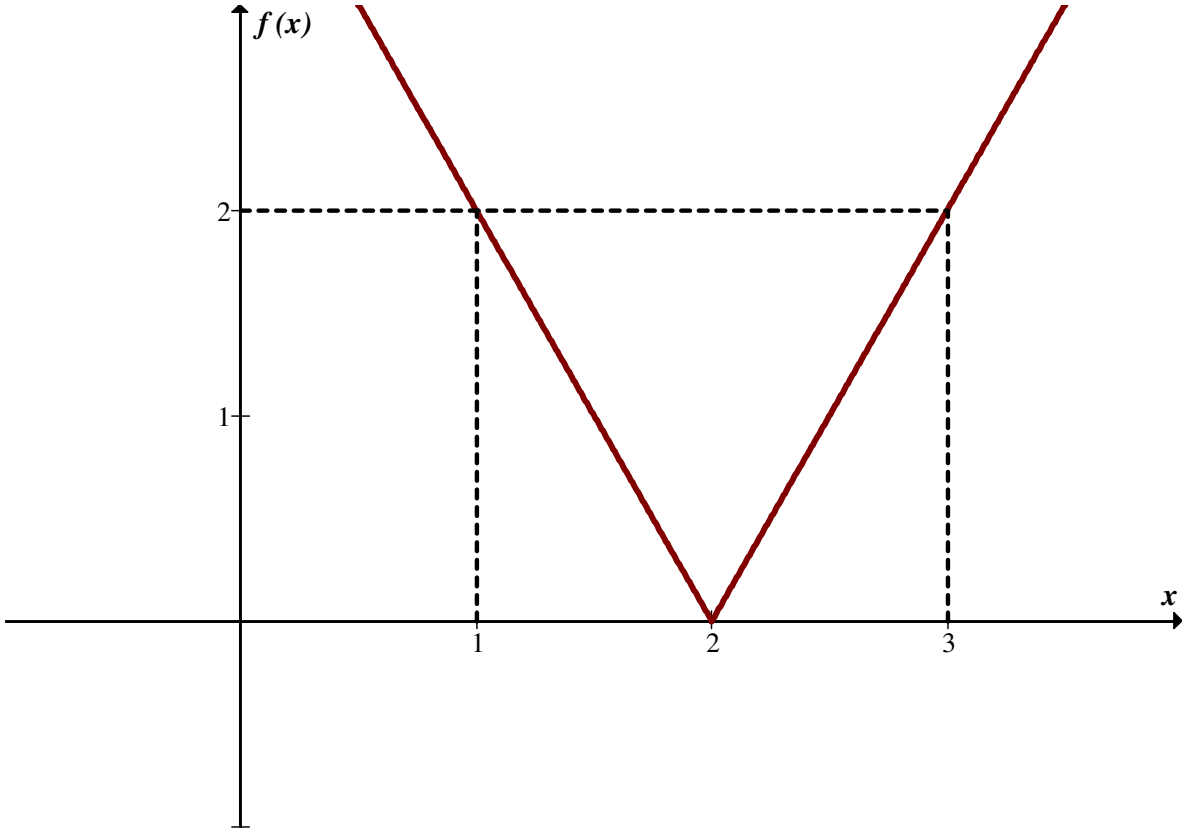
$$f'(1^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1-1}{\Delta x} = 0$$

$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1+\Delta x-1}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

Portanto $f'(x)$ *é* >0 *em* $(-\infty,1)$

(b)



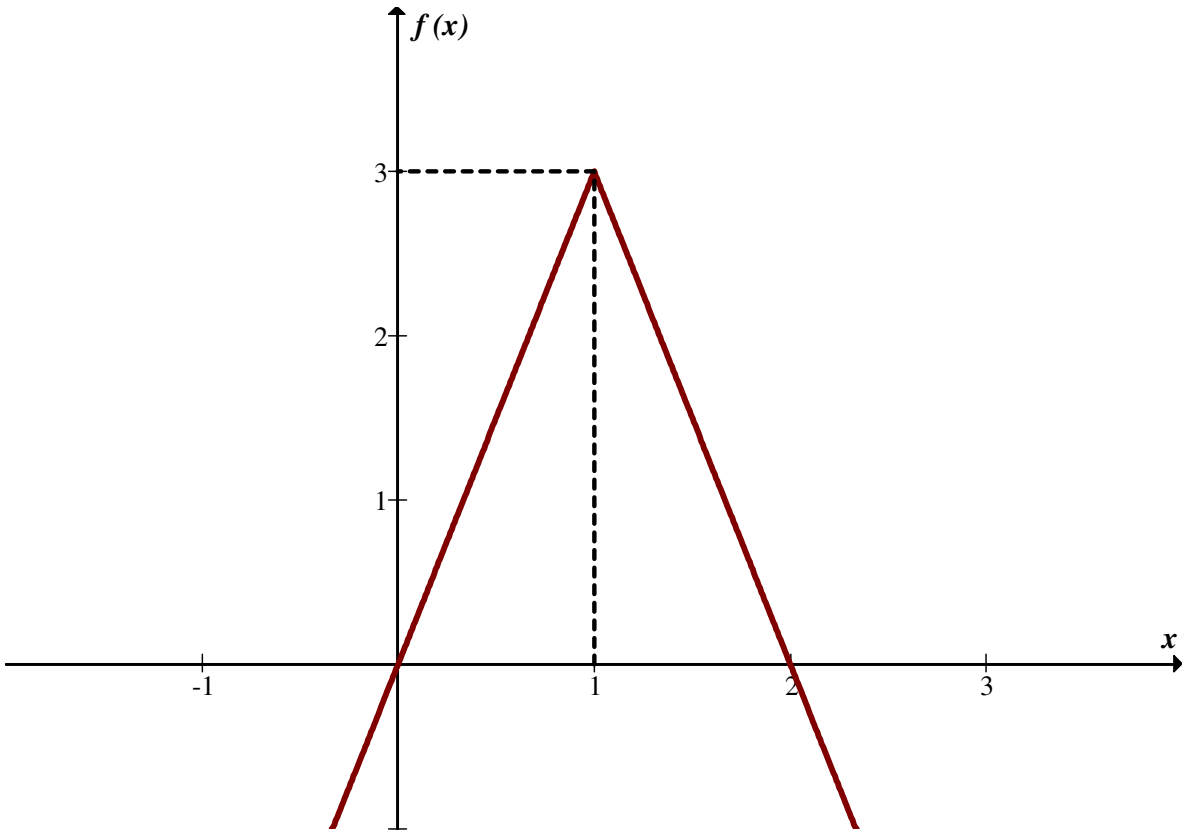
Temos $f(x)=\begin{cases} 2x-4, x\geq 2 \\ -2x+4, x\leq 2 \end{cases}$

$$f'(2^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2(2+\Delta x)-4-2.2+4}{\Delta x}=2$$

$$f'(2^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-2(2+\Delta x)+4+2.2-4}{\Delta x}=-2$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2, \quad se \quad x>2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0, \text{em } (2,\infty) \\ -2, \quad se \quad x<2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)<0, \text{em } (-\infty,2) \end{cases}$$

(c)



Temos $f(x)=\begin{cases}-3x+6, x\geq 1\\ 3x, x\leq 1\end{cases}$

$$f'(1^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-3(1+\Delta x)+6+3.1-6}{\Delta x}=-3$$

$$f'(1^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{3(1+\Delta x)-3.1}{\Delta x}=3$$

$$f'(x)=\begin{cases}3, & se \quad x<1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0, \text{em } (-\infty,1)\\ -3, & se \quad x>1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)<0, \text{em } (1,\infty)\end{cases}$$

6.11 – EXERCÍCIOS – pg. 269

1. Calculando as integrais $I_1 = \int_1^2 x^2 dx$, $I_2 = \int_1^2 x\,dx$ e $I_3 = \int_1^2 dx$, obtemos:

$I_2 = \frac{7}{3}$, $I_2 = \frac{3}{2}$ e $I_2 = 1$. Usando estes resultados encontre o valor de:

a) $\int_1^2 (6x-1)dx = 6\int_1^2 x\,dx - \int_1^2 dx$

$= 6.\frac{3}{2} - 1 = 8$

b) $\int_1^2 [2x(x+1)]dx = \int_1^2 (2x^2 + 2x)dx = 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\Big]_1^2$

$= 2.\frac{7}{3} + 2.\frac{3}{2} = \frac{14}{3} + 3 = \frac{14+9}{3} = \frac{23}{3}$

c) $\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx$

$= \frac{7}{3} - 3.\frac{3}{2} + 2.1$

$= \frac{7}{3} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{14 - 27 + 12}{6} = \frac{-1}{6}$

d) $\int_1^2 (3x+2)^2\,dx = \int_1^2 (9x^2 + 12x + 4)\,dx$

$= 9\,.\,\frac{7}{3} + 12.\frac{3}{2} + 4.1$

$= 21 + 18 + 4 = 43$

2. Sem calcular a integral, verifique as seguintes desigualdades:

a) $\int_1^3 (3x^2 + 4)\,dx \geq \int_1^3 (2x^2 + 5)\,dx$

$3x^2 + 4 \geq 2x^2 + 5$

$3x^2 + 4 - 2x^2 - 5 \geq 0$

$x^2 - 1 \geq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Portanto vale para $x \in [1,3]$.

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} \leq \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) dx$

$$\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{x}{4} \leq -\frac{1}{2}$$
$$\frac{4+x^2}{4x} \leq -\frac{1}{2}$$
$$\frac{4+x^2}{4x} - \frac{1}{2} \leq 0$$
$$\frac{4+x^2+2x}{4x} \leq 0$$

1º Caso: $4x < 0$ e $x^2 + 2x + 4 \geq 0$

$x < 0$ e $(x+2)^2 \geq 0$

Portanto vale a desigualdade em $[-2,-1]$.

c) $\int_0^{\pi} sen\, x\, dx \geq 0$

$sen\, x \geq 0$ para $x \in [0, \pi]$

d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos x\, dx \geq 0$

Temos $\cos x \leq 0$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Portanto, $-\cos x \geq 0$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Se $\int_0^1 \sqrt[5]{x^2}\, dx = \frac{5}{7}$, calcular $\int_1^0 \sqrt[5]{t^2}\, dt$

$$\int_1^0 \sqrt[5]{t^2}\, dt = -\int_0^1 \sqrt[5]{t^2}\, dt = -\int_0^1 \sqrt[5]{x^2}\, dx = \frac{-5}{7}.$$

4. Se $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2 t\ dt = \frac{9\pi}{4}$, calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2\theta\ d\theta$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2\theta\ d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = -\frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2 t\ dt = -\frac{1}{9}\frac{9\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

5. Verificar se o resultado dos seguimentos integrais é positivo, negativo ou zero, sem calculá-las.

a) $\int_0^{20} \frac{dx}{x+2}$

$f(x) = \frac{1}{x+2}$

$\frac{1}{x+2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x+2>0 \quad \Rightarrow \quad x>-2$

Resultado positivo, porque $f(x) = \frac{1}{x+2} > 0$ para $x \in [0,20]$.

b) $\int_0^{2\pi} sen\,t\ dt$

É nulo pois $\int_0^{2\pi} sen\,t\ dt = \int_0^{\pi} sen\,t\ dt + \int_{\pi}^{2\pi} sen\,t\ dt$ e

$$\int_0^{\pi} sen\,t\ dt = -\int_{\pi}^{2\pi} sen\,t\ dt$$

c) $\int_2^3 (2x+1)\,dx$

$f(x) = 2x+1$

$2x+1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \geq -1$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

É positivo, pois $f(x) = 2x+1$ é positivo para $x \in [2,3]$.

d) $\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\,dx$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$(x-3)(x+1) > 0$$

$$\therefore \quad f(x) < 0 \text{ para } x \in (-1,3)$$

Resultado negativo.

6. Determinar as seguintes derivadas.

a) $\dfrac{d}{dx}\int_2^x \sqrt{t+4}\, dt$

Vemos que $\displaystyle\int_2^x \sqrt{t+4}\, dt = \frac{(t+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_2^x$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+4)^{\frac{3}{2}} - (2+4)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+4)^{\frac{3}{2}} - (6)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}\left((x+4)^{\frac{3}{2}} - (6)^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+4}$$

Observamos que o resultado obtido é garantido diretamente pela proposição 6.10.1.

b) $\dfrac{d}{dy}\int_3^y \dfrac{2x}{x^2+9}\, dx$

Pela proposição 6.10.1, temos que: $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_3^y \frac{2x}{x^2+9}\, dx = \frac{2y}{y^2+9}$

c) $\dfrac{d}{d\theta}\displaystyle\int_{-1}^{\theta} t\, sen\, t\, dt$

Pela proposição 6.10.1, temos que:

$$\frac{d}{d\theta}\int_{-1}^{\theta} t\, sen\, t\, dt = \theta\, sen\theta.$$

7. Em cada um dos itens a seguir, calcular a integral da função no intervalo dado e esboçar o gráfico da função.

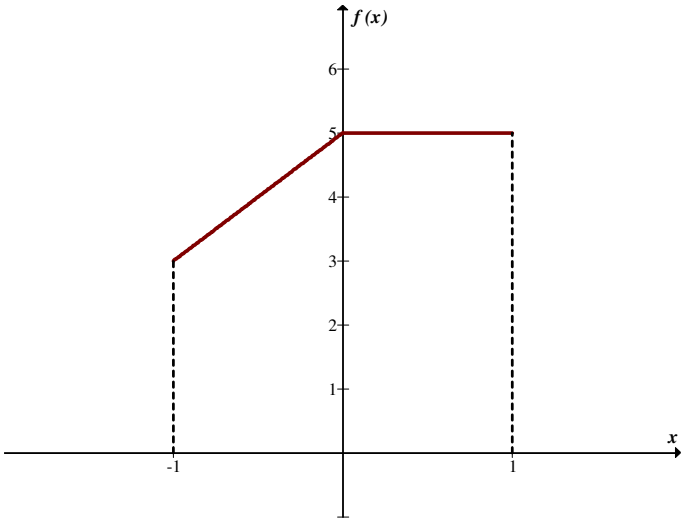
a) $f(x)=\begin{cases}2x+5, & -1\le x<0\\ 5, & 0\le x\le 1\end{cases}$ em $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(2x+5)\,dx+\int_{0}^{1}5\,dx$$

$$=2\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0}+5x\Big]_{-1}^{0}+5x\Big]_{0}^{1}$$

$$=-1+5+5=9$$



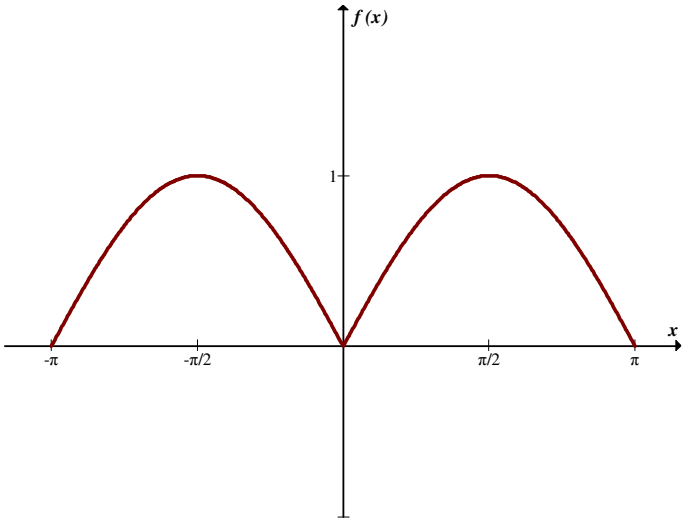
b) $f(x)=|\,sen\,x\,|$; em $[-\pi,\pi]$

$$f(x)=\begin{cases}sen\,x, & 0\le x\le\pi\\ -sen\,x, & -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\,sen\,x\,|\,dx=\int_{-\pi}^{0}-sen\,x\,dx+\int_{0}^{\pi}sen\,x\,dx$$

$$=\cos x\Big]_{-\pi}^{0}-\cos x\Big]_{0}^{\pi}$$

$$=1+1+1+1=4$$

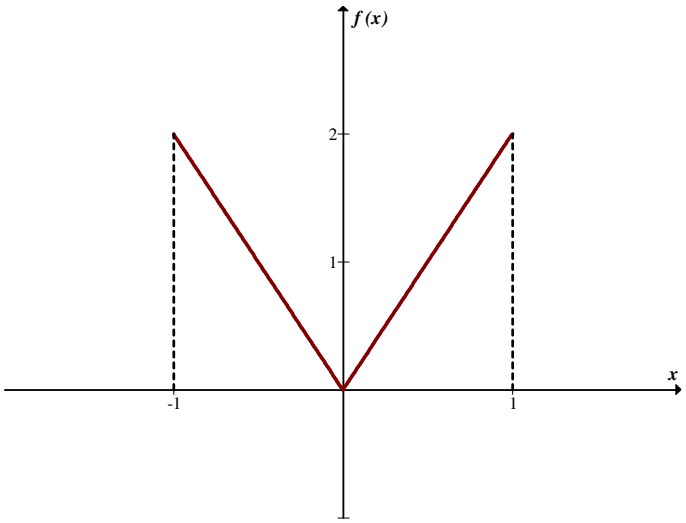


c) $f(x) = 2\,|\,x\,|$; em $[-1,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} 2|\,x\,|\,dx = \int_{-1}^{0} -2x\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx$$

$$= -2\,\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} + 2\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{1} = +1+1 = 2$$



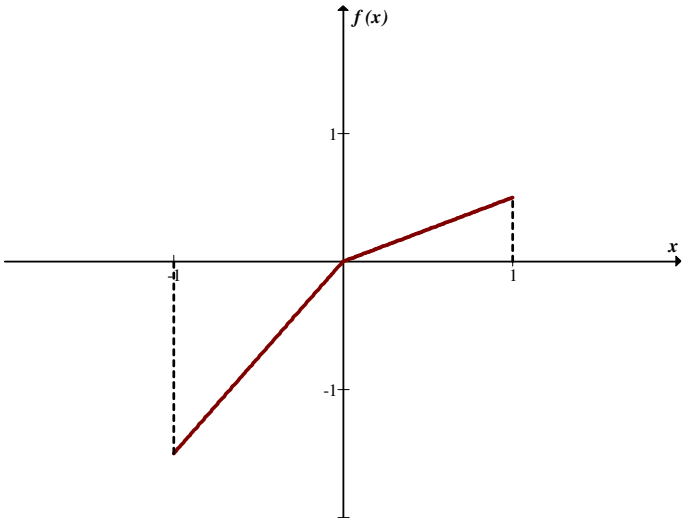
d) $f(x) = x - \dfrac{|x|}{2}$; em $[-1,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}x & se \quad x \geq 0 \\ x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2}x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x - \frac{|x|}{2}\right)dx = \int_{-1}^{0}\frac{3}{2}x\,dx + \int_{0}^{1}\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{1}$$

$$= \frac{-3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$$



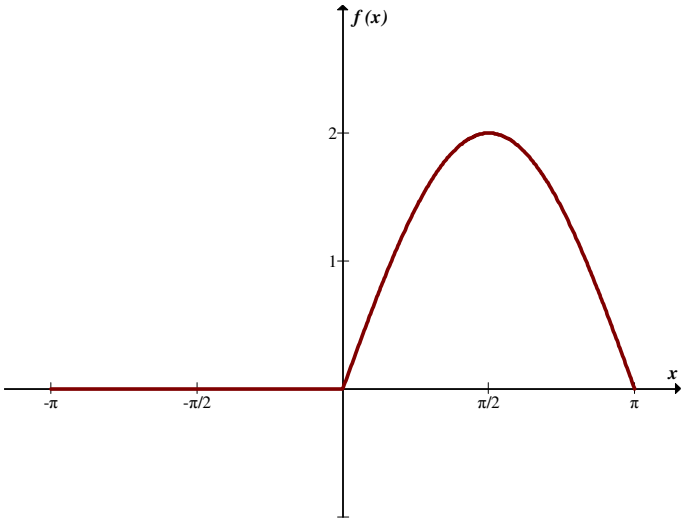
e) $f(x) = sen\,x + |sen\,x|$ em $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2\,sen\,x, & se \quad sen\,x > 0 \\ 0 \quad , & se \quad sen\,x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(sen\,x + |sen\,x|)\,dx = \int_{-\pi}^{0}0\,dx + \int_{0}^{\pi}2\,sen\,x\,dx$$

$$= 0 + 2\left[-\cos x\right]_{0}^{\pi}$$

$$= 2\,(+1+1) = 4$$



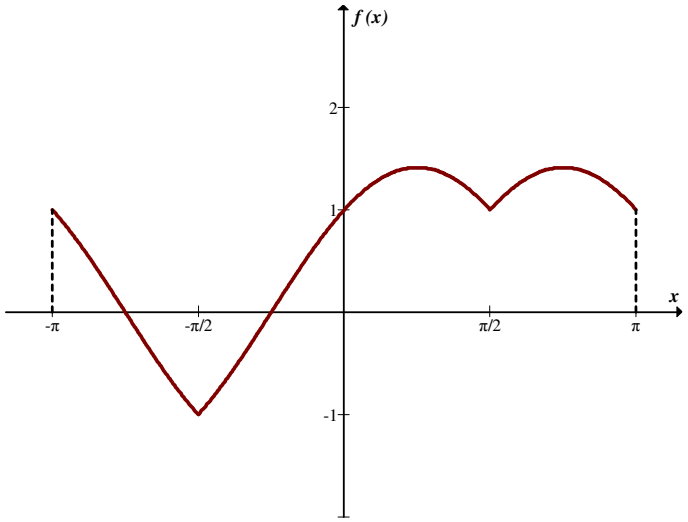
f) $f(x) = sen\ x + |\cos x|$ em $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x + \cos x, & se \quad \cos x \geq 0 \\ sen\ x - \cos x, & se \quad \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} (sen\ x - \cos\ x)\,dx + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\ x + \cos\ x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (sen\ x - \cos\ x)\,dx$$

$$[-\cos x - sen\ x]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} + [-\cos x + sen\ x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [-\cos x - sen\ x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$



8. Mostrar que:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} sen\,2x \,.\, \cos\,5x dx = 0$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[sen\, 7x + sen\, (-3)x \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} sen\, 7x\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} - sen\, 3x\, dx$$

$$= \frac{-1}{2} . \frac{1}{7} \cos\, 7x \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} . \frac{1}{3} \cos\, 3x \Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{14} \left(-1 + 1 \right) + \frac{1}{6} \left(-1 + 1 \right) = 0$$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \,.\, \cos\, 3x\, dx = 0$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[\cos 5x + \cos\, x \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{5} sen\, 5x \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} sen\, x \Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} sen 5x \,.\, sen\, 2x\, dx = 0$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[\cos 3x - \cos\, 7x \right] dx$$

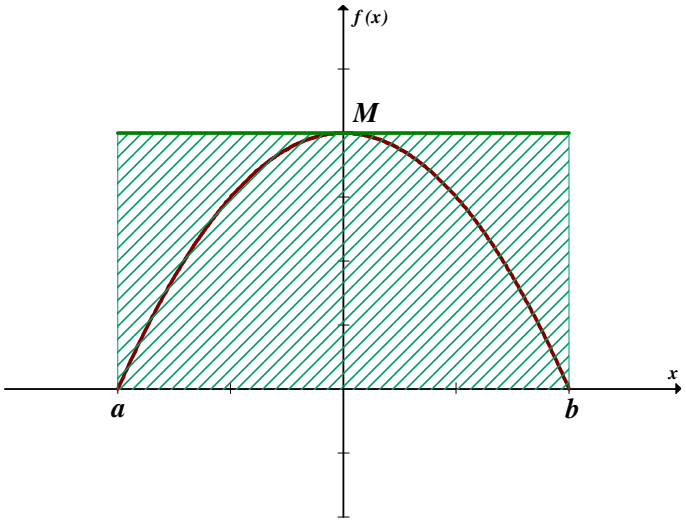
$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x\, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 7x\, dx$$

$$= 0 - 0 = 0$$

9. Se $f(x)$ é contínua e $f(x) \leq M$ para todo x em $[a,b]$, provar que $\int_a^b f(x)\, dx \leq M\ (b-a)$. Ilustrar graficamente, supondo $f(x) \geq 0$.

Como $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e $f(x) \leq M$ para todo x em $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx = Mx \Big]_a^b = M\ (b-a)\,.$$



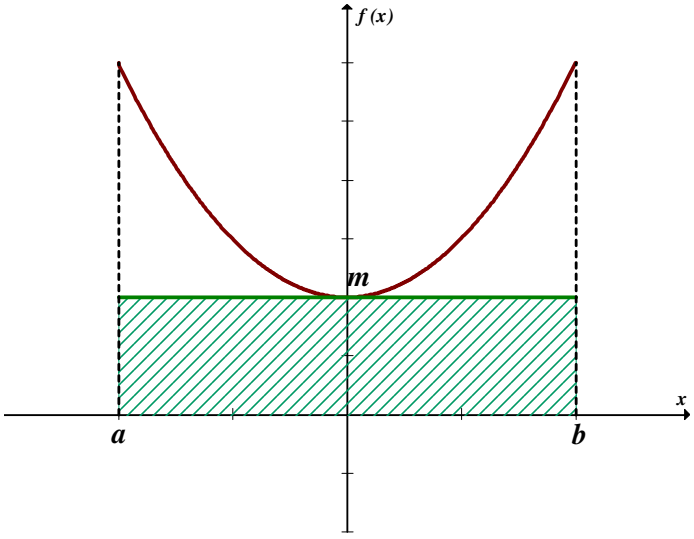
Observamos que na figura utilizamos o valor máximo absoluto da função no intervalo $[a,b]$ como M.

10. Se $f(x)$ é contínua e $m \le f(x)$ para todo x em $[a,b]$, provar que $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx$. Ilustrar graficamente, supondo $m > 0$.

Como f é contínua em $[a,b]$ e $f(x) \ge m \quad \forall x \in [a,b]$, temos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a)$$

ou $\int_a^b f(x)\,dx \ge m(b-a)$.



Observamos que na figura utilizamos o valor mínimo absoluto da função no intervalo $[a,b]$ como m.

11. Aplicar os resultados dos exercícios 9 e 10 para encontrar o menor e o maior valor possível das integrais dadas a seguir:

Neste exercício tomamos M e m, respectivamente, como o valor máximo e o valor mínimo absolutos da função no intervalo de integração.

a) $\int_3^4 5x\,dx$

Temos que $\begin{matrix} M = 20 \\ m = 15 \end{matrix}$

Portanto,

$$15\,(4-3) \le \int_3^4 5x\,dx \le 20\,(4-3)$$

$$15 \le \int_3^4 5x\,dx \le 20$$

b) $\int_{-2}^4 2x^2\,dx$

$f(x) = 2x^2$

$m = f(0) = 0$

$M = f(4) = 32$

$$0.(4+2) \le \int_{-2}^4 2x^2 dx \le 32\,(4+2)$$

$$0 \le \int_{-2}^4 2x^2 dx \le 192$$

c) $\int_1^4 |x-1|\,dx$

$f(x) = |x-1|$

$m = f(1) = 0$

$M = f(4) = 3$

$$0.(4-1) \le \int_1^4 |x-1|\,dx \le 3\,(4-1)$$

$$0 \le \int_1^4 |x-1|\,dx \le 9$$

d) $\int_{-1}^4 \left(x^4 - 8x^2 + 16\right) dx$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

$$f(-1) = 1 + 8 + 19 = 9$$
$$m = f(2) = 16 - 32 + 16 = 0$$
$$M = f(4) = 256 - 128 + 16 = 144$$

$$0.(4+1) \le \int_{-1}^{4} \left(x^4 - 8x^2 + 16\right) dx \le 144(4+1)$$

$$0 \le \int_{-1}^{4} \left(x^4 - 8x^2 + 16\right) dx \le 720$$

Nos exercícios 12 a 34 calcule as integrais.

12. $\int_{-1}^{2} x\left(1 + x^3\right) dx$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x + x^4\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}\Big]_{-1}^{2} = 2 + \frac{32}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{81}{10}$$

13. $\int_{-3}^{0} \left(x^2 - 4x + 7\right) dx$

$$= \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 7x\Big]_{-3}^{0} = -\left(\frac{-27}{3} - 2.9 - 21\right)$$

$$= 48$$

14. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^6}$

$$= \frac{x^{-5}}{-5}\Big]_{1}^{2} = \frac{-1}{5}\left(\frac{1}{32} - 1\right)$$

$$= \frac{31}{160}$$

15. $\int_{4}^{9} 2t\sqrt{t}\ dt$

$$= \int_4^9 2\, t^{\frac{3}{2}}\, dt = 2\, \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Bigg]_4^9$$

$$= 2 \,.\, \frac{2}{5} \left(243 - 32\right)$$

$$= \frac{4}{5} \,.\, 211 = \frac{844}{5}$$

16. $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$

$$= \frac{1}{3} \frac{\left(3y+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Bigg]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \left[2 - 1\right] = \frac{2}{3}$$

17. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} sen\, x \cos x\, dx$

$$\frac{sen^2 x}{2} \Bigg]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

18. $\int_{-1}^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+9}}$

$$\frac{1}{3} \frac{\left(x^3+9\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Bigg]_{-1}^1$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sqrt{10} - \sqrt{8}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\sqrt{5} - 2\right)$$

19. $\int_0^{2\pi} |\ sen \quad x\ |\, dx$

$$= \int_0^{\pi} sen\, x\, dx + \int_0^{2\pi} -sen\, x\, dx$$

$$= -\cos x\Big]_0^{\pi} + \cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$= 1+1+1+1 = 4$$

20. $\int_{-2}^{5} |\, 2t-4\,|\, dt$

$$= \int_{-2}^{2} (-2t+4)\, dt + \int_{2}^{5} (2t-4)\, dt$$

$$= \left(-2\,\frac{t^2}{2} + 4t\right)\Big]_{-2}^{2} + \left(2\,\frac{t^2}{2} - 4t\right)\Big]_{2}^{5}$$

$$= -4+8+4+8+25-20-4+8$$

$$= 25$$

21. $\int_0^4 |\, x^2 - 3x + 2\,|\, dx$

$$= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, dx + \int_1^2 -(x^2 - 3x + 2)\, dx + \int_2^4 (x^2 - 3x + 2)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\Big]_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big]_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big]_2^4$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + \frac{12}{2} - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} + 8 - \frac{8}{3} + \frac{12}{2} - 4$$

$$= \frac{17}{3}$$

22. $\int_0^4 \frac{4}{\sqrt{x^2+9}}.$

$$= \int_0^4 \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{9} + \frac{9}{9}\right).9}}$$

$$= \int_0^4 \frac{4\,dx}{3\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}} = 3\,\frac{4}{3}\ln\left|\frac{x}{3} + \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\right|\Bigg]_0^4$$

$$= 4\ln\left|\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16+9}{9}}\right|$$

$$= 4\ln\left|\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right| = 4\ln 3$$

23. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{v^2\,dv}{\left(v^3 - 2\right)^2}$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\left(v^3 - 2\right)^{-1}}{-1}\Bigg]_{-2}^{0} = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{2}{15}$$

24. $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_1^5$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,(27-1) = \frac{1}{3}.26 = \frac{26}{3}$$

25. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3}$

$$u = \sqrt{x} + 1$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\,\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^{-2}}{-2}\Bigg]_1^4$$

$$= -\left(3^{-2} - 2^{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$$

26. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$

$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$

$dv = \sqrt{1+x}\,dx \quad \rightarrow \quad v = \int (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$= \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(x \,.\, \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx \right)\Bigg]_0^3$$

$$= \left(\frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} \right)\Bigg]_0^3$$

$$= \frac{2.3}{3}.8 - \frac{2}{3}\,.\,\frac{2}{5}(32-1)$$

$$= \frac{116}{15}$$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,sen\,2x\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+sen\,x)^5}\,dx$

$u = 1 + sen\,x$

$du = \cos x\,dx$

$$= \frac{(1+sen\,x)^{-4}}{-4}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\left(1+sen\frac{\pi}{2}\right)^{-4} - (1)^{-4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} - 1\right)$$

$$= \frac{15}{64}$$

29. $\int_0^4 (2x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg]_0^4 = 3 - 1 = 2$$

30. $\int_0^2 \sqrt{2x}\left(\sqrt{x} + \sqrt{5}\right)dx$

$$= \int_0^2 \left(\sqrt{2x^2} + \sqrt{10x}\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(\sqrt{2}x + \sqrt{10}x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{x^2}{2} + \sqrt{10}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(4) + \sqrt{10}\,\frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

31. $\int_1^2 \frac{5x^3+7x^2-5x+2}{x^2}dx$

$=\int_1^2\left(5x+7-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=5\frac{x^2}{2}+7x-5\ln|x|+2\frac{x^{-1}}{-1}\Big]_1^2$

$=5.2+7.2-5\ln 2-1-\frac{5}{2}-7+5\ln 1+2$

$=\frac{31}{2}-5\ln 2$

32. $\int_1^2 x\ln x\,dx$

$u=\ln x \quad\rightarrow\quad du=\frac{dx}{x}$

$dv=x\,dx \quad\rightarrow\quad v=\frac{x^2}{2}$

$=\left(\ln x\,\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x}\right)\Big]_1^2$

$=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\right)\Big]_1^2$

$=\frac{1}{2}(4\ln 2)-\frac{1}{4}(4-1)$

$=2\ln 2-\frac{3}{4}$

33. $\int_{-3}^{-2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 dt \quad =\int_{-3}^{2}\left(t^2-2t.\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$

$=\frac{t^3}{3}-2t+\frac{t^{-1}}{-1}\Big]_{-3}^{-2}$

$=\frac{1}{3}(-8+27)-2(-2+3)-\left(\frac{-1}{2}-\frac{-1}{3}\right)$

$=\frac{9}{2}$

34. $\int_0^{-1} \frac{x^3+8}{x+2}dx$

$= -\int_{-1}^{0} \frac{x^3+8}{x+2}dx$

Dividindo os polinômios, obtemos:

$-\int_{-1}^{0} \frac{x^3+8}{x+2}dx = -\int_{-1}^{0} \left(x^2-2x+4\right)dx$

$= -\left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big]_{-1}^{0}$

$= \frac{-1}{3} - 1 - 4 = \frac{-16}{3}$

35. Seja f contínua em $[-a, a]$. Mostrar que:

a) Se f é par, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x).$

Seja f par. Então $f(-x) = f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

Fazemos uma mudança de variável na primeira integral:

$u = -x \Rightarrow du = -dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0; x = -a \Rightarrow u = a$

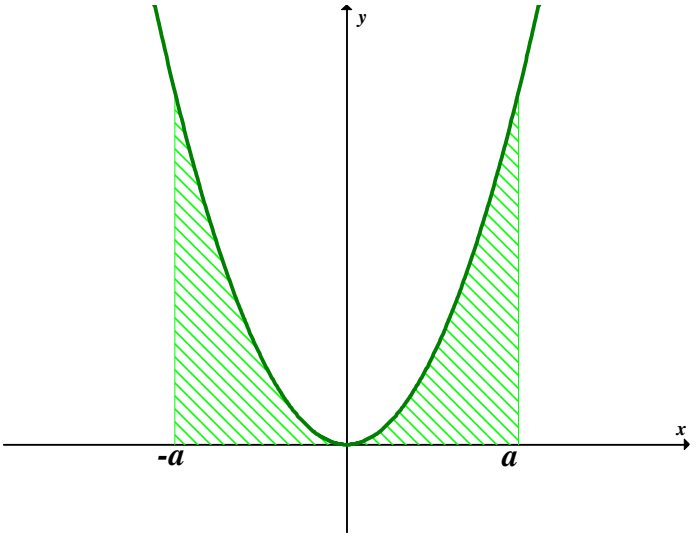
Temos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= -\left(-\int_0^a f(u)\,du\right) + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)dx$$

É interessante verificarmos geometricamente, conforme ilustra a figura que segue:



b) Se f é ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Seja f ímpar. Então $f(-x) = -f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^{0} -f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Fazemos uma mudança de variável na primeira integral:

$u = -x \Rightarrow du = -dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0; x = -a \Rightarrow u = a$

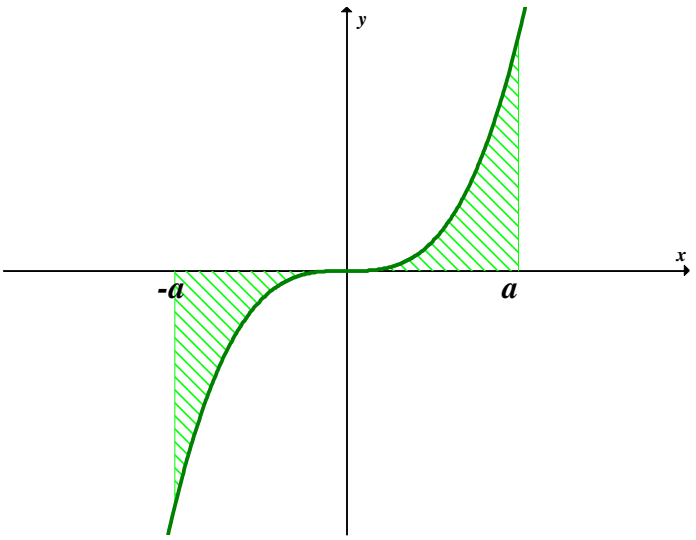
Temos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 0$$

É interessante verificarmos geometricamente, conforme ilustra a figura que segue:



36. Usar o resultado do Exercício 35 para calcular.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 2\ sen\ x\ dx$

$f(x) = sen\ x$ é função ímpar. Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2\ sen\ x\ dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} senx dx = 0$$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\pi}\, dx$

$f(x) = \cos x$ é par

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos x\ dx$$

$$= \frac{2}{\pi} sen\ x \Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\ .0 = 0$$

c) $\int_{-1}^{1} \left(x^{4} + x^{2}\right) dx$ f é par.

$$= 2\int_0^1 \left(x^4 + x^2\right)dx = 2\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1$$

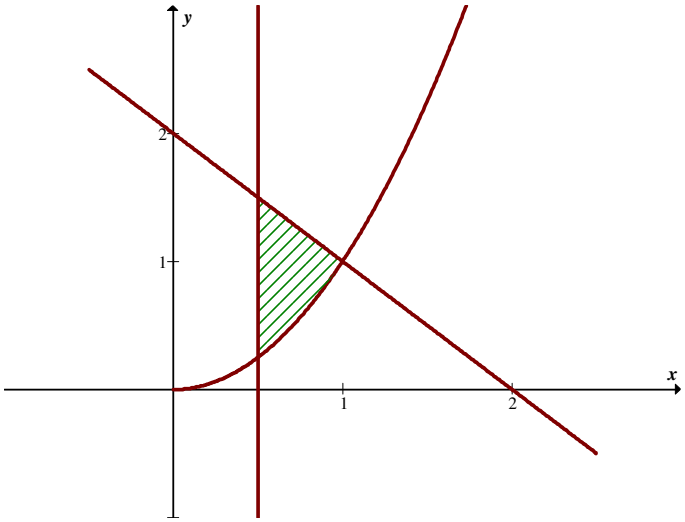
$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}$$

6.13 – EXERCÍCIOS – pg. 278

Nos exercícios de 1 a 29 encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas.

1. $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{y}$ e $y = -x + 2$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-x+2)dx = -\frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{8}$$

$$A_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

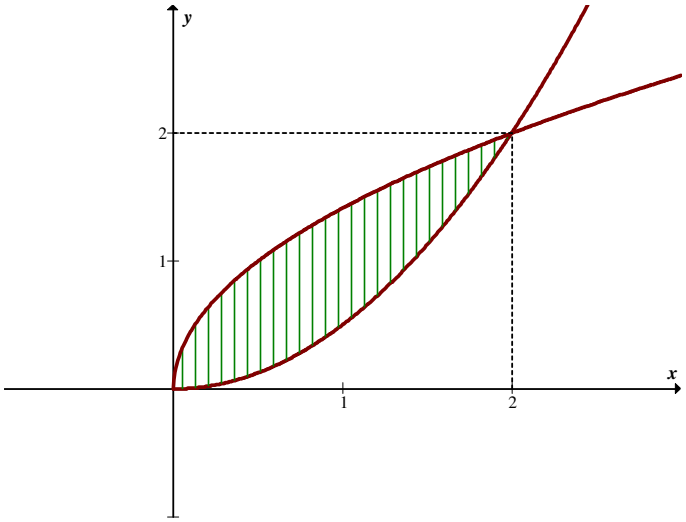
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{7}{24}$$

$$A = \frac{5}{8} - \frac{7}{24} = \frac{15-7}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} u.a$$

2. $y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$

A Figura que segue mostra a região dada.



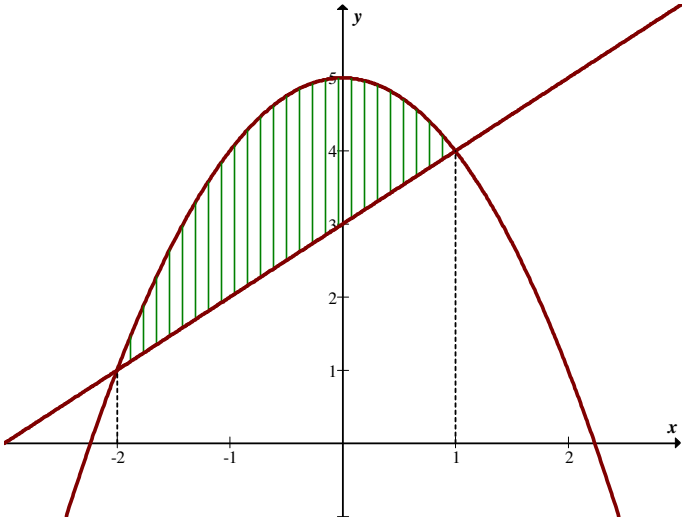
$$A_1 = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^2 = \sqrt{2}\,\frac{2}{3}\sqrt{2^3} = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg]_0^2 = \frac{1}{6}(2)^3 = \frac{8}{6}$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{6} = \frac{4}{3}u.a$$

3. $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$5 - x^2 = x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x' = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$x'' = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$A_1 = \int_{-2}^{1} \left(5 - x^2\right) dx = 5x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{1} = 5(1+2) - \frac{1}{3}(1+8)$$

$$= 15 - 3 = 12$$

$$A_2 = \int_{-2}^{1} (x+3) dx = \frac{x^2}{2} + 3x\Big]_{-2}^{1} = \frac{1}{2}(1-4) + 3(1+2)$$

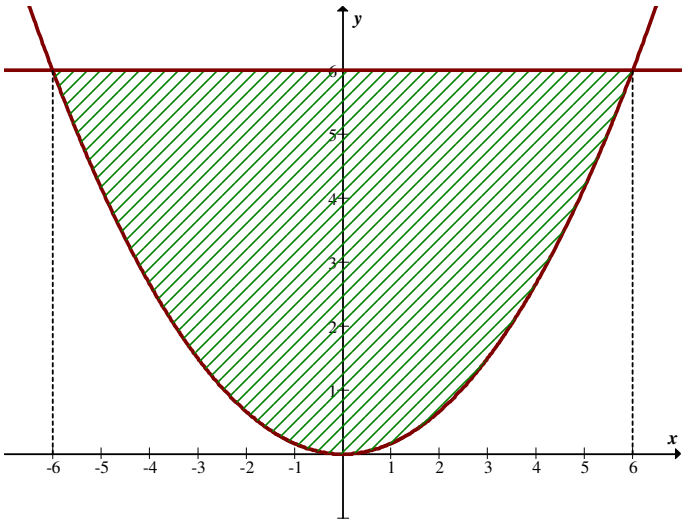
$$= \frac{1}{2} . (-3) + 3 . 3$$

$$= \frac{-3}{2} + 9 = \frac{-3+18}{2} = \frac{15}{2}$$

$$A = 12 - \frac{15}{2} = \frac{24-15}{2} = \frac{9}{2} u.a$$

4. $y = \frac{1}{6}x^2$ e $y = 6$

A Figura que segue mostra a região dada.



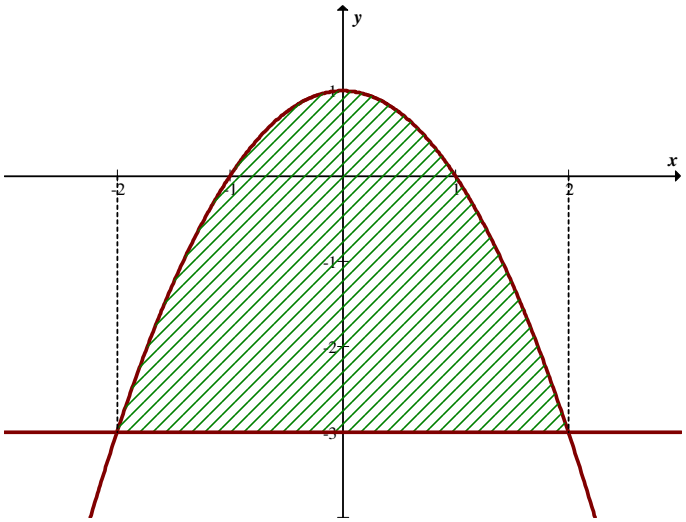
$$A_1 = \int_{-6}^{6} 6\,dx = 6x\Big]_{-6}^{6} = 6\,(6+6) = 72$$

$$A_2 = \int_{-6}^{6} \frac{1}{6}\,x^2\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{x^3}{3}\Big]_{-6}^{6} = \frac{1}{18}\,(216+216) = \frac{432}{18}$$

$$= 24$$

$$A = 72 - 24 = 48\ u.a$$

5. $y = 1 - x^2$ e $y = -3$

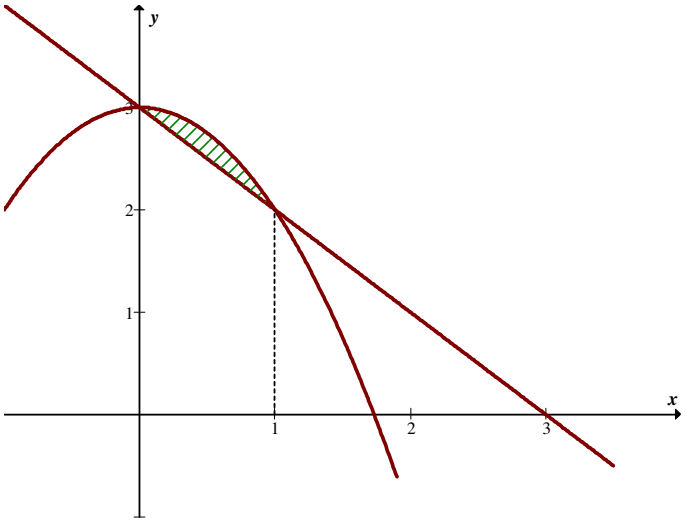


$$A = \int_{-2}^{2} \left(1 - x^2 - (-3)\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2} = 4(2+2) - \left(\frac{1}{3}\right)(8+8) = \frac{32}{3}\,u.a$$

6. $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_0^1 \left(3 - x^2\right) dx = 3x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1$$

$$= 3(1-0) - \frac{1}{3}(1-0)$$

$$= 3 - \frac{1}{3} = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_0^1 (3 - x)\, dx = 3x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^1$$

$$= 3 - \frac{1}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$A = \frac{8}{3} - \frac{5}{2} = \frac{16-15}{6} = \frac{1}{6} u.a$$

7. $x = y^2,\ y - x = 2,\ y = -2$ e $y = 3$

A Figura que segue mostra a região dada.

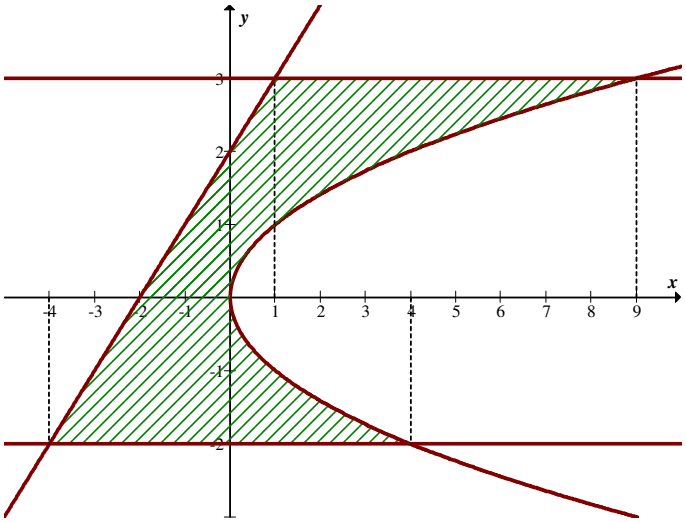
Sejam:

A - a parte da área acima do eixo dos *x*, de 0 a 1

B – a parte da área acima do eixo dos *x*, de 1 a 9

C – a parte da área à esquerda do eixo dos *y*

D – a parte da área abaixo do eixo dos *x*, de 0 a 4



Cálculo de A:

$$A_1 = \int_0^1 (2+x)dx = \frac{5}{2}$$

$$A_2 = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{5}{2} - \frac{2}{3} = \frac{15-4}{6} = \frac{11}{6}$$

Cálculo de B:

$$A_3 = \int_1^9 3\,dx = 3x\Big]_1^9 = 3\,(9-1) = 24$$

$$A_4 = \int_1^9 \sqrt{x}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_1^9 = \frac{2}{3}\,(27-1) = \frac{52}{3}$$

$$B = 24 - \frac{52}{3} = \frac{72-52}{3} = \frac{20}{3}$$

Cálculo de C:

$$C = \int_{-4}^0 \big(2+x-(-2)\big)\,dx = \int_{-4}^0 \big(4+x\big)\,dx = 4x + \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-4}^0 = 4(0+4) + \frac{1}{2}\big(0-16\big) = 8$$

Cálculo de D:

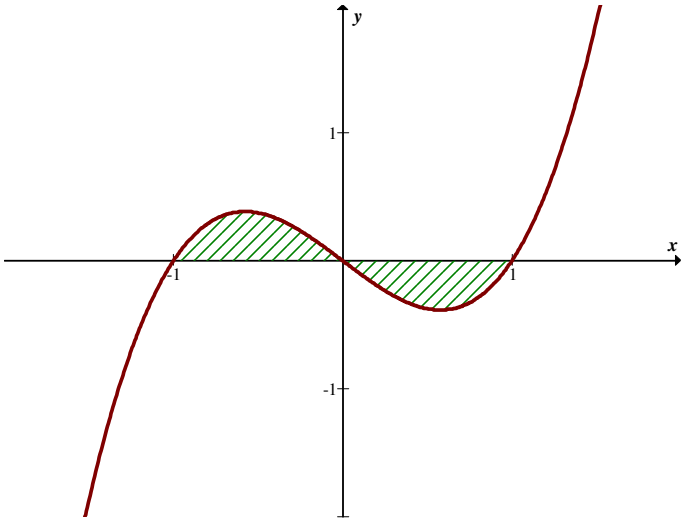
$$D = \int_0^4 \left(-\sqrt{x} - (-2)\right) dx = \int_0^4 \left(-\sqrt{x} + 2\right) dx = -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x \Bigg|_0^4 = -\frac{2}{3}.8 + 8 = \frac{8}{3}$$

$$\text{Área total} = A + B + C + D =$$

$$\frac{11}{6} + \frac{20}{3} + 8 + \frac{8}{3} = \frac{115}{6} u.a.$$

8. $y = x^3 - x$ e $y = 0$

A Figura que segue mostra a região dada.

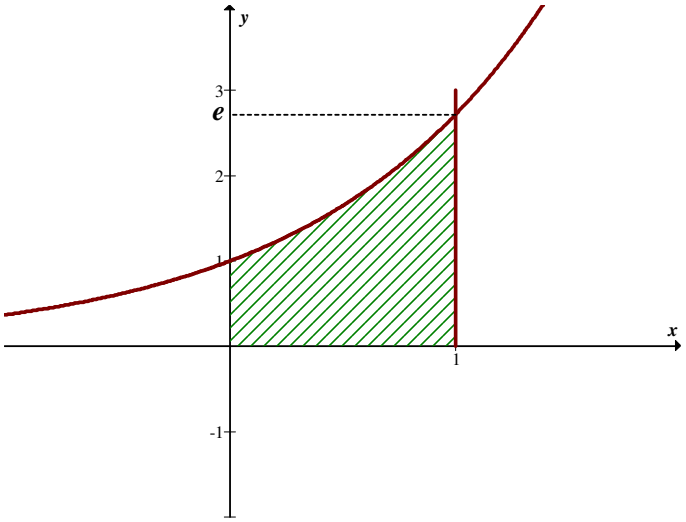


$$A = 2\int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} u.a$$

9. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$

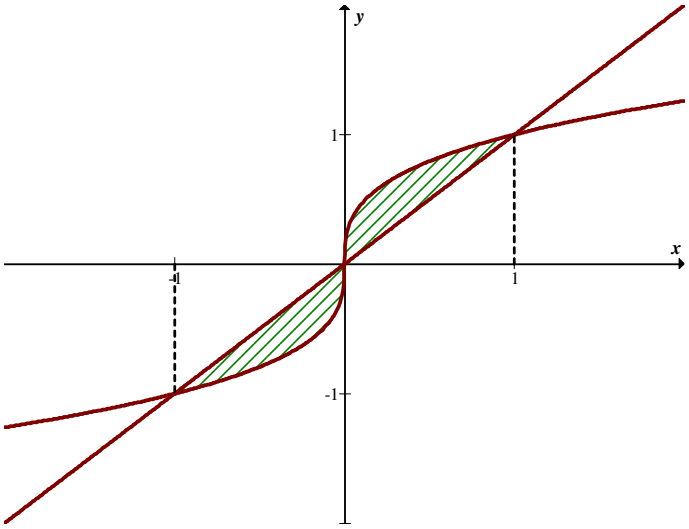
A Figura que segue mostra a região dada.



$$\int_0^1 e^x \, dx = e^x \Big]_0^1 = e - 1 \, u.a$$

10. $x = y^3$ e $x = y$

A Figura que segue mostra a região dada.



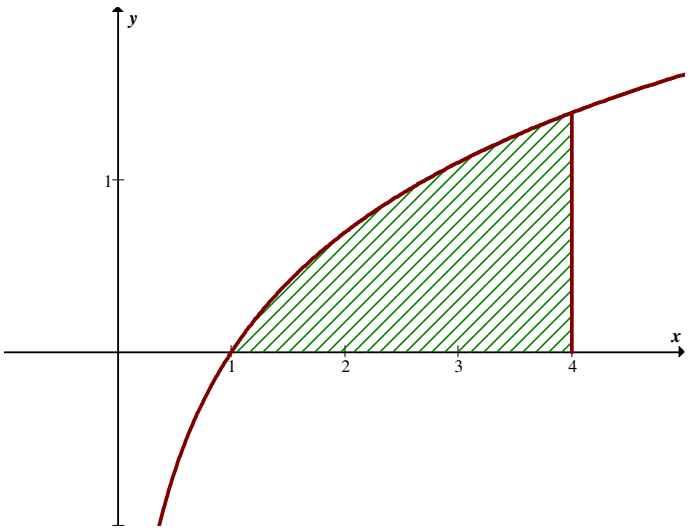
$$\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$A = 2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,u.a$$

11. $y = \ln x,\ y = 0$ e $x = 4$

A Figura que segue mostra a região dada.

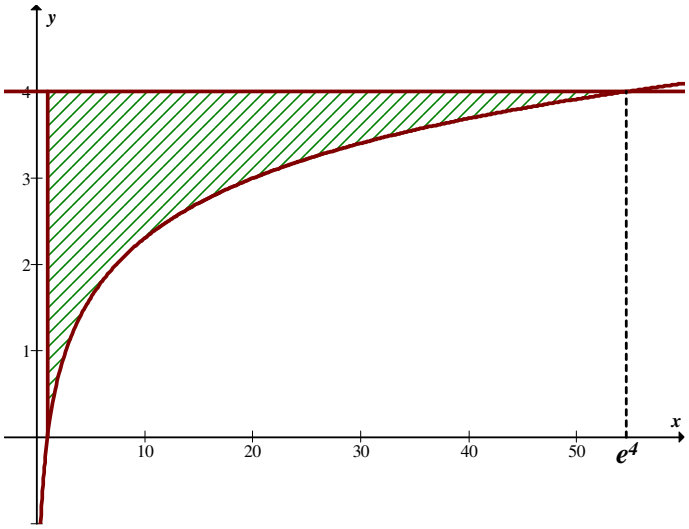


$$A = \int_1^4 \ln x\, dx \qquad \text{(Usamos integração por partes)}$$

$$A = x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x}\Big]_1^4$$
$$= x\ln x - x\Big]_1^4$$
$$= 4\ln 4 - 4 - 1\ln 1 + 1$$
$$= (4\ln 4 - 3)\,u.a$$

12. $y = \ln x,\ x = 1$ e $y = 4$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$\int_1^{e^4} 4\,dx = 4x\Big]_1^{e^4} = 4\left(e^4 - 1\right)$$

$$\int_1^{e^4} \ln x\,dx = x\ln x - x\Big]_1^{e^4}$$

$$= e^4 \ln e^4 - e^4 + 1$$

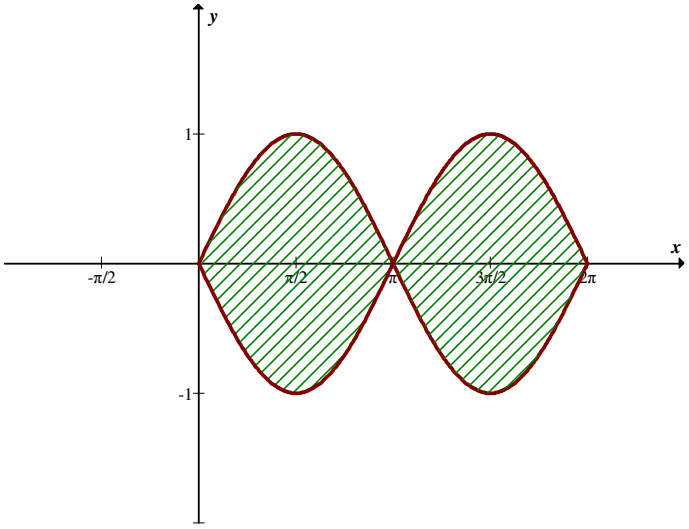
$$= 4e^4 - e^4 + 1$$

$$A = 4e^4 - 4 - 4e^4 + e^4 - 1$$

$$= (e^4 - 5)\ u.a$$

13. $y = sen\,x \quad y = -sen\,x,\ x \in [0,2\pi]$

A Figura que segue mostra a região dada.

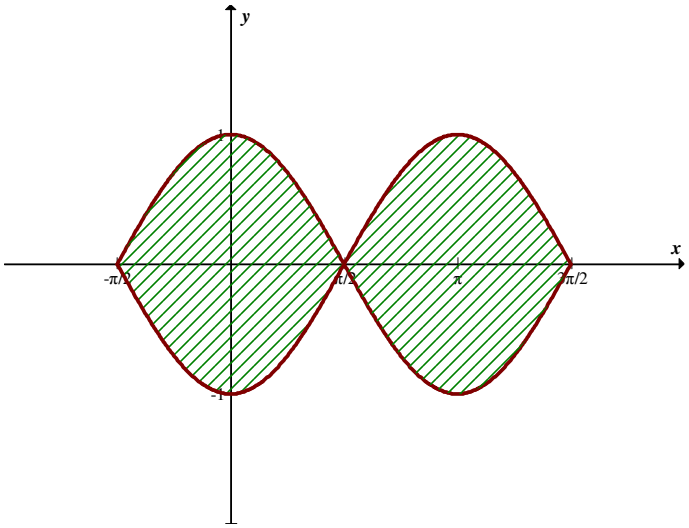


$$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = 2$$

$$A = 4 \times 2 = 8\, u.a.$$

14. $y = \cos x \quad y = -\cos x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

A Figura que segue mostra a região dada.

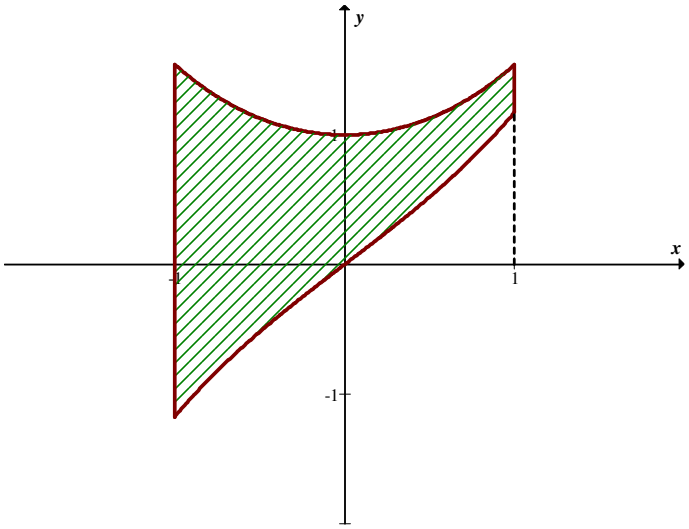


$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = sen\, x\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1+1 = 2$$

$$A = 4\,.\,2 = 8\, u.a$$

15. $y = \cosh x,\ y = senh\, x,\ x = -1$ e $x = 1$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_{-1}^{1} \cosh x\, dx = senh\, x\,]_{-1}^{1} = senh\, 1 - senh\,(-1)$$

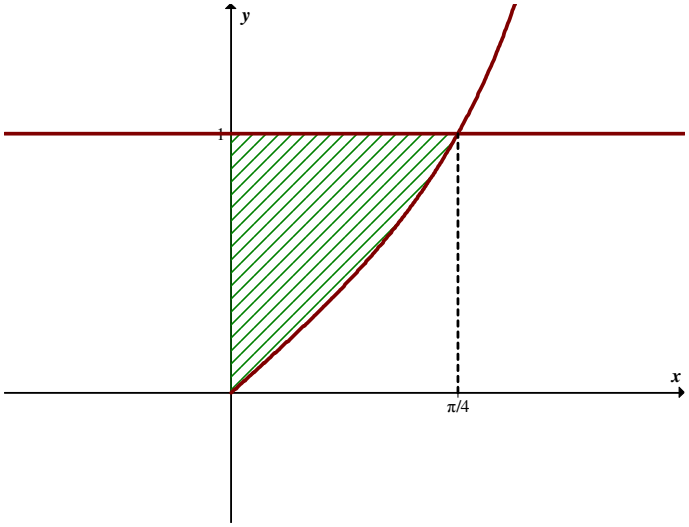
$$A_2 = \int_{-1}^{0} senhx dx = \int_{0}^{1} senh\, x\, dx = \cosh x\,]_{0}^{1} = \cosh 1 - \cosh 0$$

$$A = A_1 - A_2 + A_2 = senh\, 1 - senh\,(-1)$$

$$A = \frac{e^1 - \frac{1}{e}}{2} - \frac{\frac{1}{e} - e}{2} = e - \frac{1}{e} u.a$$

16. $y = tg\, x,\ x = 0$ e $y = 1$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\, x\, dx = -\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

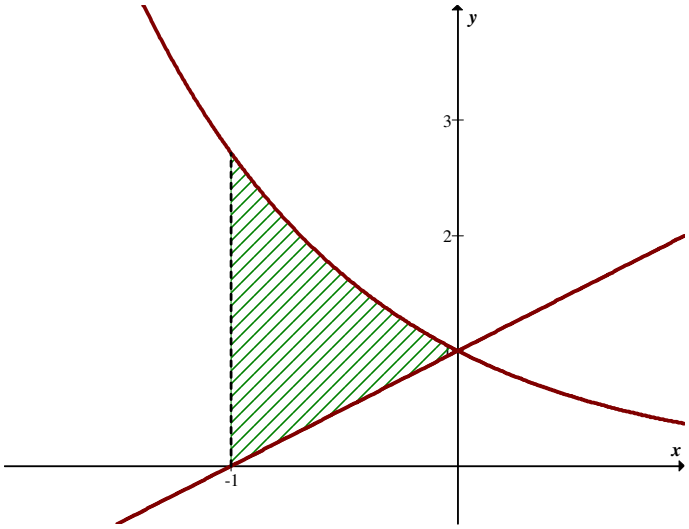
$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \ln|1|$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

$$A = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) u.a$$

17. $y = e^{-x}$, $y = x+1$ e $x = -1$

A Figura que segue mostra a região dada.



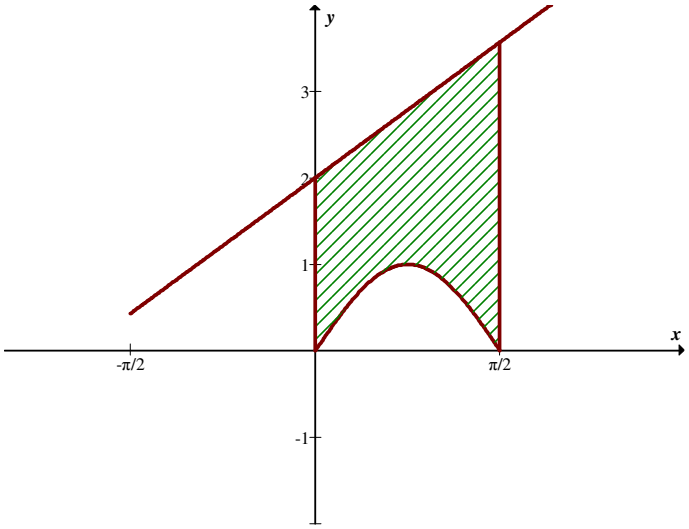
$$A_1 = \int_{-1}^{0} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big]_{-1}^{0} = -1 + e$$

$$A_2 = \int_{-1}^{0} (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1}^{0} = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$A = e - 1 - \frac{1}{2} = e - \frac{3}{2} u.a$$

18. $y = sen\, 2x$, $y = x+2$, $x = 0$ e $x = \pi/2$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2} + 2\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \pi$$

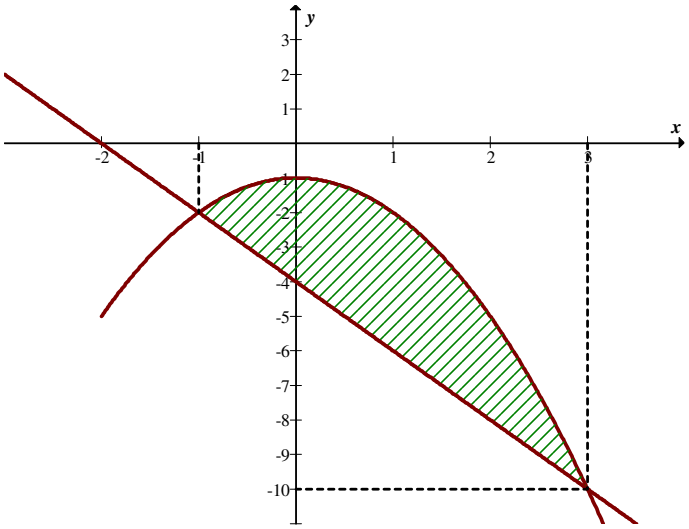
$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,2x\,dx = \frac{-1}{2}\cos 2x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}(-1-1) = 1$$

$$A = \frac{\pi^2}{8} + \pi - 1 = \frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}\,u.a$$

19. $y = -1 - x^2,\ y = -2x - 4$

A Figura que segue mostra a região dada.



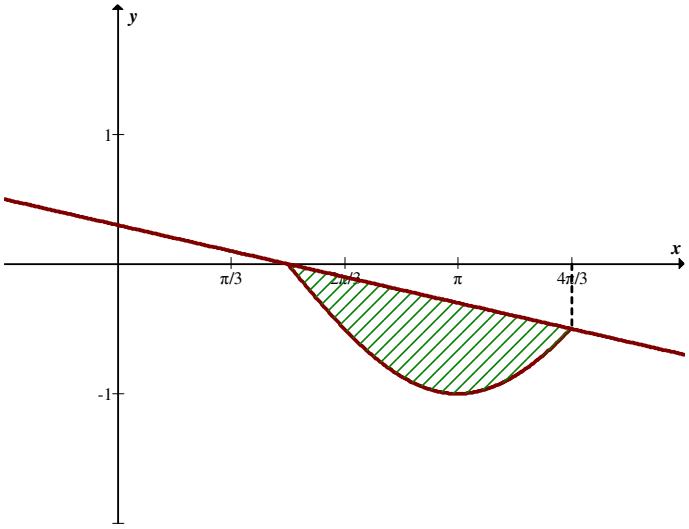
$$-\int_{-1}^{3}\left(-2x-4\right)dx = 2\frac{x^2}{2}+4x\Big]_{-1}^{3} = 9+12-1+4 = 24$$

$$-\int_{-1}^{3}\left(-1-x^2\right)dx = x+\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{3} = 3+9+1+\frac{1}{3} = \frac{39+1}{3} = \frac{40}{3}$$

$$A = 24-\frac{40}{3} = \frac{72-40}{3} = \frac{32}{3}\,u.a$$

20. $y = \cos x,\ y = \dfrac{-3}{5\pi}x+\dfrac{3}{10},\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{4\pi}{3}\right]$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = -\int_{\pi/2}^{4\pi/3} \cos x\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$A_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(-\frac{3}{5\pi}x + \frac{3}{10} \right) dx = \frac{3}{5\pi} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{3}{10}x \Bigg]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}}$$

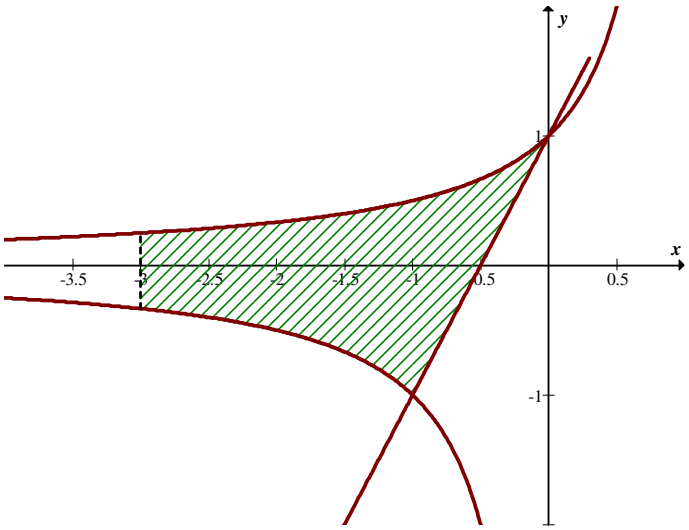
$$= \frac{3}{5\pi} \cdot \frac{16\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \cdot \frac{4\pi}{3} - \frac{3}{5\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{8\pi}{15} - \frac{2\pi}{5} - \frac{3\pi}{40} + \frac{3\pi}{20} = \frac{5\pi}{24}$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{5\pi}{24} \right) u.a$$

21. $y = \dfrac{1}{|x-1|}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 2x + 1$ e $x = -3$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_{-3}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x|\Big]_{-3}^{0} = -\ln 1 + \ln|4|$$

$$= \ln 4$$

$$A_2 = \int_{\frac{-1}{2}}^{0} (2x+1)\,dx = 2\frac{x^2}{2} + x \Bigg]_{-3}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1+2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = -\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = \ln 3$$

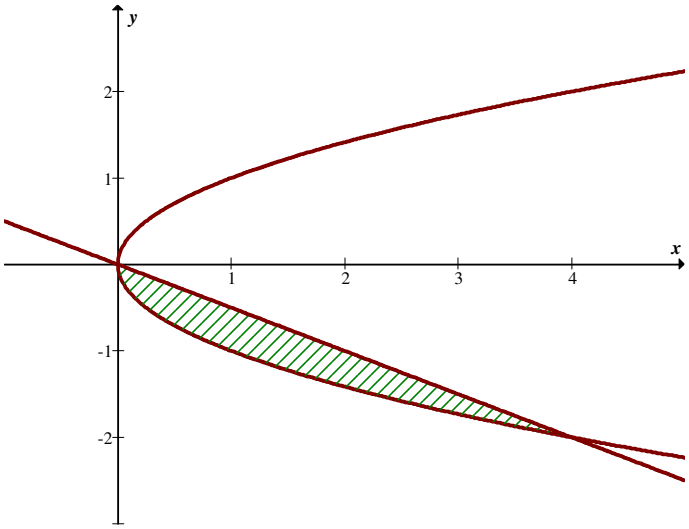
$$A_4 = -\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} (2x+1)\,dx = -2\frac{x^2}{2} - x\Big]_{-1}^{\frac{-1}{2}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - 1$$

$$= \frac{-1+2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$A = \ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 3 + \frac{1}{4} = \ln 12$$

22. $x = y^2$ e $y = -\frac{1}{2}x$

A Figura que segue mostra a região dada.



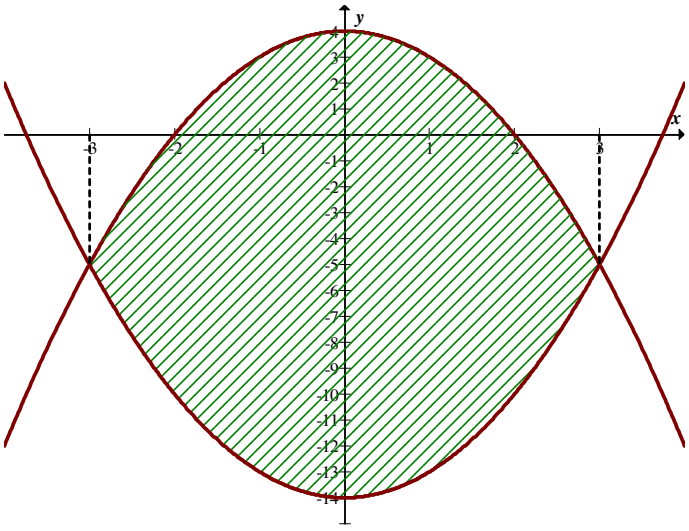
$$A_1 = -\int_0^4 -x^{1/2}dx = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = -\int_0^4 \frac{-1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \frac{1}{4}.16 = 4$$

$$A = \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}\,u.a$$

23. $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 14$

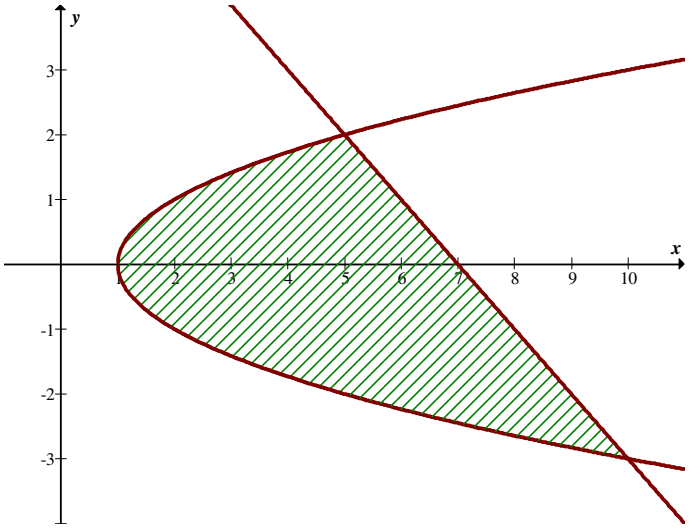
A Figura que segue mostra a região dada.



$$A = 2\int_0^3 \left[\left(4 - x^2\right) - \left(x^2 - 14\right)\right]dx = 2\int_0^3 \left(18 - 2x^2\right)dx = 2\left(18x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg]_0^3$$
$$= 2(54 - 18) = 72$$

24. $x = y^2 + 1$ e $x + y = 7$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_1^5 (x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_1^5 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{4^3} = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = \int_5^7 (7-x)\,dx = 7x - \frac{x^2}{2}\Big]_5^7$$

$$= 7(7-5) - \frac{1}{2}(49-25)$$

$$= 2$$

$$A_3 = -\int_1^{10} -(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_7^{10} (7-x)\,dx$$

$$= \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_1^{10} + 7x - \frac{x^2}{2}\Big]_7^{10}$$

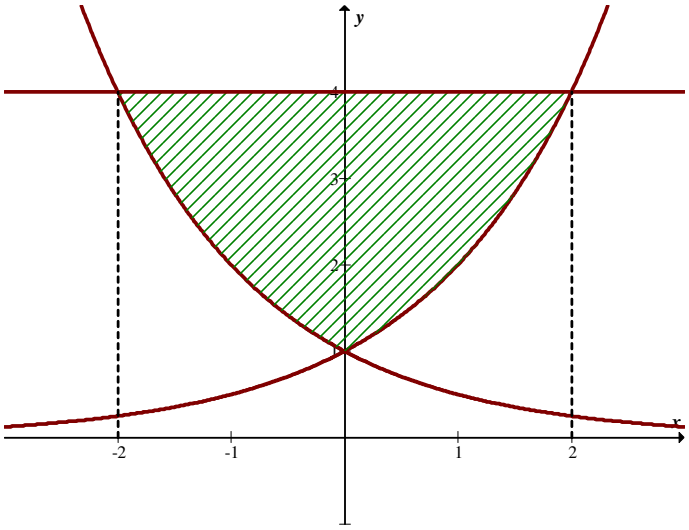
$$= \frac{2}{3}(27) + 7(10-7) - \frac{1}{2}(100-49)$$

$$= 18 + 21 - \frac{51}{2}$$

$$A = \frac{16}{3} + 2 + 18 + 21 - \frac{51}{2} = \frac{125}{6}\,u.a.$$

25. $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ e $y = 4$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_{-2}^{2} 4\,dx = 4x\Big]_{-2}^{2} = 4\,(2+2) = 16$$

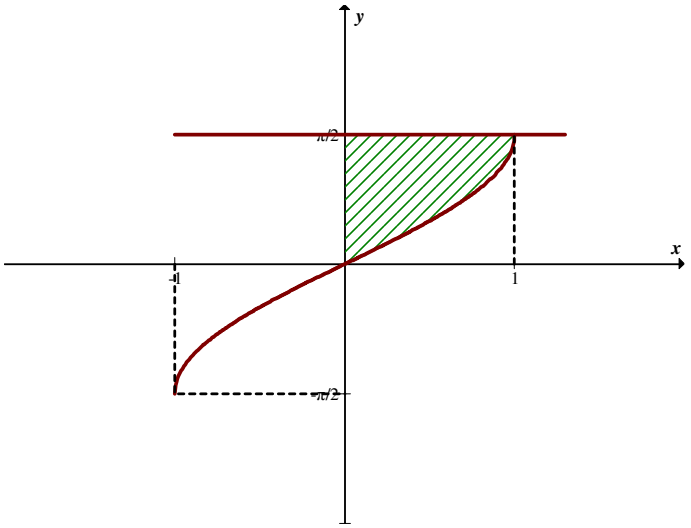
$$A_2 = \int_{-2}^{0} 2^{-x}\,dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big]_{-2}^{0} = -\frac{1}{\ln 2}\,(1-4) = \frac{3}{\ln 2}$$

$$A_3 = \int_{0}^{2} 2^{x}\,dx = -\frac{2^{x}}{\ln 2}\Big]_{0}^{2} = \frac{3}{\ln 2}$$

$$A = 16 - \frac{6}{\ln 2}\ \text{u.a.}$$

26. $y = arc\ sen\,x,\ y = \pi/2$ e $x = 0$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_{0}^{1} arc\ sen\,x\,dx =$$

Usamos integração por partes:

$$\int arc\ sen x dx = arc\ sen\,x\,.x - \int x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

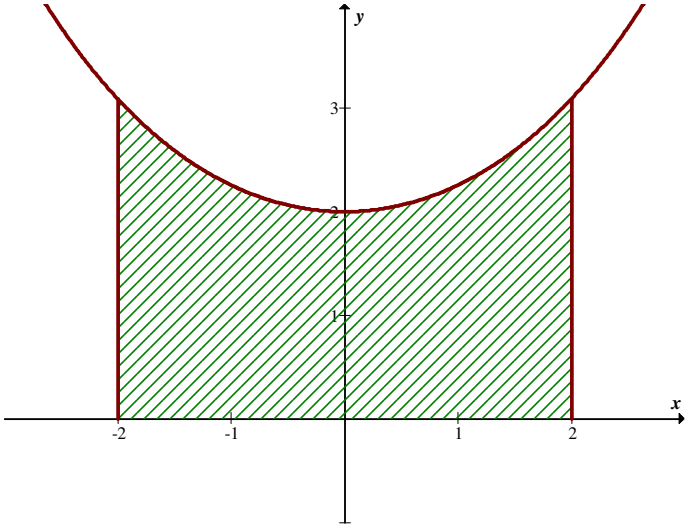
$$= x\ arc\ sen\,x - \frac{-1}{2}\,\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$A_1 = x\ arc\ sen\,x + \sqrt{1-x^2}\Big]_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1\,u.a$$

27. $y = 2\cosh\frac{x}{2}$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A = \int_{-2}^{2} 2\cos h\frac{x}{2}\,dx = 2\int_{0}^{2} 2\cos h\,\frac{x}{2}\,dx = 4\int_{0}^{2} \cos h\,\frac{x}{2}\,dx$$

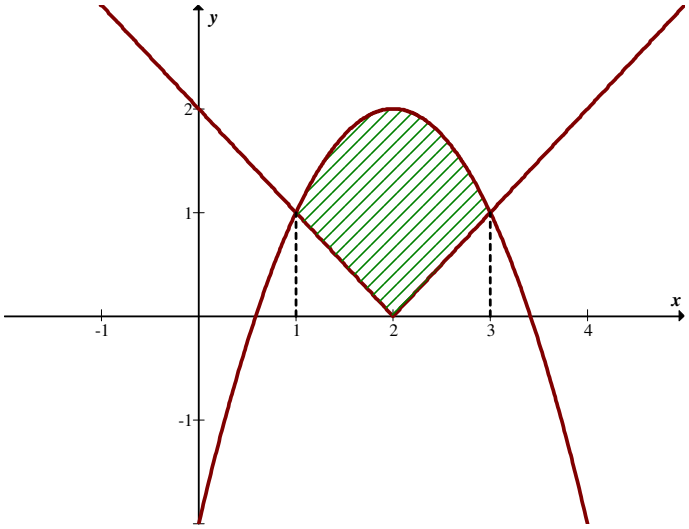
$$= 8\,sen\,h\,\frac{x}{2}\Big]_0^2 = 8\left(sen\,h1 - sen\,h\,0\right)$$

$$= 8.\frac{e^1 - e^{-1}}{2}$$

$$= 4\left(e - \frac{1}{e}\right)u.a$$

28. $y = |\,x - 2\,|$ e $y = 2 - (x-2)^2$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$A_1 = \int_1^2 \left[2-(x-2)^2\right] dx = 2x - \frac{(x-2)^3}{3}\Bigg]_1^2$$

$$= 2(2-1) - \frac{1}{3}(+1) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$$

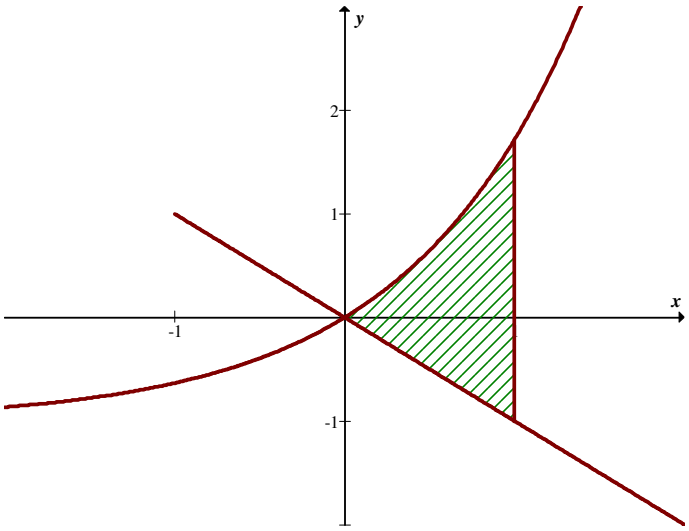
$$A_2 = \int_1^2 (-x+2)\, dx = -\frac{x^2}{2} + 2x\Bigg]_1^2 = -\frac{1}{2}(4-1) + 2(2-1)$$

$$= -\frac{3}{2} + 2 = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) = 2\,\frac{10-3}{6} = 2\,\frac{7}{6} = \frac{7}{3}\,u.a$$

29. $y = e^x - 1,\ y = -x$ e $x = 1$

A Figura que segue mostra a região dada.



$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right)dx = e^x - x\Big]_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2$$

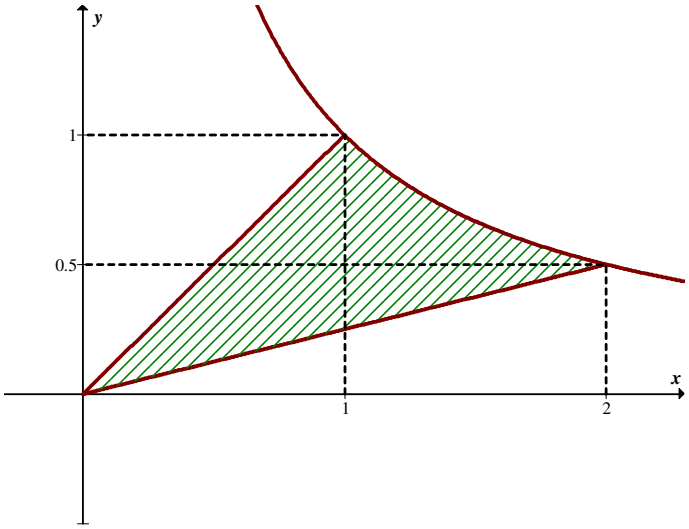
$$-\int_0^1 -x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$A = e - 2 + \frac{1}{2} = \frac{2e-4+1}{2} = \frac{2e-3}{2} u.a$$

30. Encontrar a área das regiões S_1 e S_2, vistas na figura a seguir

As Figuras que segue mostram as regiões dadas.

Região S_1



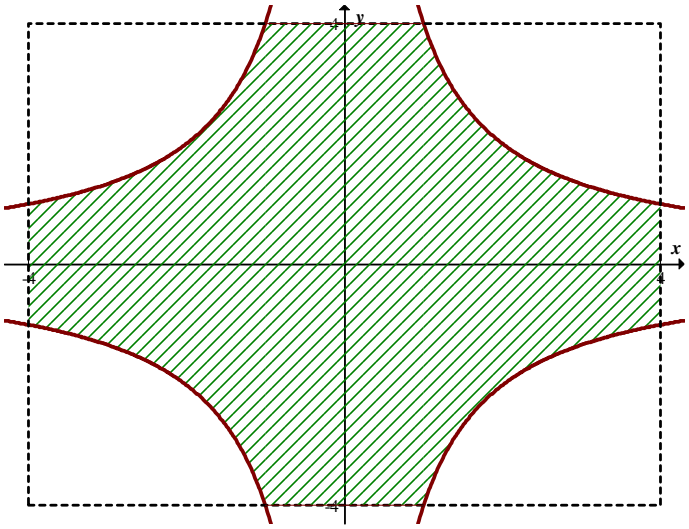
$$A_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2$$

$$A_3 = \int_0^2 \frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{4}.\frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = \frac{1}{8}.4 = \frac{1}{2}$$

$$S_1 : A = \frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2$$

Região S_2



$$\int_1^4 \frac{4}{x}\,dx = 4\ln x\Big]_1^4 = 4\left(\ln 4 - \ln 1\right) = 4\ln 4$$

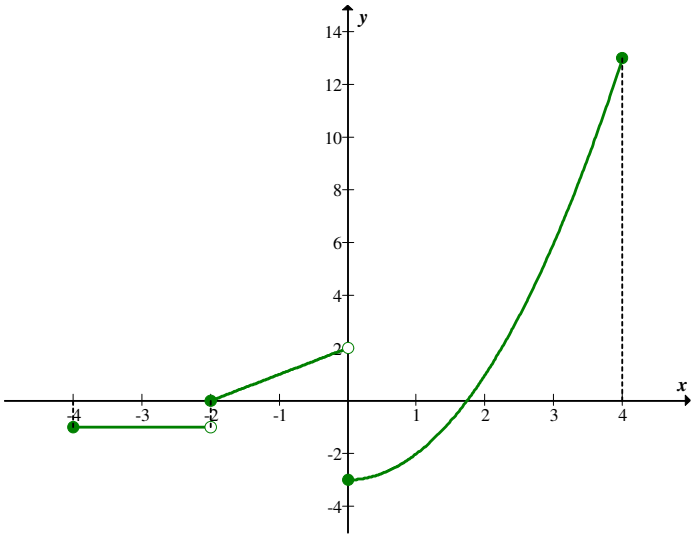
$$S_2 : A = 4\left[4 + 4\ln 4\right]$$

$$= 16 + 16\ln 4\ u.a$$

6.15 – EXERCÍCIOS – pg. 290

1. Dar um exemplo de uma função contínua por partes definidas no intervalo $[-4,4]$.
   Muitos exemplos podem ser criados. Segue um deles:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -4\le x<-2\\ x+2, & -2\le x<0\\ x^2-3, & 0\le x\le 4\end{cases}$$



2. Calcular a integral das seguintes funções contínuas por partes definidas nos intervalos dados. Fazer o gráfico das funções dadas, verificando que os resultados encontrados são coerentes.

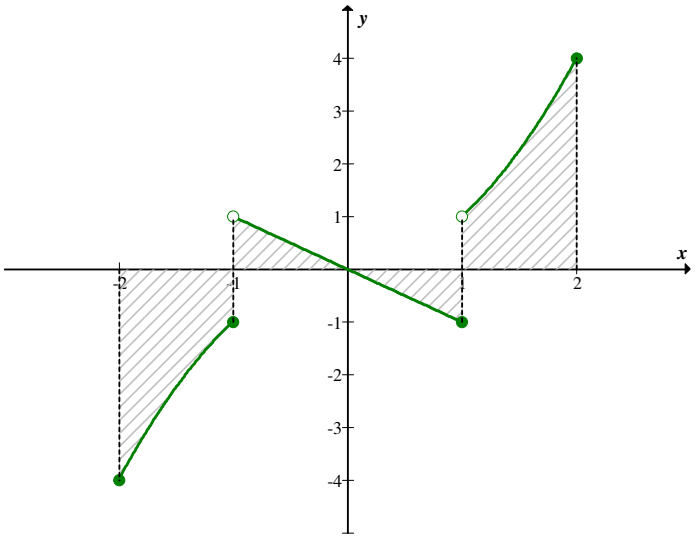
a) $f(x)=\begin{cases}-x^2, -2\le x\le -1\\ -x, -1<x\le 1\\ x^2, 1<x\le 2\end{cases}$

$$I=\int_{-2}^{-1}-x^2dx+\int_{-1}^{1}-x\,dx+\int_{1}^{2}x^2dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{-x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}+\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=0$$

Segue o gráfico que nos mostra o valor zero ao analisar as áreas acima do eixo dos x e abaixo do eixo dos x.



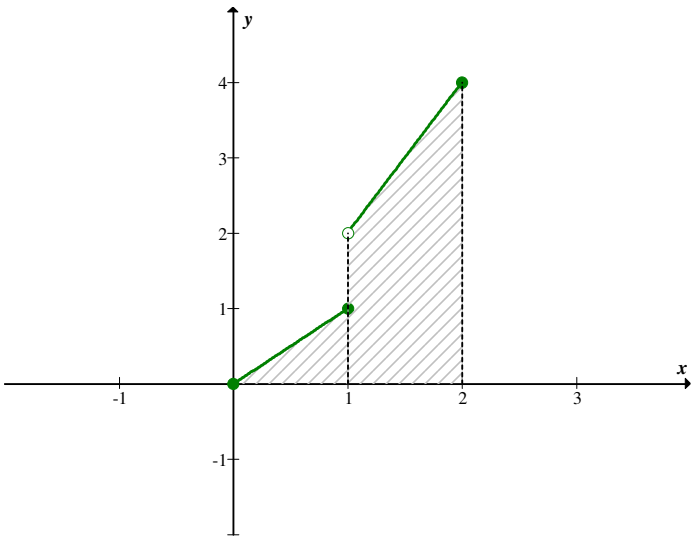
b) $f(x)=\begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 2x, 1 < x \le 2 \end{cases}$

$$I=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 2x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x^2\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}+4-1=\frac{7}{2}$$

Segue o gráfico, o valor pode ser observado numa análise geométrica da área assinalada formada por dois triângulos e um retângulo ou um triângulo e um trapézio retângulo: $Area=\frac{1\times 1}{2}+1\times 2+\frac{1\times 2}{2}=\frac{7}{2}$.

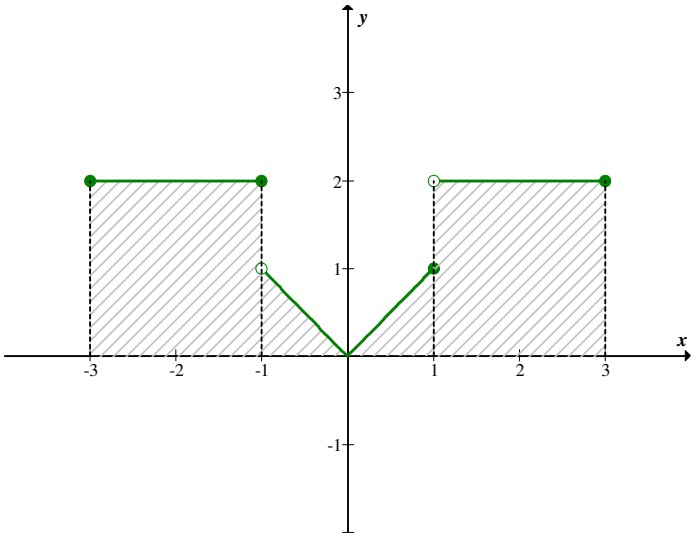


c) $f(x)=\begin{cases}2, -3\le x\le -1\\ |x|, -1<x\le 1\\ 2, 1<x\le 3\end{cases}$

$$I=\int_{-3}^{-1}2\,dx+\int_{-1}^{1}|x|\,dx+\int_{1}^{3}2\,dx$$

$$=2\,.\,2+1+2\,.\,2=9$$

Segue o gráfico e o valor pode ser constatado geometricamente pela soma da área de dois quadrados com dois triângulos: $Área=2\times 2^2+2\times\frac{1\times 1}{2}=9$.



3. Calcular a integral das seguintes funções contínuas por partes.

a) $f(x)=\begin{cases}sen\,2x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 1+\cos x, \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sen\,2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(x+sen\,x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos\pi-\cos 0]+\left(\pi+sen\,\pi-\frac{\pi}{2}-sen\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}[-1-1]+\frac{\pi}{2}-1$$

$$=1+\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi}{2}$$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, 0\le x\le 2\\ (x-1)^2, 2<x\le 4\end{cases}$

$$I=\int_0^2\frac{dx}{x+1}+\int_2^4(x-1)^2\,dx$$

$$=\ln|x+1|\Big\|_0^2+\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_2^4$$

$$=\ln 3-\ln 1+\frac{3^3}{3}-\frac{1}{3}$$

$$=\ln 3+9-\frac{1^3}{3}$$

c) $f(x)=\begin{cases}tg\,x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\\ \cos 3x, \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg\;x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos 3x\,dx$$

$$=\ln|\sec x|\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{3}sen\,3x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\ln\left|\sec\frac{\pi}{4}\right|-\ln|\sec 0|+\frac{1}{3}sen\,\pi-\frac{1}{3}sen\,\frac{3\pi}{4}$$

$$=\ln\sqrt{2}-\ln 1+0-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\ln\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

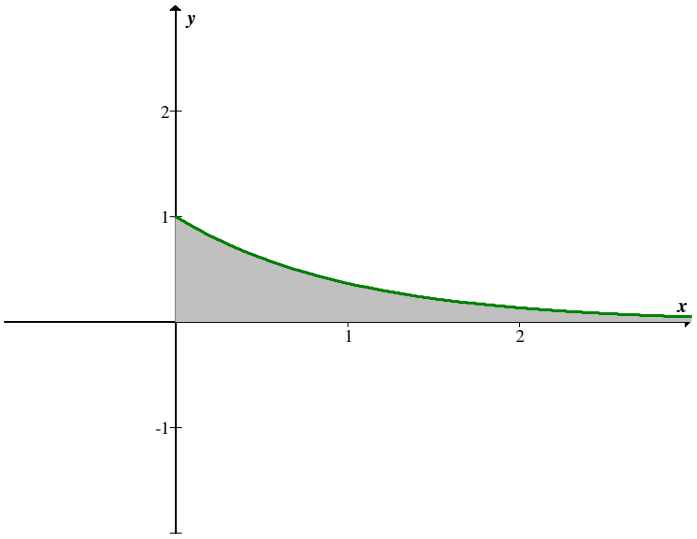
4. Encontrar a área sob a curva $y=e^{-x}, x\ge 0$.

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}-e^{-x}\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}-e^{-b}+e^0=1$$

$A=1\,u.\,a.$

Segue a Figura com a área assinalada.



5. Investigar a integral imprópria $\int_7^{+\infty} \frac{1}{(x-5)^2} dx$.

$$I = \int_7^{+\infty} \frac{1}{(x-5)^2}\, dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \int_7^b (x-5)^{-2}\, dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{(x-5)}\Bigg|_7^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{(b-5)} - \frac{-1}{(7-5)} = \frac{1}{2}$$

A integral converge.

6. Mostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é divergente.

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} 2x^{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} 2 \,.\, b^{\frac{1}{2}} - 2 = +\infty$$

A integral diverge, pois o resultado obtido foi infinito.

7. Verificar se a integral $\int_{-\infty}^{0} e^{5x}dx$ converge. Em caso positivo, determinar seu valor.

$$I = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{5x}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{5}e^{5x}\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{5}e^0 - \frac{1}{5}e^{5a}\right] = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-\infty} = \frac{1}{5}$$

A integral converge e o valor encontrado está explicitado acima.

8. Dar um exemplo de uma função f, tal que $\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx$ existe, mas a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ é divergente.

Vamos dar como exemplo a função $f(x) = x$. Temos que:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{2} - \frac{(-b)^2}{2}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} 0 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \int_{-\infty}^{0} x dx + \int_0^{\infty} x dx$$

e

$$\int_0^{\infty} x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{2} = +\infty$$

Portanto, $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ diverge.

9. Encontrar a área sob o gráfico da curva $y = (x+1)^{-3/2}$, $x \geq 15$.

$$\int_{15}^{+\infty}(x+1)^{\frac{-3}{2}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{15}^{b}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

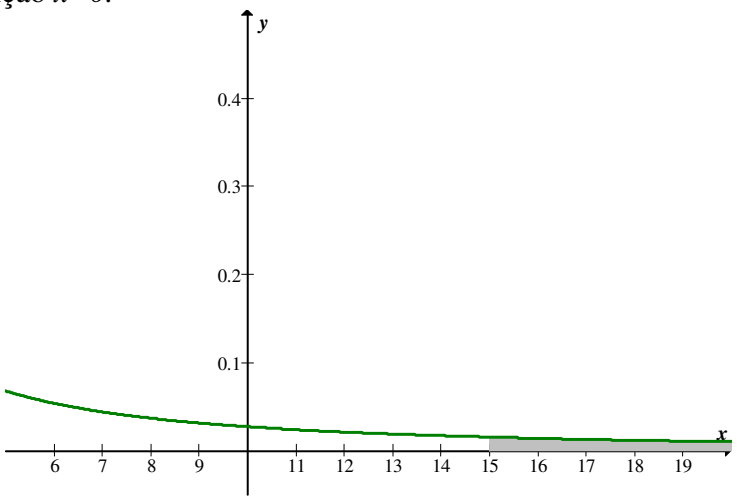
$$= \lim_{b\to+\infty} -2\,(x+1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{15}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -2\,(b+1)^{-\frac{1}{2}} + 2\,(15+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(16^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\,.\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

A Figura que segure apresenta a área indicada. Observe que para facilitar a visualização da região o eixo dos *y* foi deslocado para a posição *x=10* ao invés da tradicional posição *x=0*.



10. Encontrar a área sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ para $x \geq 1$.

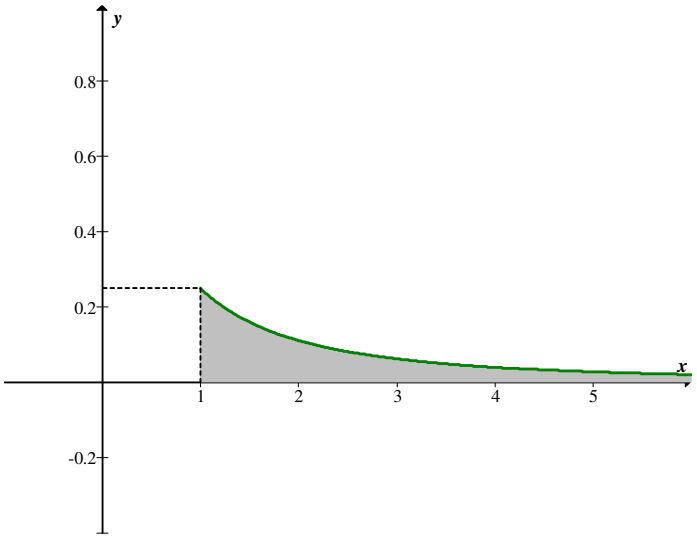
$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}(x+1)^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{x+1}\Big|_{1}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{b+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Segue a Figura que mostra a área calculada.



11. Engenheiros da Petrobrás estimaram que um poço de petróleo pode produzir óleo a uma taxa de: $P(t) = 80e^{-0,04t} - 80e^{-0,1t}$ milhares de barris por mês, onde *t* representa o tempo, medido em meses, a partir do momento em que foi feita a estimativa. Determinar o potencial de produção de óleo desse poço a partir dessa data.

$$I = \int_0^{+\infty} \left[80\, e^{-0,04\,t} - 80\, e^{-0,1t}\right] dt$$

$$= 80 \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \left[e^{-0,04\,t} - e^{-0,1t}\right] dt$$

$$= 80 \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{0,04} e^{-0,04\,t} \Big|_0^b + \frac{1}{0,1} e^{-0,1t} \Big|_0^b \right)$$

$$= 80 \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{0,04} e^{-0,04b} + \frac{1}{0,04} e^{0} + \frac{1}{0,1} e^{-0,1b} - \frac{1}{0,1} e^{0} \right]$$

$$= 80 \left[\frac{1}{0,04} - \frac{1}{0,1} \right]$$

$$= 80\left[25 - 10\right] = 80\,.15 = 1200$$

O potencial do poço é de 1200 milhares de barris de óleo.

12. Investigar as integrais impróprias seguintes.

a) $\int_{-\infty}^{0} e^{x} dx$

$$I = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0$$
$$= \lim_{a\to-\infty} e^0 - e^a = 1$$

A integral converge.

b) $\int_{-\infty}^{0} x.e^{-x^2}\,dx$

$$I = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,e^{-x^2}\,dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_a^0$$
$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left[e^0 - e^{-a^2}\right] = -\frac{1}{2}$$

A integral converge

c) $\int_1^{+\infty} \ln x\,dx$

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \ln x\;dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(x\ln x - x\right)\Big|_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(b\ln b - b\right) - \left(1\ln 1 - 1\right)$$
$$= \lim_{b\to+\infty} b\left(\ln b - 1\right) - 1$$
$$= +\infty$$

A integral diverge.

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2}$

Como a função integrando é par podemos verificar a convergência de $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$.

Temos:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} arc\ tg \frac{x}{3}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} arc\ tg \frac{b}{3} - \frac{1}{3} arc\ tg\ 0$$

$$= \frac{1}{3} arc\ tg\ \infty$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

A integral converge e $I = 2.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

e) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{dx}{x(\ln\ x)^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{\ln\ x}\Big|_e^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{\ln\ b} + \frac{1}{\ln\ e} = 1$$

A integral converge.

f) $\int_0^{+\infty} \frac{4dx}{x+1}$

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{4\ dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty} 4\ \ln\left(x+1\right)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} 4\ln\left(b+1\right) - 4\ln 1$$

$$= +\infty$$

A integral diverge.

g) $\int_0^{+\infty} r.e^{-rx} dx, r > 0$

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_0^b r\, e^{-rx} dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-rx}\right)\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-rb} + e^0 = 1$$

A integral converge

h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^3}{(x^4+3)^2}\, dx$

Temos que $f(x)$ é impar; basta analisar $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. Temos:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{4x^3}{\left(x^4+3\right)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \left(x^4+3\right)^{-2} 4x^3 dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{x^4+3}\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

A integral I converge e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^3}{(x^4+3)^2}\, dx = 0.$

13. Determinar a área sob a curva $y = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, no intervalo $[0,4)$.

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$
$$= \lim_{s\to4^-} \int_0^s (4-x)^{-1/2} dx \qquad u = 4-x$$
$$du = -dx$$
$$= \lim_{s\to4^-} -2(4-x)^{1/2}\Big|_0^s \qquad -\int u^{-1/2} du$$
$$= \lim_{s\to4^-} -2(4-x)^{1/2} + 2\,.\,4^{1/2} \qquad -2\,u^{1/2}$$
$$= 4$$

$A = 4\ u.\,a.$

14. Investigar as integrais impróprias.

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$$I = \lim_{s\to 1^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{s\to 1^-} -2\sqrt{1-x}\Big|_0^s$$

$$= \lim_{s\to 1^-} -2\sqrt{1-s} + 2\sqrt{1}$$

$$= 2$$

A integral converge.

b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 x^{-2} dx$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{-1}{x}\Big|_r^1 = \lim_{r\to 0^+} -1 + \frac{1}{r} = +\infty$$

A integral diverge.

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

$$I = \lim_{s\to 3^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \lim_{s\to 3^-} arc\ sen\ \frac{x}{3}\Big|_0^s$$

$$= \lim_{s\to 3^-} arc\ sen\ \frac{s}{3} - arc\ sen\ 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

A integral converge.

d) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$

$$I = \lim_{s\to 5^-} \int_0^s \left(25-x^2\right)^{-1/2} x\,dx$$

$$= \lim_{s\to 5^-} -\sqrt{25-x^2}\Big|_0^s$$

$$= \lim_{s\to 5^-} -\sqrt{25-s^2} + \sqrt{25}$$

$$= 5$$

A integral converge.

e) $\int_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{1-x}$

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{x}{1-x}dx + \int_1^2 \frac{x}{1-x}dx$$

$$= \lim_{s\to 1^-} \int_{-2}^{s} \frac{x}{1-x}dx + \lim_{r\to 1^+} \int_r^2 \frac{x}{1-x}dx$$

$$= \lim_{s\to 1^-} -x - \ln\left|1-x\right|_{-2}^{s}$$

$$= \lim_{s\to 1^-} -s - \ln\left|1-s\right| + \left(-2\right) + \ln\left|1+2\right|$$

$$= -1-\infty+\left(-2\right)+\ln 3$$

$$= -\infty$$

A integral diverge.

f) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

Temos:

$$I_1 = \lim_{r\to 0^+} -2\,e^{-\sqrt{x}}\Big|_r^1 = \lim_{r\to 0^+} -2\,e^{-\sqrt{1}} + 2\,e^{-\sqrt{r}}$$

$$= \frac{-2}{e} + 2$$

$$I_2 = \lim_{b\to+\infty} -2\,e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} -2\,e^{-\sqrt{b}} + 2\,e^{-1} = 2e^{-1}$$

Portanto, a integral dada converge e o seu valor é
$I = \dfrac{-2}{e} + 2 + \dfrac{2}{e} = 2$.

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$$
$$= \lim_{r\to1^+} \int_r^2 \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{(x-1)^3}$$

Temos que:

$$\lim_{r\to1^+} \int_r^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{r\to1^+} \frac{-1}{2(x-1)^2}\Big|_r^2 = \lim_{r\to1^+}\left[\frac{-1}{2(2-1)^2} + \frac{1}{2(r-1)^2}\right]$$
$$= +\infty$$

Assim, já podemos concluir que a integral diverge.

15. Verificar que $\displaystyle\lim_{r\to0}\left[\int_{-1}^{r} \frac{dx}{x} + \int_r^1 \frac{dx}{x}\right] = 0$ mas a integral imprópria $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ diverge.

$$\lim_{r\to0}\left[\int_{-1}^{r} \frac{dx}{x} + \int_r^1 \frac{dx}{x}\right] = \lim_{r\to0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{r} + \ln|x|\Big|_r^1\right)$$
$$= \lim_{r\to0}\left[\ln r - \ln 1 + \ln 1 - \ln r\right] = 0$$

Mas,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{r\to0^+} \int_r^1 \frac{dx}{x} = \lim_{r\to0^+} \ln|x|\Big|_r^1$$
$$= \lim_{r\to0^+} \ln 1 - \ln r = -\infty$$

Portanto, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ diverge.

16. Encontre os valores de n para os quais a integral $\displaystyle\int_0^4 x^n dx$ converge $(n \in \mathrm{Z})$.

$$I = \int_0^4 x^n \, dx = \lim_{r \to 0^+} \int_r^4 x^n \, dx$$

$$n = -1 \quad \Rightarrow \quad I = \lim_{r \to 0^+} \ln x \Big|_r^4 = \lim_{r \to 0^+} \left(\ln 4 - \ln r \right) = +\infty$$

$$n \neq -1 \quad \Rightarrow \quad I = \lim_{r \to 0^+} \int_0^4 x^n \, dx = \lim_{r \to 0^+} \frac{x^{n+1}}{u+1} \Big|_r^4 = \lim_{r \to 0^+} \left[\frac{4^{n+1}}{n+1} - \frac{r^{n+1}}{n+1} \right]$$

$$n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{4^{n+1}}{n+1}$$

$$n < -1 \quad \Rightarrow \quad I = \lim_{r \to 0^+} \left[\frac{4^{n+1}}{n+1} - \frac{r^{n+1}}{n+1} \right] = +\infty$$

Logo, converge para $n \geq 0$.

CAPÍTULO 6

6.2 – EXERCÍCIOS – pg. 246

Nos exercícios de 1 a 10, calcular a integral e, em seguida, derivar as respostas para conferir os resultados.

1. $\int \frac{dx}{x^3}$

$$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{2x^2}\right) = \frac{1}{x^3}$$

2. $\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) d$

$$\int (9t^2 + t^{\frac{-3}{2}})dt = 9.\frac{t^3}{3} + \frac{t^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} + c = 3t^3 - \frac{2}{\sqrt{t}} + c.$$

$$\frac{d}{dt}\left(3t^3 - \frac{2}{\sqrt{t}} + c\right) = 9t^2 - 2.-\frac{1}{2}.t^{\frac{-3}{2}} = 9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}}.$$

3. $\int (ax^4 + bx^3 + 3c)dx$

$$= a\frac{x^5}{5} + b\frac{x^4}{4} + 3cx + C.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{5}x^5 + \frac{b}{4}x^4 + 3cx + C\right) = \frac{a}{5}5x^4 + \frac{b}{4}4x^3 + 3c = ax^4 + bx^3 + 3c.$$

4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3} \right) dx$

$$= \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} . \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = 2\sqrt{x} + \frac{2}{15} x^{\frac{5}{2}} + c.$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x} + \frac{2}{15} x^{\frac{5}{2}} + c \right) = 2\frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} + \frac{2}{15} . \frac{5}{2} . x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3}$$

5. $\int (2x^2 - 3)^2 \, dx$

$$\int \left(4x^4 - 12x^2 + 9\right) dx = 4\frac{x^5}{5} - 12\frac{x^3}{3} + 9x + c = \frac{4}{5} x^5 - 4x^3 + 9x + c.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{5} x^5 - 4x^3 + 9x + c \right) = \frac{4}{5} 5x^4 - 12x^2 + 9 + c = 4x^4 - 12x^2 + 9 + c.$$

6. $\int \frac{dx}{sen^2 x}$

$$= \int sen^{-2} x \, dx$$

$$= \int \cos\sec^2 x \, dx = -\cot g \; x + c.$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\cot g \; x + c \right) = \cos\sec^2 x = \frac{1}{sen^2 x}.$$

7. $\int \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2y}} \right) dy$

$$= \int \left(\sqrt{2} \,.\, y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} . y^{\frac{-1}{2}} \right) dy = \frac{\sqrt{2}\; y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\; y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} . y^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2y} \left(\frac{2}{3} y - 1 \right) + c.$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\; y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} . y^{\frac{1}{2}} + c \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} . \frac{3}{2}\; y^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\; y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2y}}.$$

8. $\int \frac{\sqrt{2}\; dt}{3t^2 + 3} = \frac{\sqrt{2}}{3} arc\; tg\; t + c$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} arc\, tg\, t + c \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} . \frac{1}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{2}}{3t^2 + 3}.$$

9. $\int x^3 \sqrt{x}\; dx$

$$\int x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + c$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} + c \right) = \frac{2}{9} . \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}} = x^3 \sqrt{x}$$

10. $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} dx$

$$= \int \left(x + 2x^{-2} - x^{-4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\, \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + c$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + c \right) = \frac{2x}{2} - \frac{-2}{x^2} + \frac{-1 \,.\, 9x^2}{9x^6} = x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} = \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4}.$$

Nos exercícios de 11 a 31, calcular as integrais indefinidas.

11. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - arc\,tg\,x + c.$

12. $\int \frac{x^2+1}{x^2}dx$

$\int \left(1 + x^{-2}\right)dx = x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = x - \frac{1}{x} + c.$

13. $\int \frac{sen\,x}{\cos^2 x}dx$

$= \int \frac{sen\,x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}dx = \int tg\,x \,.\sec x\,dx = \sec x + c$

14. $\int \sqrt{\frac{9}{1-x^2}}dx$

$= \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3arc\ sen\,x + c.$

15. $\int \sqrt{\frac{4}{x^4 - x^2}}dx$

$\int \frac{2}{x\sqrt{x^2-1}}dx = 2arc\sec\,x + c.$

16. $\int \frac{8x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{x^2}dx$

$= \int \left(8x^2 - 9x + 6 - 2x^{-1} + x^{-2}\right)dx$

$= \frac{8x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 6x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c$

17. $\int\left(\frac{e^t}{2}+\sqrt{t}+\frac{1}{t}\right)dt$

$=\frac{1}{2}e^t+\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\ln|t|+c=\frac{1}{2}e^t+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\ln|t|+c.$

18. $\int\cos\theta\,.\,tg\,\theta\,d\theta$

$=\int\cos\theta\,.\,\frac{sen\,\theta}{\cos\theta}\,d\theta=\int sen\,\theta d\theta=-\cos\theta+c.$

19. $\int(e^x-e^{-x})dx$

$=\int 2sen\,h\,x\,dx=2\cosh x+c.$

20. $\int(t+\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}+\sqrt[4]{t}+\sqrt[5]{t})dt$

$=\frac{t^2}{2}+\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+c$

$=\frac{t^2}{2}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}+\frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}}+c$

21. $\int\frac{x^{-1/3}-5}{x}dx$

$=\int\left(x^{\frac{-4}{3}}-\frac{5}{x}\right)dx$

$=\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}-5\ln|x|+c=-3x^{-\frac{1}{3}}-5\ln|x|+c.$

22. $\int 2^t-\sqrt{2}e^t+\cosh t)dt$

$=\frac{2^t}{\ln 2}-\sqrt{2}\,e^t+senht+c.$

23. $\int\sec^2 x(\cos^3 x+1)dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} . \cos^3 x + \sec^2 x \right) dx = senx + tgx + c.$$

24. $\int \frac{dx}{(ax)^2 + a^2}$, $a \neq 0$, constante

$$= \int \frac{dx}{a^2x^2 + a^2} = \int \frac{dx}{a^2(x^2+1)} = \frac{1}{a^2} arc\,tg\, x + c$$

25. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

$$= \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = x - 2arc\,tg\, x + c.$$

26. $\int \sqrt[3]{8(t-2)^6 \left(t + \frac{1}{2} \right)^3}\, dt$

$$= \int 2(t-2)^2 \left(t + \frac{1}{2} \right) dt = \int 2\left(t^2 - 4t + 4\right)\left(t + \frac{1}{2} \right) dt$$

$$= 2\int \left(t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 4t^2 - 2t + 4t + 2 \right) dt = 2\int \left(t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 2t + 2 \right) dt$$

$$= 2\left(\frac{t^4}{4} - \frac{7}{2} . \frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2} + 2t \right) + c = \frac{t^4}{2} - \frac{7t^3}{3} + 2t^2 + 4t + c.$$

27. $\int \left(e^t - \sqrt[4]{16t} + \frac{3}{t^3} \right) dt$

$$= e^t - 2\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + 3\frac{t^{-2}}{-2} + c = e^t - \frac{8}{5} t^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{2} t^{-2} + c.$$

28. $\int \frac{\ln x}{x \ln x^2} dx$

$$= \int \frac{\ln x}{x\, 2\ln x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c.$$

29. $\int tg^2 x \cos ec^2 x\, dx$

$$= \int \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{sen^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = tg\, x + c.$$

30. $\int (x-1)^2(x+1)^2\,dx$

$= \int \left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2x+1\right)dx$

$= \int \left(x^4+2x^3+x^2-2x^3-4x^2-2x+x^2+2x+1\right)dx$

$= \int \left(x^4-2x^2+1\right)dx = \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x + c.$

31. $\int \frac{dt}{\left(n-\frac{1}{2}\right)t^n}$, *onde* $n \in z$

Se n = 0, $\int -2dt = -2t + c$

Se n = 1, $\int \frac{dt}{\left(n-\frac{1}{2}\right)t^n} = \int \frac{2\,dt}{t} = 2\ln|t| + c$

Se n ≠ 1, $\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int t^{-n}\,dt = \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{t^{1-n}}{(1-n)} + c$

32. Encontrar uma primitiva F, da função $f(x) = x^{2/3} + x,$ que satisfaça $F(1) = 1.$

$$F(x) = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + x\right)dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$F(1) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + c = 1$$

$$c = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{10-6-5}{10} = \frac{-1}{10}$$

$$F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{10}.$$

33. Determinar a função $f(x)$ tal que

$$\int f(x)dx = x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + c \right) = 2x + \frac{1}{2}(-sen2x).2 = 2x - sen2x.$$

34. Encontrar uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ que se anule no ponto $x = 2$.

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)dx = \int \left(x^{-2} + 1\right)dx = \frac{x^{-1}}{-1} + x + c = -\frac{1}{x} + x + c$$

$$F(2) = -\frac{1}{2} + 2 + c$$

$$c = \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + x - \frac{3}{2}$$

35. Sabendo que a função $f(x)$ satisfaz a igualdade.

$\int f(x)dx = sen\ x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c,$ determinar $f(\pi/4).$

$$\frac{d}{dx}\left(sen\, x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c \right) = \cos\ x - (x(-sen\, x) + \cos x) - \frac{1}{2}2x$$

$$= \cos x + x\, sen\, x - \cos x - x = x\ sen\, x - x = x(sen\, x - 1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(sen\frac{\pi}{4} - 1 \right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{4}.\frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-2\right)}{8}.$$

36. Encontrar uma função f tal que $f'(x) + sen\ x = 0$ e $f(0) = 2.$

$$f'(x) + sen\, x = 0$$

$$f'(x) = -senx$$

$$\int -sen\, x\, dx = +\cos x + c$$

$$f(x) = +\cos x + c$$

$$f(0) = \cos 0 + c = 2$$

$$c = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \quad f(x) = \cos x + 1.$$

6.4 – EXERCÍCIOS – pg. 250

Calcular as integrais seguintes usando o método da substituição.

1. $\int (2x^2 + 2x - 3)^{10}(2x+1)\,dx$

$Fazendo - se:$

$u = 2x^2 + 2x - 3$

$du = (4x+2)dx = 2(2x+1)dx$

$Temos:$

$$\int (2x^2 + 2x - 3)^{10}(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{11} + c.$$

2. $\int (x^3 - 2)^{1/7}\,x^2 dx$

$Fazendo - se:$

$u = x^3 - 2$

$du = 3x^2 dx$

$Temos:$

$$\int (x^3 - 2)^{1/7}\,x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{\left(x^3 - 2\right)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + c = \frac{7}{24}\left(x^3 - 2\right)^{\frac{8}{7}} + c.$$

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$

$$\int (x^2 - 1)^{-\frac{1}{5}}\,x\,dx$$

$Fazendo - se:$

$u = x^2 - 1$

$du = 2x\,dx$

$Temos:$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x^2 - 1}} = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2 - 1\right)^{4/5}}{\frac{4}{5}} + c = \frac{5}{8}(x^2 - 1)^{\frac{4}{5}} + c$$

4. $\int 5x\sqrt{4 - 3x^2}\,dx$

$= \int 5x(4-3x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \int 5x\left(4-3x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$

$Fazendo-se:$

$u = 4-3x^2$

$du = -6x\,dx$

$Temos:$

$$\int 5x\sqrt{4-3x^2}\,dx = 5.\frac{-1}{6}\frac{\left(4-3x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{-5}{9}\left(4-3x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

5. $\int \sqrt{x^2+2x^4}\,dx$

$= \int x\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{4}\frac{\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$ Fazendo: $u = 1+2x^2$, $du = 4x\,dx$

$= \frac{1}{6}\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c$

6. $\int (e^{2t}+2)^{1/3}e^{2t}dt$

$Fazendo-se:$

$u = e^{2t}+2$

$du = 2e^{2t}\,dt$

$Temos:$

$$\int (e^{2t}+2)^{1/3}e^{2t}dt = \frac{1}{2}\frac{\left(e^{2t}+2\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{8}\left(e^{2t}+2\right)^{\frac{4}{3}} + c.$$

7. $\int \frac{e^t dt}{e^t+4}$

$= \int \frac{du}{u} = \ln\left|e^t+4\right| + c$, sendo que $u = e^t+4$ e $du = e^t\,dt$.

8. $\int \frac{e^{1/x}+2}{x^2}dx$

$$= \int e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx + \int 2x^{-2} dx = -e^{\frac{1}{x}} + 2.\frac{x^{-1}}{-1} + c = -e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x} + c.$$

Considerando - se :

$u = e^{\frac{1}{x}}$

$du = e^{\frac{1}{x}}.\frac{-1}{x^2}.$

9. $\int tg\ x \sec^2 x\ dx$

$= \frac{tg^2 x}{2} + c$. considerando-se: $u = tg\ x$, $du = \sec^2 x\ dx$

10. $\int sen^4 x \cos\ x\ dx$

$= \frac{sen^5 x}{5} + c$ considerando-se: $u = sen\ x$, $du = \cos x\, dx$

11. $\int \frac{sen\ x}{\cos^5 x} dx$

$= \int \cos^{-5} x\ .\ sen\ x\ dx$

$= -\frac{\cos^{-4} x}{-4} = \frac{1}{4\cos^4 x} + c$ utilizando: $u = \cos x$, $du = -senxdx$

$= \frac{1}{4}\sec^4 x + c$

12. $\int \frac{2sen\ x - 5\cos x}{\cos x} dx$

$= 2\int \frac{sen\ x}{\cos x} - 5\int dx$

$= -2\ln|\cos x| - 5x + c$ utilizando: $u = \cos x$, $du = -senxdx$

13. $\int e^x \cos 2\ e^x dx$

$= \frac{1}{2} sen 2e^x + c.$

Considerando - se :

$u = 2e^x$

$du = 2e^x dx.$

14. $\int \frac{x}{2}\cos x^2\, dx$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{2} sen\, x^2 + c = \frac{1}{4} sen\, x^2 + c$

Considerando - se :

$u = x^2$

$du = 2x\, dx.$

15. $\int sen\,(5\theta - \pi) d\theta$

$= -\frac{1}{5}\cos(5\theta - \pi) + c.$

Considerando - se :

$u = 5\theta - \pi$

$du = 5 d\theta.$

16. $\int \frac{arc\ sen\ y}{2\sqrt{1-y^2}} dy$

$= \frac{1}{2}\frac{(arc\, sen\, y)^2}{2} + c = \frac{1}{4}(arc\, sen\, y)^2 + c.$

Considerando - se :

$u = arc\, sen\, y$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy.$

17. $\int \frac{2\sec^2\theta}{a + b\ tg\ \theta} d\theta$

$= 2.\frac{1}{b}\ln|a + b\, tg\theta| + C$

Considerando-se:

$u = a + b\, tg\theta$

$du = b.\sec^2\theta\, d\theta$

18. $\int \frac{dx}{16 + x^2}$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{16}4\, arc\,tg\,\frac{x}{4} + c = \frac{1}{4} arc\,tg\,\frac{x}{4} + c \text{ , utilizando: } \begin{matrix} u = \frac{x}{4} \\ du = \frac{1}{4}dx \end{matrix}$$

19. $\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 4}$

$$= \int \frac{dy}{(y-2)^2} = \int (y-2)^{-2} dy = \frac{(y-2)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{2-y} + c \text{ , utilizando: } \begin{matrix} u = y-2 \\ du = dy \end{matrix}$$

20. $\int \sqrt[3]{sen\,\theta}\cos\theta\, d\theta$

$$= \int (sen\,\theta)^{1/3}\cos\theta\, d\theta = \frac{(sen\,\theta)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} sen^{\frac{4}{3}}\theta + c.$$

21. $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$

$$\frac{1}{2}\frac{(\ln x^2)^2}{2} + c = \frac{1}{4}(\ln x^2)^2 + c = \frac{1}{4}4(\ln x)^2 + c = (\ln x)^2 + c.$$

Considerando - se :

$u = \ln x^2$

$du = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} dx.$

22. $\int (e^{ax} + e^{-ax})^2\, dx$

$$= \int \left(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}\right)^2 dx = \frac{1}{2a} e^{2ax} + 2x - \frac{1}{2a} e^{-2ax} + c$$

$$= \frac{1}{2a}\left(e^{2ax} - e^{-2ax}\right) + 2x + c = \frac{sen\,h\,2ax}{a} + 2x + c.$$

23. $\int \sqrt{3t^4 + t^2}\, dt$

$$= \int \sqrt{t^2\left(3t^2+1\right)}dt = \int t\left(3t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{6}\frac{\left(3t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{3}{2}.\left(3t^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{9}.\left(3t^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Considerando-se:

$$u = 3t^2 + 1$$
$$du = 6t\ dt$$.

24. $\int \frac{4\ dx}{4x^2+20x+34}$

$$= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{2}}\ arc\,tg\ \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\ arc\,tg\ \frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{3} + c.$$

25. $\int \frac{3\ dx}{x^2-4x+1}$

$$= \int \frac{3dx}{(x-2)^2-3} = -3\int \frac{\frac{dx}{3}}{\frac{3}{3}-\frac{(x-2)^2}{3}} = -3\,\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1-\frac{(x-2)^2}{3}}$$

$$= -\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x-2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{x-2}{\sqrt{3}}}\right| + c = \frac{-\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2-x}\right| + c.$$

Considerando-se:

$$u^2 = \frac{(x-2)^2}{3}$$
$$u = \frac{x-2}{\sqrt{3}}$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{3}}dx$$

Resposta alternativa:

$arc\ tg\ h\ \frac{x-2}{\sqrt{3}} \quad se \quad \left|\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right| < 1$

$arc\ \cot g\ h\ \frac{x-2}{\sqrt{3}} \quad se \quad \left|\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right| > 1.$

26. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+16}$

$= \frac{1}{4} arc\ tg\ \frac{e^x}{4} + c$

Considerando-se:

$u^2 = e^{2x}$

$u = e^x$

$du = e^{2x} dx$

27. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} dx$

$$= \int \frac{u}{u^2-3-1}.2u\ du = \int \frac{2u^2}{u^2-4} du = 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du = 2\left[u + 4\int \frac{du}{u^2-4}\right]$$

$$= 2u + 8\int \frac{\frac{-du}{4}}{\frac{4}{4} - \frac{u^2}{4}} = 2u - 2\int \frac{du}{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2} = 2u - 2.2\,\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\frac{u}{2}}{1-\frac{u}{2}}\right| + c$$

$$= 2u - 2\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + c = 2\sqrt{x+3} - 2\ln\left|\frac{2+\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x+3}}\right| + c.$$

Considerando-se:

$u^2 = x + 3$

$x = u^2 - 3$

$dx = 2u\ du$

28. $\int \frac{3dx}{x \ln^2 3x}$

$$= \int (\ln 3x)^{-2} \frac{3dx}{x} = 3\frac{(\ln 3x)}{-1} + c = \frac{-3}{\ln 3x} + c.$$

Considerando-se:

$u = \ln 3x$

$du = \frac{3}{3x} dx$

29. $\int (sen\, 4x + \cos 2\pi) dx$

$$= \int sen\ 4x\ dx + \cos 2\pi \int dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + x \cos 2\pi + c.$$

30. $\int 2^{x^2+1} x\ dx$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^{x^2+1}}{\ln 2} + c = \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + c.$$

Considerando-se:

$u = x^2 + 1$

$du = 2x\ dx$

31. $\int x\, e^{3x^2} dx$

$$= \frac{1}{6} e^{3x^2} + c$$

Considerando-se:

$u = 3x^2$

$du = 6x\ dx$

32. $\int \frac{dt}{(2+t)^2}$

$$= \int (2+t)^{-2} = \frac{(2+t)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{2+t} + c\,.$$

Considerando-se:

$u = 2 + t$

$du = dt$

33. $\int \frac{dt}{t \ln t}$

$= \ln|\ln t| + c.$

Considerando-se: $u = \ln t$

$du = \frac{dt}{t}$

34. $\int 8x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

$= 8\,\frac{-1}{4}\,\frac{\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{-4}{3}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c.$

Considerando-se:

$u = 1-2x^2$

$du = -4x\,dx$

35. $\int (e^{2x}+2)^5 e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(e^{2x}+2\right)^6}{6} + c = \frac{1}{12}\left(e^{2x}+2\right)^6 + c.$

Considerando-se:

$u = e^{2x}+2$

$du = 2e^{2x}dx$

36. $\int \frac{4t\,dt}{\sqrt{4t^2+5}}$

$= \int \left(4t^2-5\right)^{-\frac{1}{2}} 4t\,dt$

$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(4t^2+5\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{4t^2+5} + c.$

Considerando-se:

$u = 4t^2+5$

$du = 8t\,dt$

37. $\int \frac{\cos x}{3 - sen\ x} dx$

$= -\ln|3 - sen\, x| + c$

Considerando-se:

$u = 3 - sen\ x$

$du = -\cos x\ dx$

38. $\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5}$

$= 2\frac{\left(1+\sqrt{v}\right)^{-4}}{-4} + c$

$= -\frac{1}{2\left(1+\sqrt{v}\right)^4} + c$

Considerando-se:

$u = 1 + \sqrt{v}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{v}} dv$

39. $\int x^2\sqrt{1+x}dx$

Considerando-se:

$1 + x = u^2$

$x = u^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 2u\ du$

$\int x^2\sqrt{1+x}dx = \int \left(u^2-1\right)^2\ u\ 2u\ du = \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) 2u^2\ du$

$= \int \left(2u^6 - 4u^4 + 2u^2\right) du = 2\frac{u^7}{7} - 4\frac{u^5}{5} + 2\frac{u^3}{3} + c$

$= \frac{2}{7}\sqrt{(1+x)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(1+x)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + c$

$= \frac{2}{7}(1+x)^3\ \sqrt{1+x} - \frac{4}{5}(1+x)^2\sqrt{1+x} + \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + c.$

40. $\int x^4 e^{-x^5} dx$

$$= \frac{-1}{5} e^{-x^5} + c$$

Considerando-se:

$u = -x^5$

$du = -5x^4$

41. $\int t \cos t^2 dt$

$= \frac{1}{2} sen\, t^2 + c$, utilizando: $\begin{matrix} u = t^2 \\ du = 2tdt \end{matrix}$

42. $\int 8x^2 \sqrt{6x^3 + 5}\, dx$

$$= 8 \frac{1}{18} \frac{\left(6x^3 + 5\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{9} \frac{2}{3} \left(6x^3 + 5\right)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{8}{27} \left(6x^3 + 5\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Considerando-se:

$u = 6x^3 + 5$

$du = 18x^2 dx$

43. $\int sen^{1/2}\, 2\theta \cos 2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(sen\, 2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \left(sen 2\theta\right)^{3/2} + c\,.$$

Considerando-se:

$u = sen\, 2\theta$

$du = 2 \cos 2\theta\, d\theta$

44. $\int \sec^2 (5x + 3) dx$

$$= \frac{1}{5} tg\,(5x + 3) + c\,.$$

Considerando-se:

$u = 5x + 3$

$du = 5\,dx$

45. $\int \frac{sen\ \theta\ d\theta}{(5 - \cos\theta)^3}$

$= \frac{(5 - \cos\theta)^{-2}}{-2} + c\ .$

Considerando-se:

$u = 5 - \cos\theta$

$du = sen\,\theta\ d\theta$

46. $\int \cot g\ u\ du$

$= \int \frac{\cos u}{sen\ u} du = \ln |\ sen\ u\ | + c$

Considerando-se: $u = sen\ u$

$du = \cos\ u\ du$

47. $\int (1 + e^{-at})^{3/2}\ e^{-at}\ dt, \quad a > 0$

$= \frac{-1}{a} \frac{\left(1 + e^{-at}\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = -\frac{2}{5a}\ \left(1 + e^{-at}\right)^{\frac{5}{2}} + c.$

Considerando-se:

$u = 1 + e^{-at}$

$du = e^{-at}\ (-a)dt$

48. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

$= 2sen\sqrt{x} + c\ .$

Considerando-se:

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

49. $\int t\sqrt{t-4}\,dt$

$$= \int (u^2+4).u\;2u\;du = \int (2u^4+8u^2)du = 2\frac{u^5}{5} + 8\frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(t-4)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(t-4)^3} + c$$

$$= \frac{2}{5}(t-4)^2\sqrt{t-4} + \frac{8}{3}(t-4)\sqrt{t-4} + c$$

Considerando-se:

$t-4 = u^2$

$t = u^2+4 \quad \Rightarrow \quad dt = 2u\;du$

50. $\int x^2\,(sen\;2x^3+4x)\,dx$

$$= \int x^2 sen\;2x^3 dx + \int 4x^3 dx = \frac{-1}{6}\cos 2x^3 + 4\frac{x^4}{x} + c = \frac{-1}{6}\cos 2x^3 + x^4 + c\,,$$

sendo que na primeira integral usamos:

$u = 2x^3$

$du = 6x^2 dx$

6.6 – EXERCÍCIOS – pg. 255

Resolver as seguintes integrais usando a técnica de integração por partes.

1. $\int x\ sen\ 5x\ dx$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = sen5x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int sen5x\,dx = \frac{-1}{5}\cos 5x$$

$$I = x\frac{-1}{5}\cos 5x - \int \frac{-1}{5}\cos 5x\,dx$$

$$= \frac{-x}{5}\cos 5x + \frac{1}{5}.\frac{1}{5}sen5x + c$$

$$= \frac{-x}{5}\cos 5x + \frac{1}{25}sen5x + c$$

2. $\int \ln(1-x)dx$

$$u = \ln(1-x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-1}{1-x}dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = \ln(1-x)x - \int x\frac{-1}{1-x}dx$$

$$I = x\ln(1-x) + \int\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$I = x\ln(1-x) - x - \ln(1-x) + c$$

$$I = (x-1)\ln(1-x) - x + c$$

3. $\int t\ e^{4t}dt$

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{4t}dt \quad \Rightarrow \quad v = \int e^{4t}dt = \frac{1}{4}e^{4t}$$

$$I = t\,\frac{1}{4}\,e^{4t} - \int \frac{1}{4}\,e^{4t}\,dt$$
$$= \frac{t}{4}\,e^{4t} - \frac{1}{4}.\frac{1}{4}\,e^{4t} + c$$
$$= e^{4t}\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{16}\right) + c$$

4. $\int (x+1)\cos 2x dx$

$$u = x+1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \cos 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}sen\,2x$$

$$I = (x+1)\frac{1}{2}sen\,2x - \int \frac{1}{2}sen\,2x\,dx$$
$$= \frac{x+1}{2}sen\,2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

5. $\int x \ln 3x\,dx$

$$u = \ln 3x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{3}{3x}dx$$
$$dv = xdx \quad \Rightarrow \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$I = (\ln 3x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln 3x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + c$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln 3x - \frac{1}{2}\right) + c$$

6. $\int \cos^3 x\,dx$

$$u = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad du = -2\cos x.sen\,x\,dx$$
$$dv = \cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x\,dx = sen\,x$$

$$I = \cos^2 x.sen\,x - \int sen\,x\,(-2)\cos x\,senx\,dx$$

$$= \cos^2 x.sen\,x + 2\int sen^2\,x\cos x\,dx$$

$$= \cos^2 x.sen\,x + 2\,\frac{sen^3\,x}{3} + c$$

7. $\int e^x \cos\frac{x}{2}\,dx$

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x dx$$

$$dv = \cos\frac{x}{2}dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos\frac{x}{2}dx = 2sen\frac{x}{2}$$

$$I = e^x\ 2\,sen\frac{x}{2} - \int 2\,sen\frac{x}{2}\,e^x dx$$

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x dx$$

$$dv = sen\frac{x}{2}du \quad \Rightarrow \quad v = -2\cos\frac{x}{2}$$

$$I = 2e^x\,sen\frac{x}{2} - 2\left[e^x(-2)\cos\frac{x}{2} - \int -2\cos\frac{x}{2}e^x dx\right]$$

$$= 2e^x sen\frac{x}{2} + 4e^x\cos\frac{x}{2} - 4I$$

$$5I = 2e^x sen\frac{x}{2} + 4e^x\cos\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{5}\left(2e^x sen\frac{x}{2} + 4e^x\cos\frac{x}{2}\right) + c$$

8. $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \sqrt{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$I = (\ln x).\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}.x^{\frac{3}{2}} + c$$

9. $\int \cos ec^3 x\,dx$

$$u = \cos ec\,x \quad \Rightarrow \quad du = -\cos ec\,x\,.\cot g\,x\,.\,dx$$

$$dv = \cos ec^2 x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos ec^2\,x\,dx = -\cot g\,x$$

$$I = \cos ec\,x\,.(-\cot g\;x) - \int -\cot g\,x.(-\cos ec\,x).\cot g\,x\,dx$$

$$= -\cos ec\,x\,.\cot g\;x - \int \cot g^2\,x.\cos ec\,x\,dx$$

$$= -\cos ec\,x\,.\cot g\;x - \int \frac{\cos^2 x}{sen^2\,x}\,.\,\frac{1}{sen\,x}\,dx$$

$$= -\cos ec\,x\,.\cot g\;x - \int \frac{\cos^2 x}{sen^3\,x}\,dx$$

$$= -\cos ec\,x\,.\cot g\;x - \int sen^{-3}\,x\,.\cos x\,.\cos x\,dx$$

$$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -sen\,x\,dx$$

$$dv = sen^{-3}\,x\cos dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{sen^{-2}\,x}{-2}$$

$$I = -\cos ec\,x\,.\cot g\;x - \left[\cos x\,.\,\frac{sen^{-2}\,x}{-2} - \int \frac{sen^{-2}\,x}{-2}\,.(-sen\,x)\,dx\right]$$

$$I = -\cos ec\,x\,.\cot g\;x + \frac{\cos x}{2\,sen^2\,x} + \frac{1}{2}\int \cos ec\;x\,dx$$

$$I = -\cos ec\,x\,.\cot g\;x + \frac{\cos x}{2\,sen^2\,x} + \frac{1}{2} + c$$

$$I = -\cos ec\,x\,.\cot g\;x + \frac{1}{2}\cot g\;x\,.\cos ec\;x + \frac{1}{2}\ln\left|\cos ec\,x - \cot g\,x\right| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cos ec\,x\,.\cot g\;x + \frac{1}{2}\ln\left|\cos ec\,x - \cot g\,x\right| + c$$

10. $\int x^2\,\cos a\;x\,dx$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$dv = \cos ax\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\,sen\,ax$$

$$I = x^2 \,.\frac{1}{a}sen\,ax - \int \frac{1}{a}sen\,ax\,.\,2x\,dx$$

$$I = \frac{x^2}{a}sen\,ax - \frac{2}{a}\int xsen\,ax\;\;dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = sen\;ax\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{-1}{a}\cos ax$$

$$I = \frac{x^2}{a}sen\,ax - \frac{2}{a}\left[x\,.\frac{-1}{a}\cos\,ax - \int \frac{-1}{a}\cos ax\,dx \right]$$

$$= \frac{x^2}{a}sen\,ax + \frac{2x}{a^2}\cos\,ax - \frac{2}{a^2}sen\;ax\,\frac{1}{a} + c$$

$$= \frac{x^2}{a}sen\,ax + \frac{2x}{a^2}\cos\,ax - \frac{2}{a^3}sen\;ax + c$$

11. $\int x\cos ec^2\;x\,dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos\sec^2 x\,dx \Rightarrow \quad v = \int \cos\sec^2 x\,dx$$

$$v = -\cot g\;x$$

$$I = -x\,.\cot g - \int -\cot g\;.\,dx$$

$$= -x\,.\cot g + \ln\left|sen\;x\right| + c$$

12. $\int arc\,\cot g\;2x\,dx$

$$u = arc\,\cot g\;2x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-2}{1+4x^2}dx\,,$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = arc\,\cot g\;2x\;x - \int x\,\frac{-2}{1+4x^2}dx$$

$$= x\;arc\,\cot g\;2x + 2\int \frac{x\,dx}{1+4x^2}$$

$$= x\;arc\,\cot g\;2x + \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + c$$

13. $\int e^{ax}\ sen\ bx\ dx$

$$u = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad du = a\,e^{ax}\ dx$$

$$dv = sen\ bx\ dx \quad \Rightarrow \quad v = \int sen\ bx\ dx = \frac{-1}{b}\cos bx$$

$$I = e^{ax}\ \frac{-1}{b}\cos bx - \int -\frac{1}{b}\cos bx\ a\,e^{ax}\ dx$$

$$I = \frac{-e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\ dx$$

$$u = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad du = a\ e^{ax}dx$$

$$dv = \cos bx\ dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{b}\ sen\ bx$$

$$I = \frac{-e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\left[e^{ax}\ .\frac{1}{b}sen\ bx - \int \frac{1}{b}sen\ bx\ a\ e^{ax}\ dx \right]$$

$$I = \frac{-e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\ sen\ bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

$$I + \frac{a^2}{b^2}I = \frac{-e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\ sen\ bx$$

$$I = \frac{b^2}{b^2 + a^2}\left(\frac{-e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\ sen\ bx \right)$$

$$I = \frac{-b\ e^{ax}\cos bx + a\ e^{ax}\ sen\ bx}{a^2 + b^2} + c$$

14. $\int \frac{\ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}}\ dx$

$$u = \ln\left(ax+b\right) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{a}{ax+b}\ dx$$

$$dv = \left(ax+b\right)^{-\frac{1}{2}}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{a}\frac{\left(ax+b\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$I = \ln(ax+b).\frac{2}{a}\sqrt{ax+b} - \int \frac{2}{a}(ax+b)^{\frac{1}{2}}\ \frac{a}{ax+b}dx$$

$$I = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}\ \ln(ax+b) - 2\int (ax+b)^{-\frac{1}{2}}\ dx$$

$$I = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}\ \ln(ax+b) - 2\,\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$I = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}\ \ln(ax+b) - \frac{4}{a}\sqrt{ax+b} + c$$

15. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$dv = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{-1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$I = x^2.\frac{-1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{-1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ 2x\,dx$$

$$I = \frac{-1}{3}x^2\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$$

$$I = \frac{-1}{3}x^2\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + c$$

16. $\int \ln^3 2x\,dx$

$$u = \ln^3 2x \quad \Rightarrow \quad du = 3\ln^2 2x\,\frac{2}{2x}dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = \ln^3 2x\,x - \int x.\ln^2 2x\,\frac{dx}{x}$$

$$I = x\ln^3 2x - 3\int \ln^2 2x\,dx$$

$$u = \ln^2 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2\ \ln 2x\,\frac{2}{2x}\,dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = x \ln^3 2x - 3\left[\ln^2 2x \,.x - \int x\, 2 \ln 2x \frac{dx}{x}\right]$$

$$I = x \ln^3 2x - 3\left[x \ln^2 2x - 2\int \ln 2x \, dx\right]$$

$$u = \ln 2x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2}{2x}dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = x \ln^3 2x - 3x \ln^2 2x + 6\left[\ln 2x \, x - \int x \frac{dx}{x}\right]$$

$$I = x \ln^3 2x - 3x \ln^2 2x + 6x \ln 2x - 6x + c$$

17. $\int arc\ tg\ a\ x\, dx$

$$u = arc\ tg\ ax \quad \Rightarrow \quad du = \frac{a}{1 + a^2x^2}dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = arc\ tg\ ax\ .\ x - \int x \frac{a}{1 + a^2x^2}\, dx$$

$$I = x\ arc\ tg\ ax - \frac{1}{2a} \ln\left|1 + a^2x^2\right| + c$$

18. $\int x^3 sen\ 4x\, dx$

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2 dx$$

$$dv = sen\ 4x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{-1}{4}\cos 4x$$

$$I = x^3 \frac{-1}{4}\cos 4x - \int \frac{-1}{4}\cos 4x \ 3x^2 \, dx$$

$$= \frac{-x^3}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}\int x^2 \cos 4x \, dx$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx$$

$$dv = \cos 4x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{4} sen\ 4x$$

$$I = \frac{-x^3}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}\int x^2 \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{-x^3}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}\left[x^2.\frac{1}{4} sen4x - \int \frac{1}{4} sen4x.2x dx \right]$$

$$= \frac{-x^3}{4}\cos 4x + \frac{3}{16}x^2 sen4x - \frac{3}{8}\int x sen4x dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = sen\ 4x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{4}\cos 4x$$

$$I = \frac{-x^3}{4}\cos 4x + \frac{3}{16}x^2 sen4x - \frac{3}{8}\left[x.\frac{-1}{4}\cos 4x - \int \frac{-1}{4}\cos 4x dx \right]$$

$$= \frac{-x^3}{4}\cos 4x + \frac{3}{16}x^2 sen4x + \frac{3}{32}x\cos 4x - \frac{3}{128} sen4x + c$$

19. $\int (x-1)e^{-x} dx$

$$= \int x e^{-x} dx - \int e^{-x} dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$$

$$I = -x\, e^{-x} - \int -e^{-x} dx - \int e^{-x} dx$$

$$= -x\, e^{-x} + c$$

20. $\int x^2 \ln x\, dx$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$I = \ln x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + c$$

21. $\int x^2\ e^x\ dx$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$
$$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$
$$I = x^2 e^x - \int e^x 2x\,dx$$
$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^x du \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$
$$I = x^2 e^x - 2\left[x\,e^x - \int e^x dx\right]$$
$$= x^2 e^x - 2x\,e^x + 2e^x + c$$

22. $\int arc\ sen \frac{x}{2} dx$

$$u = arc\ sen \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx$$
$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$
$$I = arc\ sen \frac{x}{2}\, x - \int x \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx$$
$$= x\ arc\ sen \frac{x}{2} + \frac{1}{2} 2 \frac{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= x\ arc\ sen \frac{x}{2} + 2\left(\frac{4-x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + c$$
$$= x\ arc\ sen \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + c$$

23. $\int (x-1)\sec^2 x\,dx$

$$u = x-1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \sec^2 x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = tg\ x$$

$$I = (x-1)\ tg\ x - \int tg\ x\ dx$$
$$= (x-1)tg\ x + \ln|\cos x| + c$$

24. $\int e^{3x}\cos 4x\ dx$

$$u = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad du = 3\,e^{3x}dx$$
$$dv = \cos 4x dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}sen\ 4x$$

$$I = e^{3x}\ \frac{1}{4}sen\ 4x - \int \frac{1}{4}sen\ 4x\ 3e^{3x}dx$$

$$u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x}dx$$
$$dv = sen4x \Rightarrow v = \frac{-1}{4}\cos 4x$$

$$I = \frac{e^{3x}}{4}sen\ 4x - \frac{3}{4}\left[e^{3x}\ .\frac{-1}{4}\cos 4x - \int \frac{-1}{4}\cos 4x\ 3e^{3x}dx\right]$$

$$I = \frac{e^{3x}}{4}sen\ 4x + \frac{3}{16}\,e^{3x}\cos 4x - \frac{9}{16}I$$
$$I + \frac{9}{16}I = \frac{4e^{3x}sen\ 4x + 3e^{3x}\cos 4x}{16}$$
$$I = \frac{4e^{3x}sen\ 4x + 3e^{3x}\cos 4x}{25} + c$$

25. $\int x^n \ln x\ dx, \quad n \in N$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = x^n dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$I = \ln x\ \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\ .\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\,\frac{x^{x+1}}{n+1} + c$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{x+1}}{(n+1)^2} + c$$

26. $\int \ln(x^2+1)dx$

$$u = \ln(x^2+1) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \ln(x^2+1)\,x - \int x\,\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\left(x - arc\ tg\ x\right) + c$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2arc\ tg\ x + c$$

27. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$

$$u = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,2x}{x + \sqrt{1+x^2}}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)x - \int x\,\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}dx$$

$$I = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + c$$

28. $\int x\ arc\ tg\ x\ dx$

$$u = arc\ tg\ x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$dv = x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = arc\ tg\ x\ \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} arc\ tg\ x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arc\, tg\ x + c$$

$$I = \frac{x^2+1}{2} arc\ tg\ x - \frac{1}{2}x + c$$

29. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$

$$u = x^4 \quad \Rightarrow \quad du = 4x^3 dx$$

$$dv = xe^{x^2} dx \Rightarrow v = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$I = x^4 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 4x^3 dx$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx$$

$$dv = xe^{x^2} dx \Rightarrow v = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$I = x^4 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - 2\left[x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2xdx \right]$$

$$I = x^4 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - 2x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} + e^{x^2} + c$$

$$I = \frac{1}{2} x^4 e^{x^2} - x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + c.$$

30. $\int x \cos^2 x\, dx$

$$\int x \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int x\, dx + \frac{1}{2}\int x \cos 2x\, dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos 2x \Rightarrow v = \frac{1}{2} sen\ 2x$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left[x\,\frac{1}{2} sen\, 2x - \int \frac{1}{2} sen\, 2x\, dx \right]$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x\, sen\, 2x - \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(-\cos 2x\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x\, sen\, 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c$$

31. $\int (x+3)^2\, e^x\, dx$

$$u = (x+3)^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2(x+3)\,dx$$

$$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = (x+3)^2\, e^x - \int e^x\, 2(x+3)\, dx$$

$$u = x+3 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = (x+3)^2\, e^x - 2\left[(x+3)\, e^x - \int e^x\, dx\right]$$

$$= (x+3)^2\, e^x - 2(x+3)\, e^x + 2\, e^x + c$$

$$= e^x\left[x^2 + 6x + 9 - 2x - 6 + 2\right] + c$$

$$= e^x\left[x^2 + 4x + 5\right] + c$$

32. $\int x\sqrt{x+1}\, dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sqrt{x+1}dx \Rightarrow v = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$I = x\,\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c$$

33. $\int \cos(\ln x)\, dx$

$$u = \cos(\ln x) \quad \Rightarrow \quad du = -sen\,(\ln x)\frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \cos(\ln x)x + \int x\, sen(\ln x)\,\frac{dx}{x}$$

$$u = sen(\ln x) \Rightarrow du = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = x\cos(\ln x) + sen(\ln x)x - \int x\cos(\ln x)\,\frac{du}{x}$$

$$I = x\cos(\ln x) + x\, sen(\ln x) - I$$

$$2I = x\cos(\ln x) + x\, sen(\ln x)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\, sen(\ln x)\right) + c$$

34. $\int arc\cos x\, dx$

$$u = arc\cos x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = x\, arc\cos x - \int x\,\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\, arc\cos x - \sqrt{1-x^2} + c$$

35. $\int \sec^3 x\, dx$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x\, tg\, x\, dx$$

$$dv = \sec^2 x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = tg\, x$$

$$I = \sec x.tg\, x - \int tg^2 \sec x\ dx$$

$$= \sec x.tg\, x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$

$$= \sec x.tg\, x - \int \sec^3 x + \int \sec x\, dx$$

$$I = \sec x.tg\, x - I + \ln\left|\sec x + tg\, x\right| + c$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\sec x\, .tg\, x + \ln\left|\sec x + tg\, x\right|\right] + c$$

Obs.

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\left(\sec x + tg\ x\right)}{\sec x + tg\ x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x.tg\ x}{\sec x + tg\ x} dx = \ln\left|\sec x + tg\ x\right| + c,$$

onde utilizamos :

$u = \sec + tg\ x$

$du = \sec .tg\ x + \sec^2 x$

36. $\int \frac{1}{x^3} e^{1/x} dx$

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2} dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx = -e^{1/x}$$

$$I = -\frac{1}{x} e^{1/x} - \int -e^{1/x} \frac{-1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x} e^{1/x} + e^{1/x} + c$$

7.4 – EXERCÍCIOS – pg. 309

Nos exercícios de 1 a 35, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Fazendo

$u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Temos:

$I = -2\cos\sqrt{x} + C$.

2. $\int \cos x \, cox\left(sen\, x\right) dx$

Fazendo:

$u = sen\, x$

$du = \cos x\, dx$

Temos que:

$\int \cos x \, cox\left(sen\, x\right) dx = sen\left(sen\, x\right) + C$.

3. $\int \frac{sen\, 2x}{\cos x}\, dx$

Temos:

$I = \int \frac{2\, sen\, x \cos x}{\cos x}\, dx$

$= 2\int sen\, x\, dx = -2\cos x + C$

4. $\int x\, tg\left(x^2 + 1\right) dx$

Fazendo:

$u = x^2 + 1$

$du = 2xdx$

Temos:

$I = \frac{1}{2}\int tg\, u\, du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{sen\, u}{\cos u} du = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos u\right| + C$

$= -\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(x^2 + 1\right)\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\sec\left(x^2 + 1\right)\right| + C.$

5. $\int \frac{\cot g\left(1/x\right)}{x^2} dx$

Fazendo:

$u = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad du = -\frac{1}{x^2} dx$

Temos:

$I = -\int \cot\, g\ u\ du$

$= -\int \frac{\cos u}{sen\ u}\, du$

$= -\ln \left| sen\ u \right| + C$

$= -\ln \left| sen\ 1/x \right| + C.$

6. $\int \sec\left(x+1\right) dx$

Fazendo:

$u = x+1 \quad \rightarrow \quad du = dx$

Temos:

$I = \int \frac{\sec u\ \left(\sec u + tg\ u\right)}{\sec u + tg\ u} du$

$= \int \frac{\sec^2 u + \sec u\ .\ tg\ u}{\sec u + tg\ u} du.$

Considerando:

$u^* = \sec u + tg\ u$

$du^* = \left(\sec^2 u + \sec u\ .\ tg\ u\right) du$

Finalizamos:

$I = \ln \left| \sec u + tg\ u \right| + C$

$= \ln \left| \sec\left(x+1\right) + tg\ \left(x+1\right) \right| + C.$

7. $\int sen(wt+\theta)\, dt$

Fazendo:

$u = wt + \theta \quad \rightarrow \quad du = wdt$

Temos:

$I = -\frac{1}{w} \cos\left(wt+\theta\right) + C.$

8. $\int x \cos ec\ x^2\ dx$

Fazendo:

$u = x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2xdx$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int \cos ec\ u\ du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\cos ec\ u - \cot g\ u\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\cos ec\ x^2 - \cot\ g\ x^2\right| + C.$$

9. $\int \cos\ x\ .\ tg\ (sen\ x)\, dx$

Fazendo:

$u = sen\ x \quad \rightarrow \quad du = \cos\ x\ dx$

Temos:

$$I = \int tg\ u\ du$$

$$= -\ln\left|\cos\ u\right| + C$$

$$= -\ln\left|\cos\ (sen\ x)\right| + C$$

$$= \ln\left|\sec\ (sen\ x)\right| + C.$$

10. $\int sen^3(2x+1)\, dx$

Fazendo:

$u = 2x + 1$

$du = 2dx$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int sen^3 u\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int sen\ u\ (1 - \cos^2 u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int (sen\ u - \cos^2 u\ sen\ u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos\ u + \frac{\cos^3 u}{3}\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos\ (2x+1) + \frac{1}{3}\cos^3(2x+1)\right) + C.$$

11. $\int \cos^5(3-3x)\, dx$

Fazendo:

$u = 3 - 3x \quad \rightarrow \quad du = -3dx$

Temos:

$$I = -\frac{1}{3}\int \cos^5 u\ du$$

$$= -\frac{1}{3}\int \cos^4 u \cos u\ du$$

$$= -\frac{1}{3}\int \left(\cos u - 2sen^2 u \cos u + sen^4 u \cos u\right) du$$

$$= -\frac{1}{3}\left(senu - \frac{2}{3} sen^3 u + \frac{1}{5} sen^5 u \right) + C$$

$$= -\frac{1}{3} sen\,(3-3x) + \frac{2}{9}\, sen^3 (3-3x) - \frac{1}{15} sen^5\,(3-3x) + C.$$

12. $\int 2x\ sen^4\left(x^2 - 1\right) dx$

Fazendo:

$u = x^2 - 1$

$du = 2xdx$

Temos:

$$\int sen^4 u\ du = \int \left(sen^2 u\right)^2 du$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right)^2 du$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2u + \cos^2 2u\right) du$$

$$= \frac{1}{4}u - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, sen\ 2u + \frac{1}{4}\int \cos^2\ 2u\ du$$

$$= \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}\, sen\ 2u + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4\,u}{2}\ du$$

$$= \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}\, sen\ 2u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\, sen\ 4u + C$$

$$= \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}\, sen\ 2u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{32}\, sen\ 4u + C$$

$$= \frac{3}{8}u - \frac{1}{4}\, sen\ 2u + \frac{1}{32}\, sen\ 4u + C$$

$$= \frac{3}{8}\left(x^2 - 1\right) - \frac{1}{4}\, sen\ 2\left(x^2 - 1\right) + \frac{1}{32}\, sen\ 4\left(x^2 - 1\right) + C$$

13. $\int e^{2x} \cos^2\left(e^{2x} - 1\right) dx$

Fazendo:

$u = e^{2x} - 1$

$du = 2\, e^{2x} dx$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int \cos^2 u \; du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\, u + \frac{1}{4}\, sen\; 2u\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\, sen\; 2u + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 1\right) + \frac{1}{8} sen\left(2\, e^{2x} - 2\right) + C.$$

14. $\int sen^3\; 2\theta \cos^4\; 2\theta \; d\theta$

Fazendo:

$u = 2\theta \quad \rightarrow \quad du = 2d\theta$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int sen^3 u \cos^4 u \; du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1 - \cos^2 u\right) sen\; u \cos^4 u \; du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos^4 u \; sen\; u - \cos^6 u \; sen\; u\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos^5 u}{5} + \frac{\cos^7 u}{7}\right] + C$$

$$= \frac{-1}{10}\cos^5 2\theta + \frac{1}{14}\cos^7 2\theta + C.$$

15. $\int sen^3\left(1 - 2\theta\right)\cos^3\left(1 - 2\theta\right) d\theta$

Fazendo:

$u = 1 - 2\theta$

$du = -2d\theta$

Temos:

$$I = -\frac{1}{2}\int sen^3 u \cos^3 u \, du$$

$$= -\frac{1}{2}\int sen^3 u\left(1 - sen^2 u\right)\cos u \, du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(sen^3 u \cos u - sen^5 u \cos u\right) du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{sen^4 u}{4} - \frac{sen^6 u}{6}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{8} sen^4 u + \frac{1}{12} sen^6 u + C$$

$$= -\frac{1}{8} sen^4(1 - 2\theta) + \frac{1}{12} sen^6(1 - 2\theta) + C.$$

Outra maneira

$$I = -\frac{1}{2}\int sen^3 u \cos^3 u \, du$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(1 - \cos^2 u\right) sen\, u \cos^3 u \, du$$

$$= \frac{1}{8}\cos^4 u - \frac{1}{12}\cos^6 u + C$$

$$= \frac{1}{8}\cos^4(1 - 2\theta) - \frac{1}{12}\cos^6(1 - 2\theta) + C$$

16. $\int sen^{19}(t-1)\cos\,(t-1)\, dt$

Fazendo:

$u = t - 1$

$du = dt$

Temos:

$$I = \int sen^{19} u \cos u \, du$$

$$= \frac{sen^{20} u}{20} + C = \frac{sen^{20}(t-1)}{20} + C.$$

17. $\int \frac{1}{\theta} tg^3(\ln \theta) d\theta$

Fazendo:

$u = \ln \theta$

$du = \dfrac{d\theta}{\theta}$

Temos:

$$I = \int tg^3 u \, du$$

$$= \int tgu\left(\sec^2 u - 1\right)du = \frac{1}{2} tg^2 u - \int tg\, u \, du$$

$$= \frac{1}{2} tg^2 u + \ln\left|\cos u\right| + C$$

$$= \frac{1}{2} tg^2 \left(\ln \theta\right) + \ln\left|\cos\left(\ln \theta\right)\right| + C.$$

18. $\int tg^3 x \cos^4 x \, dx$

Temos:

$$I = \int \frac{sen^3 x}{\cos^3 x} . \cos^4 x \, dx$$

$$= \int sen^3 x \cos x \, dx$$

$$= \frac{sen^4 x}{4} + C.$$

19. $\int \cos^4 x \, dx$

Temos:

$$I = \frac{1}{4} \cos^3 x \, sen \, x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cos^3 x \, sen \, x + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} \cos x \, sen \, x + \frac{1}{2} \int dx\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cos^3 x \, sen \, x + \frac{3}{8} \cos x \, sen \, x + \frac{3}{8} x + C.$$

20. $\int tg^4 x \, dx$

Temos:

$$I = \int \frac{sen^4 x}{\cos^4 x} dx$$
$$= \int \frac{sen^2 x \left(1 - \cos^2 x\right)}{\cos^4 x} dx$$
$$= \int \frac{sen^2 x}{\cos^4 x} dx - \int \frac{sen^2 x \cos^2 x}{\cos^4 x} dx$$
$$= \int \frac{sen^2 x}{\cos^4 x} dx - \int \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int tg^2 x \sec^2 x \, dx - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \frac{tg^3 x}{3} - \int \sec^2 x \, dx + \int dx$$
$$= \frac{tg^3 x}{3} - tg\ x + x + C.$$

21. $\int \frac{sen^2 x}{\cos^4 x} dx$

Temos:

$$I = \int tg^2 x \sec^2 x \, dx$$
$$= \frac{tg^2 x}{3} + C.$$

22. $\int 15 sen^5 x \, dx$

Temos:

$$I = 15 \int \left(sen^2 x\right)^2 sen\ x \, dx$$
$$= 15 \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 sen\ x \, dx$$
$$= 15 \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) sen\ x \, dx$$
$$= 15 \left[-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x \right] + C$$
$$= -15 \cos x + 10 \cos^3 x - 3 \cos^5 x + C.$$

23. $\int 15\ sen^2 x \cos^3 x \, dx$

Temos:

$$I = 15\int sen^2 x\left(1 - sen^2 x\right)\cos x\, dx$$
$$= 15\int sen^2 x\cos x\, dx - 15\int sen^4 x\cos x\, dx$$
$$= 15\frac{sen^3 x}{3} - 15\frac{sen^5 x}{5} + C$$
$$= 5\, sen^3 x - 3\, sen^5 x + C.$$

24. $\int 48\, sen^2 x\cos^4 x\, dx$

Temos:

$$I = 48\int\left(1 - \cos^2 x\right)\cos^4 x\, dx$$
$$= 48\int\cos^4 x\, dx - 48\int\cos^6 x\, dx$$
$$= 48\left(I_4 - I_6\right)$$
$$= 48\left(I_4 - \left(\frac{1}{6}\cos^5 x\, sen\, x + \frac{5}{6}I_4\right)\right)$$
$$= 48\left(\frac{1}{6}I_4 - \frac{1}{6}\cos^5 x sen\, x\right)$$
$$= 8\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\, sen\, x + \frac{3}{4}I_2 - \cos^5 x\, sen\, x\right)$$
$$= 2\cos^3 x\, sen\, x - 8\cos^5 x\, sen\, x + 6\left(\frac{1}{2}sen\, x\cos x + \frac{1}{2}x\right) + C$$
$$= 2\cos^3 x\, sen\, x - 8\cos^5 x\, sen\, x + 3sen\, x\cos x + 3x + C.$$

25. $\int\cos^6 3x\, dx$

Fazendo:

$u = 3x \rightarrow du = 3dx$

Temos:

$$\int\cos^6 u\,.\frac{du}{3} = \frac{1}{3}I_6$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}\cos^5 u\, sen\, u + \frac{5}{24}\cos^3 u\, sen\, u + \frac{15}{48}sen\, u\cos u + \frac{15}{48}u\right] + C$$
$$= \frac{1}{18}\cos^5 3x\, sen\, 3x + \frac{5}{72}\cos^3 3x sen 3x + \frac{5}{48}\cos 3x\, sen\, 3x + \frac{5}{16}x + C.$$

26. $\int \frac{-3\cos^2 x}{sen^4 x} dx$

Temos:

$$I = -3\int \frac{\cos^2 x}{sen^2 x\ sen^2 x}\, dx$$

$$= -3\int \cot g^2 x \,.\, \cos ec^2 x\, dx$$

$$= 3\frac{\cot g^3 x}{3} + C$$

$$= \cot g^3 x + C.$$

27. $\int sen\ 3x \cos 5x\ dx$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int sen\ 8x\ dx - \frac{1}{2}\int sen\ 2x\ dx$$

$$= \frac{-1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

28. $\int tg^2 5x\ dx$

Temos:

$$I = \int \frac{sen^2 5x}{\cos^2 5x} dx$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 5x}{\cos^2 5x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 5x} dx - \int dx$$

$$= \int \sec^2 5x\ dx - x + C$$

$$= \frac{1}{5} tg\ 5x - x + C.$$

29. $\int sen\ w\,t\ sen(w\,t + \theta)\, dt$

Temos:

$$I = \int \frac{1}{2}[\cos(w\,t - w\,t - \theta) - \cos(w\,t - w\,t - \theta)]dt$$

$$= \int \frac{1}{2}(\cos(-\theta) - \cos(2w\,t + \theta))dt$$

$$= \frac{1}{2}\cos\theta\, t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2w}sen(2w\,t + \theta) + C$$

$$= \frac{1}{2}t\cos\theta - \frac{1}{4w}sen(2w\,t + \theta) + C.$$

30. $\int \frac{\cos^3 x}{sen^4 x}dx$

Temos:

$$I = \int \frac{(1 - sen^2 x)}{sen^4 x}\cos x\,dx$$

$$= \int sen^{-4}x\cos x\,dx - \int sen^{-2}x\cos x\,dx$$

$$= \frac{sen^{-3}x}{-3} - \frac{sen^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-1}{3\,sen^3 x} + \frac{1}{sen\,x} + C.$$

31. $\int \sec^4 t\cot g^6 t\ sen^8 t\ dt$

Temos:

$$I = \int \frac{1}{\cos^4 t}\cdot\frac{\cos^6 t}{sen^6 t}\cdot sen^8 t\ dt$$

$$= \int \cos^2 t\ sen^2 t\ dt$$

$$= \int (\cos t\ sen\,t)^2 dt$$

$$= \int \left(\frac{sen\ 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int sen^2 2t\ dt$$

$$I = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}sen\ 4t + C.$$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, tg^3\sqrt{x^2-1}\, dx$

Fazendo:

$u = \sqrt{x^2-1}$

$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

Temos:

$I = \int tg^3 u\, du$

$= \frac{1}{2} tg^2 u - \int tg\ u\ du$

$= \frac{1}{2} tg^2 u + \ln|\cos u| + C$

$= \frac{1}{2} tg^2 \sqrt{x^2-1} + \ln\left|\cos\sqrt{x^2-1}\right| + C.$

33. $\int \sec^3(1-4x)dx$

Fazendo:

$u = 1-4x \rightarrow du = -4dx$

Temos:

$I = -\frac{1}{4}\int \sec^3 u\, du$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sec u\ tg\ u + \frac{1}{2}\int \sec u\, du\right]$

$= -\frac{1}{8}\sec u\ tg\ u - \frac{1}{8}\ln|\sec u + tg\ u| + C$

$= -\frac{1}{8}\sec(1-4x)tg(1-4x) - \frac{1}{8}\ln|\sec(1-4x) + tg(1-4x)| + C.$

34. $\int \cos ec^4(3-2x)dx$

Fazendo:

$u = 3-2x \rightarrow du = -2dx$

Temos:

$$I = -\frac{1}{2}\int \cos ec^4 u\ du$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1+\cot g^2 u\right)\cos ec^2 u\ du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\cot g\ u - \frac{\cot g^3 u}{3}\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\cot g\ u + \frac{1}{6}\cot g^3 u + C$$

$$= \frac{1}{2}\cot g\ (3-2x) + \frac{1}{6}\cot g^3 (3-2x) + C.$$

35. $\int x \cot g^2\left(x^2-1\right)\cos ec^2\left(x^2-1\right) dx$

Fazendo:

$u = x^2 - 1$

$du = 2xdx$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int \cot g^2 u \cos ec^2 u\ du$$

$$I = -\frac{1}{2}\frac{\cot g^3 u}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{6}\cot g^3\left(x^2-1\right) + C.$$

36. Verificar as fórmulas de recorrência (8), (9) e (10) da secção 7.2.11.

Verificando a fórmula (8):

$$\int \cos^n u\ du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u sen\ u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}\ u\ du$$

Fazendo:

$u^* = \cos^{n-1} u \quad \Rightarrow \quad du^* = -(n-1)\cos^{n-2} u\ .\ sen\ u\ du$

$dv = \cos u\ du \quad \Rightarrow \quad v = sen\ u$

Temos:

$$\int \cos^n u\, du = \cos^{n-1} u\ sen\ u + \int sen\ u\ .(n-1)\cos^{n-2} u\ .\ sen\ u\ du$$

$$\int \cos^n u\, du = \cos^{n-1} u\ sen\ u + (n-1)\int \cos^{n-2} u\,(1-\cos^2 u)\, du$$

$$\int \cos^n u\, du = \cos^{n-1} u\ sen\ u + (n-1)\int \cos^{n-2} u du - (n-1)\int \cos^n u\, du$$

$$\int \cos^n u\, du + (n-1)\int \cos^n u\, du = \cos^{n-1} u\ sen\ u + (n-1)\int \cos^{n-2} u\, du$$

$$\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\ .\ sen\ u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$$

Verificando a fórmula (9):

$$\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u\ tg\ u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$$

Fazendo:

$$u^* = \sec^{n-2} u \quad \Rightarrow \quad du^* = (n-2)\sec^{n-3} u\ .\sec u\ .\ tg\ u\ du$$

$$dv = \sec^2 u\ du \quad \Rightarrow \quad v = tg\ u$$

Temos:

$$\int \sec^n u\, du = \sec^{n-2} u\ .\ tg\ u - \int tg^2 u\,(n-2)\sec^{n-2} u\ .\ du$$

$$\int \sec^n u\, du = \sec^{n-2} u\ .\ tg\ u - (n-2)\int (\sec^2 u - 1)\sec^{n-2} u\, du$$

$$\int \sec^n u\, du = \sec^{n-2} u\ .\ tg\ u - (n-2)\int \sec^n u\ .\ du + (n-2)\int \sec^{n-2} u\, du$$

$$\int \sec^n u\, du + (n-2)\int \sec^n u\, du = \sec^{n-2} u\ tgu + (n-2)\int \sec^{n-2} u\, du$$

$$\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u\ tg\ u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$$

Verificando a fórmula (10):

$$\int \cos c^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cos ec^{n-2} u\ .\cot g\ u + \frac{n-2}{n-1}\int \cos ec^{n-2} u\, du$$

Fazendo:

$$u^* = \cos ec^{n-2} u\, du \quad \Rightarrow \quad du^* = -(n-2)\cos ec^{n-3} u\ .\cos ec\ u\ .\cot g\ u\ du$$

$$dv = \cos ec^2 u\ du \quad \Rightarrow \quad v = -\cot g\ u$$

Temos:

$$\int \cos ec^n u\, du = -\cos ec^{n-2} u \cot g\ u - \int \cot^2 g\ u\ .(n-2)\cos ec^{n-2}\ u\, du$$

$$\int \cos ec^n u\, du = -\cos ec^{n-2} u \cot g\ u - (n-2)\int (\cos ec^2 u - 1)\cos ec^{n-2} u\, du$$

$$\int \cos ec^n u\, du + (n-2)\int \cos ec^2 u\, du = -\cos ec^n u.\cot g\ u + (n-2)\int \cos ec^{n-2} u\, du$$

$$\int \cos ec^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cos ec^{n-2} u\ .\cot g\ u + \frac{n-2}{n-1}\int \cos ec^{n-2} u\, du$$

37. Verificar as fórmulas.

a) $\int tg^n u\ du = \frac{1}{n-1}\, tg^{n-1}u - \int tg^{n-2}u\ du$

b) $\int \cot g^n u\ du = -\frac{1}{n-1}\cot g^{n-1}u - \int \cot g^{n-2}u\ du$

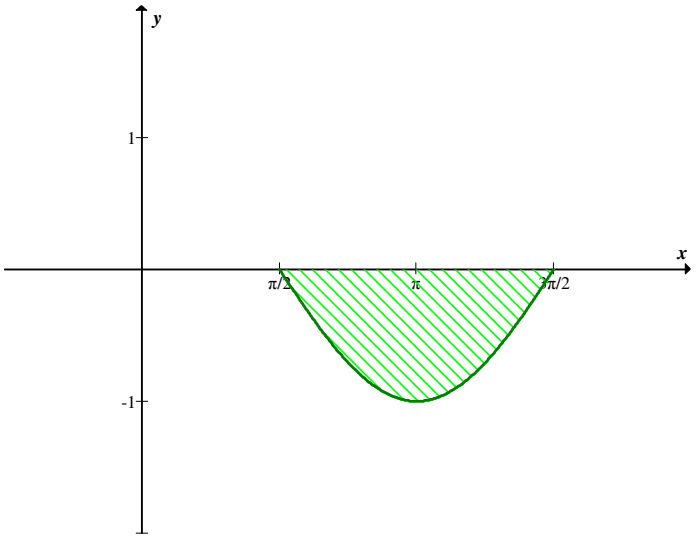
Solução (a)

$$\int tg^n u\ du = \int tg^2 u\ .\ tg^{n-2}u\ du$$
$$= \int \left(\sec^2 u - 1\right).\ tg^{n-2}u\ du$$
$$= \int tg^{n-2}u\ \sec^2 u du - \int tg^{n-2}u\ du$$
$$= \frac{tg^{n-1}u}{n-1} - \int tg^{n-2}u\ du$$

Solução (b)

$$\int \cot g^n u\ du = \int \cot g^2 u\ .\ \cot g^{n-2}u\ du$$
$$= \int \left(\cos ec^2 u - 1\right).\ \cos tg^{n-2}u\ du$$
$$= \int \cot g^{n-2}u\ \ \cos ec^2 u\ du - \int \cot g^{n-2}u\ du$$
$$= -\frac{\cot g^{n-1}}{n-1} - \int \cot g^{n-2}u\ du$$

38. Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, pelas retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ e o eixo dos x.
A Figura que segue mostra a área.



$$A = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

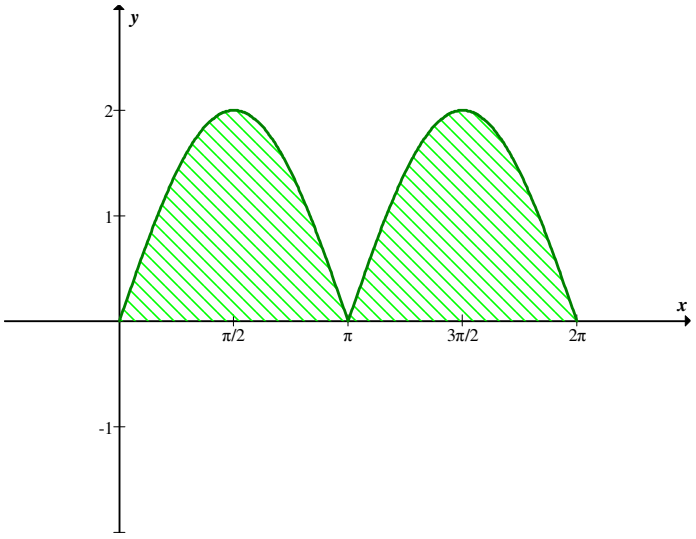
$$= -2 \, sen \, x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -2\left(sen\,\pi - sen\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 2 \, u \, a$$

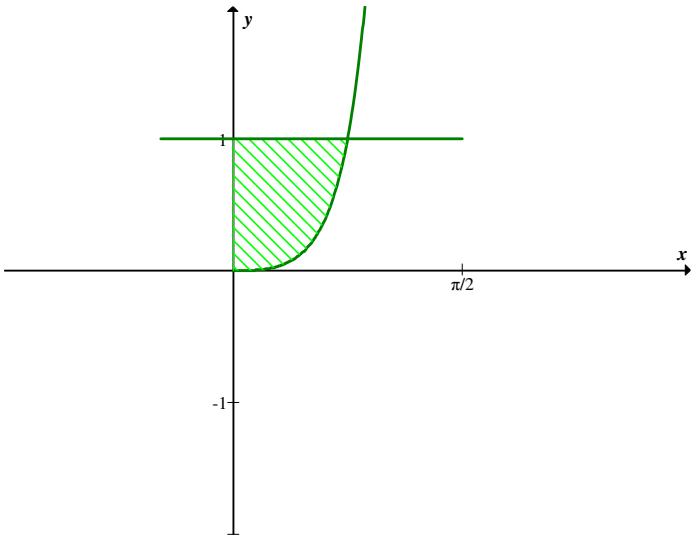
39. Calcular a área limitada por $y = 2\left|sen\, x\right|$, $x = 0$, $x = 2\pi$ e o eixo dos x

A Figura que segue mostra a área.



$$A = 2\int_0^{\pi} 2\ sen\ x\ dx$$
$$= -4\cos x\Big|_0^{\pi}$$
$$= -4(\cos\pi - \cos 0)$$
$$= -4(-1-1)$$
$$= 8\ u.a$$

40. Calcular a área da região limitada por $y = tg^3 x$, $y = 1$ e $x = 0$
A Figura que segue mostra a área.

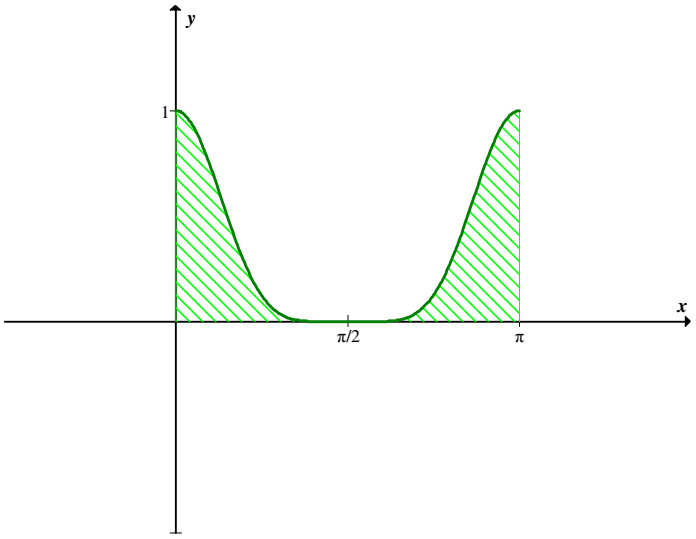


$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x\ dx$$
$$= \frac{1}{2}tg^2 x + \ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(tg^2\frac{\pi}{4} - tg^2 0\right) + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|\cos 0\right|$$
$$= \frac{1}{2}(1-0) + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim,

$$A = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\right) u.a$$

41. Calcular a área sob o gráfico de $y = \cos^6 x$ de 0 ate π.
A Figura que segue mostra a área.



$$\int \cos^6 x\, dx = \frac{1}{6}\cos^5 x\, sen\, x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\, sen\, x + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\, sen\, x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\, sen\, x + \frac{5}{24}\cos^3 x\, sen\, x + \frac{15}{24}\int \cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\, sen\, x + \frac{5}{24}\cos^3 x\, sen\, x + \frac{15}{24}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen\, 2x\right) + C$$

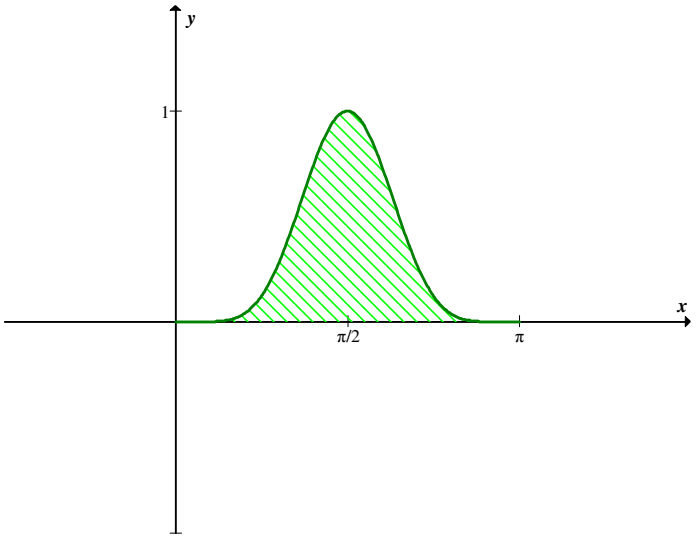
Assim,

$$A = \int_0^{\pi} \cos^6 x\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\, sen\, x + \frac{5}{24}\cos^3 x\, sen\, x + \frac{15}{24}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen\, 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{5}{16}\pi\, u.a$$

42. Calcular a área sob o gráfico de $y = sen^6 x$ de 0 ate π.
A Figura que segue mostra a área.



$$\int sen^6 x\, dx = -\frac{1}{6} sen^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int sen^4 x\, dx$$

$$= -\frac{1}{6} sen^5 x \cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4} sen^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int sen^2 x\, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{6} sen^5 x \cos x - \frac{5}{24} sen^3 x \cos x + \frac{15}{24}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} sen\, 2x\right) + C$$

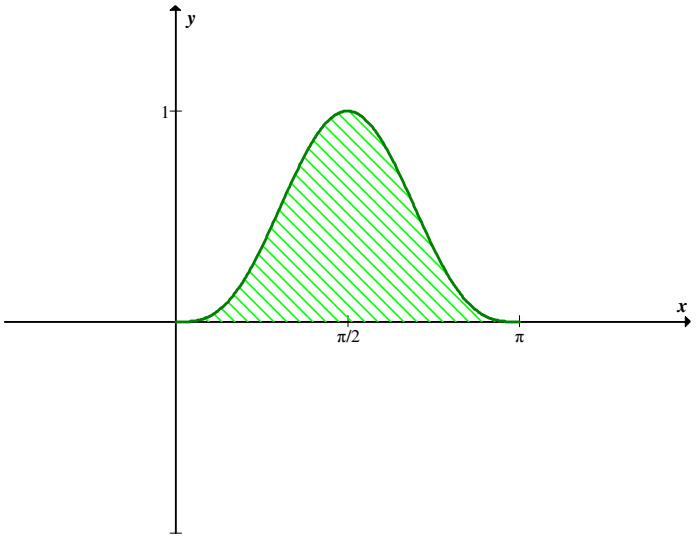
Assim,

$$A = \int_0^{\pi} sen^6 x\, dx$$

$$= -\frac{1}{6} sen^5 x \cos x - \frac{5}{24} sen^3 x \cos x + \frac{15}{24}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} sen\, 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{5}{16}\pi\ u.a$$

43. Calcular a área sob o gráfico de $y = sen^3 x$ de 0 ate π.
A Figura que segue mostra a área.



$$\int sen^3 x\, dx = -\frac{1}{3} sen^2 \cos x + \frac{2}{3}\int sen\, x\, dx$$

$$= -\frac{1}{3} sen^2 \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$$

Assim,

$$A = \int_0^{\pi} sen^3 x\, dx$$

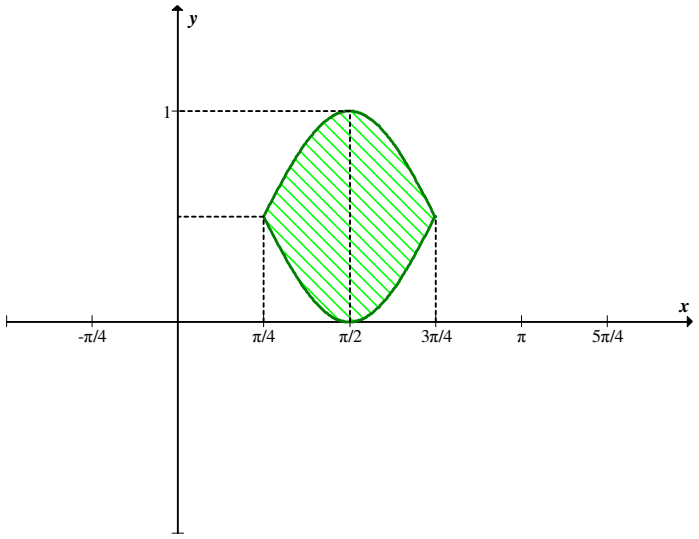
$$= -\frac{1}{3} sen^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{3}(\cos \pi - \cos 0)$$

$$= \frac{4}{3} u.a.$$

44. Calcular a área entre as curvas $y = sen^2 x$ e $y = \cos^2 x$, de $\frac{\pi}{4}$ ate $\frac{3\pi}{4}$

A Figura que segue mostra a área.



$$A = 2.\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(sen^2 x - \cos^2 x\right)dx$$

$$= 2.\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\,sen\,2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen\,2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2.\frac{-1}{2}sen\,2x\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(sen\pi - sen\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= sen\frac{\pi}{2}$$

$$= 1\,u.a$$

Nos exercícios de 45 a 67, calcular a integral indefinida.

45. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2-5} = \sqrt{5}\,tg\,\theta$$

$$x = \sqrt{5}\sec\theta$$

$$dx = \sqrt{5}\sec\theta\,tg\,\theta\,d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{\sqrt{5}\sec\theta\, tg\ \theta\, d\theta}{5\sec^2\theta\sqrt{5}tg\ \theta}$$

$$= \int \frac{d\theta}{5\sec\theta} = \frac{1}{5}\int \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{5} sen\ \theta + C$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} + C$$

46. $\int \frac{dt}{\sqrt{9-16t^2}}$

Fazendo:

$u^2 = 16t^2$

$u = 4t \quad \rightarrow \quad du = 4dt$

Temos:

$$I = \int \frac{\frac{1}{4}\, du}{\sqrt{9-u^2}}$$

Fazendo:

$\sqrt{9-u^2} = 3\cos\theta$

$$u = 3\ sen\ \theta \quad \therefore \quad \theta = arc\ sen\frac{u}{3}$$

$$du = 3\cos\theta\, d\theta$$

Obtemos:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int d\theta = \frac{1}{4}\theta + C$$

$$= \frac{1}{4}\ arc\ sen\ \frac{u}{3} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ arc\ sen\ \frac{4t}{3} + C$$

47. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-9}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2-9} = 3\,tg\,\theta$$
$$x = 3\sec\theta$$
$$dx = 3\sec\theta\,tg\theta\,d\theta$$

Temos:

$$\int \frac{27\sec^3\theta\,.\,3\sec\theta\,.\,tg\,\theta\,d\theta}{3\,tg\,\theta}$$
$$= 27\int \sec^4\theta\,d\theta$$
$$= 27\left(\frac{1}{3}\sec^2\theta\,tg\,\theta + \frac{2}{3}\int \sec^2\theta\,d\theta\right)$$
$$= 9\sec^2\theta\,tg\,\theta + 18\,tg\,\theta + C$$
$$= 9\left(\frac{x}{3}\right)^2\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + 18\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + C$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^2 + 6\right)\sqrt{x^2-9} + C$$

48. $\int \left(1-4t^2\right)^{3/2} dt$

$$= \int \left(1-4t^2\right)\sqrt{1-4t^2}\;dt$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(1-u^2\right)\sqrt{1-u^2}\,du$$

onde: $u^2 = 4t^2 \quad \rightarrow \quad u = 2t$
$du = 2dt$

Fazendo:

$$\sqrt{1-u^2} = \cos\theta$$
$$u = sen\,\theta$$
$$du = \cos\theta\,d\theta$$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int \cos\theta\left(1 - sen^2\theta\right).\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos\theta\,.\cos^2\theta\,.\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\, sen\theta + \frac{3}{4}\int \cos^2\theta\, d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cos^3\theta\, sen\,\theta + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\, sen\, 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\cos^3\theta\, sen\,\theta + \frac{3}{16}\theta + \frac{3}{32}\, sen\, 2\theta + C.$$

Considerando:

$$sen\, 2\theta = 2\, sen\,\theta\cos\theta$$

$$= 2\, u.\sqrt{1-u^2}$$

Finalizamos:

$$I = \frac{1}{8}\left(\sqrt{1-u^2}\right)^3 u + \frac{3}{16}\, arc\, sen\, u + \frac{3}{16}u\sqrt{1-u^2} + C$$

$$= \frac{1}{8}u\left(1-u^2\right)\sqrt{1-u^2} + \frac{3}{16}\, arc\, sen\, u + \frac{3}{16}u\sqrt{1-u^2} + C$$

$$= \frac{1}{8}\,.\,2t\left(1-4t^2\right)\sqrt{1-4t^2} + \frac{3}{16}\, arc\, sen\, 2t + \frac{3}{16}\,.\,2t\sqrt{1-4t^2} + C$$

$$= \frac{1}{4}t\left(1-4t^2\right)\sqrt{1-4t^2} + \frac{3}{16}\, arc\, sen\, 2t + \frac{3}{8}\,.\,t\sqrt{1-4t^2} + C$$

49. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

Fazendo:

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

$$x = 2\, sen\,\theta$$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

Temos:

$$I = \int 4\, sen^2\theta \,.\, 2\cos\theta \,.\, 2\cos\theta \, d\theta$$

$$= 16\int sen^2\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 16\int (sen\theta \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 16\int (1-\cos^2\theta)\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 16\int (\cos^2\theta - \cos^4\theta)\, d\theta$$

$$= 16\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\, sen\, 2\theta - \left(\frac{1}{4}\cos^3\theta \, sen\theta + \frac{3}{4}\int \cos^2\theta \, d\theta\right)\right]$$

$$= 16\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\, sen\, 2\theta - \frac{1}{4}\cos^3\theta \, sen\theta - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\, sen\, 2\theta\right)\right] + C$$

$$= 16\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\, sen\, 2\theta - \frac{1}{4}\cos^3\theta \, sen\theta - \frac{3}{8}\theta - \frac{3}{16} sen\, 2\theta\right] + C$$

$$= 16\left[\frac{4-3}{8}\theta + \frac{4+(-3)}{16} sen\, 2\theta - \frac{1}{4}\cos^3\theta \, sen\theta\right] + C$$

$$= 2\theta + sen\, 2\theta - 4\cos^3\theta \, sen\theta + C$$

$$= 2\, arc\, sen\frac{x}{2} + 2\,\frac{x}{2} \,.\, 4\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - 4\,.\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 .\frac{x}{2} + C$$

$$= 2\, arc\, sen\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4} + C$$

50. $\int x^3\sqrt{x^2+3}\, dx$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3}\sec\theta$$

$$x = \sqrt{3}\, tg\theta$$

$$dx = \sqrt{3}\sec^2\theta \, d\theta$$

Temos:

$$I = \int 3\sqrt{3}\, tg^3\theta \,.\, \sqrt{3}\sec^3\theta\, d\theta$$

$$= 9\sqrt{3}\int tg^3\theta \,.\sec^3\theta\, d\theta$$

$$= 9\sqrt{3}\int \left(\sec^2\theta - 1\right) tg\ \theta \,.\sec^2\theta \,.\sec\theta\, d\theta$$

$$= 9\sqrt{3}\int \left(\sec^4\theta - \sec^2\theta\right).\ tg\ \theta \,.\sec\theta\, d\theta$$

$$= 9\sqrt{3}\left(\frac{\sec^5\theta}{5} - \frac{\sec^3\theta}{3}\right) + C$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{5}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}\right)^5 - \frac{9\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}\right)^3 + C$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2+3}\right)^5 - \left(\sqrt{x^2+3}\right)^3 + C$$

51. $\int \frac{5x+4\ dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

Fazendo

$$\sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

$$x = tg\ \theta$$

$$dx = \sec^2\ \theta\, d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{5tg\theta + 4}{tg^3\theta.\sec\theta}.\sec^2\theta.d\theta$$

$$= \int \frac{5tg\theta + 4}{tg^3\theta}.\sec\theta.d\theta$$

$$= \int \frac{5\sec\theta}{tg^2\theta}d\theta + \int \frac{4\sec\theta}{tg^3\theta}d\theta$$

$$= \int 5sen^{-2}\theta\cos\theta\, d\theta + \int \frac{4\cos^2\theta}{sen^3\theta}d\theta$$

$$= \int 5sen^{-2}\theta\cos\theta\, d\theta + 4\int \cos\sec^3\theta d\theta - 4\int \cos\sec\theta d\theta$$

$$= \frac{-5}{sen\theta} - 2\cos\sec\theta\cot g\theta - 2\ln\left|\cos\sec\theta - \cot g\theta\right| + C$$

$$= \frac{-5\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2} - 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C.$$

52. $\int (x+1)^2\ \sqrt{x^2+1}dx$

Fazendo

$$\sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

$$x = tg\ \theta$$

$$dx = \sec^2\ \theta\, d\theta$$

Temos:

$$I = \int (tg\ \theta + 1)^2 . \sec\theta . \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \left(tg^2\theta + 2\ tg\ \theta + 1\right)\sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \int \left(tg^2\theta + 1\right)\sec^3\theta\, d\theta + \int 2tg\ \theta \sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \int \sec^5\theta\, d\theta + 2\int \sec^2\theta . \sec\theta . tg\ \theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\sec^3\theta\ tg\ \theta + \frac{3}{4}\int \sec^3\theta\, d\theta + 2 . \frac{\sec^3\theta}{3}$$

$$= \frac{1}{4}\sec^3\theta\ tg\ \theta + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\ tg\theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta\right) + \frac{2}{3}\sec^3\theta + C$$

$$= \frac{1}{4}\sec^3\theta\ tg\ \theta + \frac{3}{8}\ \sec\theta\ tg + \frac{3}{8}\ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + \frac{2}{3}\sec^3\theta + C$$

$$= \frac{1}{4}x\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{3}{8}\sqrt{x^2+1}\ .\ x + \frac{3}{8}\ln\left|\sqrt{x^2+1} + x\right| + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + C$$

$$= \frac{1}{4}x\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + \frac{3}{8}x\sqrt{x^2+1} + \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + \frac{3}{8}\ln\left|\sqrt{x^2+1} + x\right| + C$$

53. $\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+16}}\, dt$

Fazendo

$$\sqrt{t^2+16} = 4\sec\theta$$

$$t = 4\ tg\ \theta$$

$$dt = 4\sec^2\ \theta\, d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{4^5\ tg^5\theta \,.\, 4\sec^2\theta\, d\theta}{4\sec\theta}$$

$$= \int 4^5\ tg^5\theta \sec\theta\, d\theta$$

$$= 4^5 \int tg^2\theta \,.\, tg^2\theta \,.\, tg\ \theta \,.\, \sec\theta\, d\theta$$

$$= 4^5 \int \left(\sec^2\theta - 1\right)^2 \,.\, tg\ \theta \,.\, \sec\theta\, d\theta$$

$$= 4^5 \int \left(\sec^4\theta - 2\sec^2\theta + 1\right) tg\ \theta \sec\theta\, d\theta$$

$$= 4^5 \left[\int \sec^4\theta\, tg\ \theta \sec\theta\, d\theta - 2\int \sec^2\theta\ \ .tg\ \theta \,.\, \sec\theta\, d\theta + \int tg\ \theta \,.\, \sec\theta\, d\theta\right]$$

$$= 4^5 \left[\frac{\sec^5\theta}{5} - 2\,.\,\frac{\sec^3\theta}{3} + \sec\theta\right] + C$$

$$= \frac{4^5}{5}\left(\frac{\sqrt{t^2+16}}{4}\right)^5 - \frac{4^4.8}{3}\left(\frac{\sqrt{t^2+16}}{4}\right)^3 + 4^5\left(\frac{\sqrt{t^2+16}}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}\left(t^2+16\right)^2\sqrt{t^2+16} - \frac{32}{3}\left(t^2+16\right)^2\sqrt{t^2+16} + 256\sqrt{t^2+16} + C$$

54. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}\, dx$

Fazendo

$u = e^x \quad \rightarrow \quad u^2 = e^{2x}$

$du = e^x dx$

Temos:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

Considerando:

$\sqrt{u^2+1} = \sec\theta$

$u = tg\ \theta$

$du = \sec^2\theta\, d\theta$

Finalizamos:

$$I = \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sec \theta}$$
$$= \sec \theta \, d\theta$$
$$= \ln \left| \sec \theta + tg \ \theta \right| + C$$
$$= \ln \left| \sqrt{u^2 + 1} + u \right| + C$$
$$= \ln \left| \sqrt{e^{2x} + 1} + e^x \right| + C$$

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2}} dx$

Fazendo

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2} \cos \theta$$
$$x = \sqrt{2} \ sen \ \theta$$
$$dx = \sqrt{2} \cos \theta \, d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{2 \, sen^2 \theta}{\sqrt{2} \cos \theta} . \sqrt{2} \cos \theta \, d\theta$$
$$= 2 \int sen^2 \theta \, d\theta$$
$$= 2 \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$
$$= \int (1 - \cos 2\theta) \, d\theta$$
$$= \theta - \frac{1}{2} \ sen \ 2\theta + C$$
$$= \theta - sen \ \theta \cos \theta + C$$
$$= arc \ sen \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} x \sqrt{2 - x^2} + C$$

56. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx$

Fazendo

$$u^2 = e^{2x}$$
$$u = e^x$$
$$du = e^x dx$$

Temos:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$$

Considerando:

$$\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$$

$$u = 2\ sen\ \theta$$

$$du = 2\cos\theta\ d\theta$$

Obtemos:

$$I = \int \frac{2\cos\theta\ d\theta}{2\cos\theta} = \theta + C$$

$$= arc\ sen\ \frac{u}{2} + C$$

$$= arc\ sen\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$$

57. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Fazendo

$$\sqrt{x^2-1} = tg\ \theta$$

$$x = \sec\theta$$

$$dx = \sec\theta\ .\ tg\ \theta\ d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{\sec\theta + 1}{tg\,\theta} .\ \sec\theta\ tg\ \theta\ .\ d\theta$$

$$= \int \left(\sec^2\theta + \sec\theta\right) d\theta$$

$$= tg\,\theta + \ln\left|\sec\theta + tg\,\theta\right| + c$$

$$= \sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2-1} = tg\,\theta$$

$$x = \sec\theta$$

$$dx = \sec\theta\ tg\,\theta\ d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{tg\,\theta}{\sec^2\theta} \sec\theta . tg\,\theta . d\theta$$
$$= \int tg^2\theta . \frac{1}{\sec\theta} d\theta$$
$$= \int \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta} d\theta$$
$$= \int \sec\theta d\theta - \int \cos\theta d\theta$$
$$= \ln\left|\sec\theta + tg\,\theta\right| - sen\,\theta + C$$
$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$$

59. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} dx$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sec\theta$$
$$x = tg\,\theta$$
$$dx = \sec^2\theta d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^3\theta}{tg^3\theta}\, d\theta$$
$$= \int \frac{1}{\cos^3\theta} \cdot \frac{\cos^3\theta}{sen^3\theta}\, d\theta$$
$$= \int \cos\sec^3\theta\, d\theta$$
$$= -\frac{1}{2} \cos\sec\theta \cot g\ \theta + \frac{1}{2} \ln\left|\cos\sec\theta - \cot g\ \theta\right| + C$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} . \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right| + C$$

60. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Fazendo:

$$\sqrt{4 - x^2} = 2\cos\theta$$
$$x = 2\ sen\ \theta$$
$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{2sen\,\theta + 1}{2\cos\theta} . 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int (2\ sen\ \theta + 1)\, d\theta$$

$$= -2\cos\theta + C$$

$$= -\sqrt{4 - x^2} + arc\ sen\frac{x}{2} + C$$

61. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{9x^2+1}} dx$

Fazendo:

$u^2 = 9x^2$

$u = 3x$

$du = 3dx$

Temos:

$$I = \int \frac{(2u+5)}{\sqrt{u^2+1}} \frac{1}{3} du$$

Considerando:

$\sqrt{u^2+1} = \sec\theta$

$u = tg\ \theta$

$du = \sec^2\theta\, d\theta$

Obtemos:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{(2tg\ \theta + 5)\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int 2tg\ \theta \sec\theta\, d\theta + \frac{1}{3}\int 5\sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\sec\theta + \frac{5}{3}\ln\left|\sec\theta + tg\,\theta\right| + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{u^2+1} + \frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{u^2+1} + u\right| + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{9x^2+1} + \frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2+1} + 3x\right| + C$$

62. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

Fazendo:

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$
$$u^2 = (x+1)^2$$
$$u = x+1$$
$$du = dx$$

Temos:

$$I = \int \frac{(u-1)+3}{\sqrt{u^2-1}} du$$

Considerando:

$$\sqrt{u^2-1} = tg\ \theta$$
$$u = \sec\theta$$
$$du = \sec\theta\ .\ tg\ \theta\ d\theta$$

Obtemos:

$$= \int \frac{\sec\theta + 2}{tg\ \theta}\ .\ \sec\theta\ .\ tg\ \theta\ d\theta$$
$$= \int \left(\sec^2\theta + 2\sec\theta\right) d\theta$$
$$= tg\theta + 2\ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + C$$
$$= \sqrt{u^2-1} + 2\ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$$
$$= \sqrt{x^2+2x} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C$$

63. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Fazendo:

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$
$$x = 2\ sen\ \theta$$
$$dx = 2\cos\theta\ d\theta$$

Temos:

$$I = \int 2\cos\theta\ .\ 2\cos\theta\ d\theta$$
$$= 4\int \cos^2\theta\ d\theta$$
$$= 4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$
$$= 2\left(\theta + \frac{1}{2} sen\ 2\theta\right) + C$$
$$= 2\ \theta + sen\ 2\theta + C$$
$$= 2\ arc\ sen\ \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

64. $\int \sqrt{x^2-4}\, dx$

Fazendo:

$\sqrt{x^2-4} = 2\, tg\ \theta$

$x = 2\sec\theta$

$dx = 2\sec\theta\, .\, tg\ \theta\, d\theta$

Temos:

$I = \int 2\, tg\ \theta\, .\, 2\sec\theta\, .\, tg\ \theta\, d\theta$

$= 4\int tg^2\theta\, .\, \sec\theta\, d\theta$

$= 4\int \left(\sec^2\theta - 1\right).\, \sec\theta\, d\theta$

$= 4\int \left(\sec^3\theta - \sec\theta\right) d\theta$

$= 4\left[\frac{1}{2}\sec\theta\, .\, tg\ \theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta - \int \sec\theta\, d\theta\right]$

$= 2\sec\theta\, .\, tg\ \theta - 2\ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + C$

$= 2\, .\, \frac{x}{2}\, \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C$

65. $\int \sqrt{4+x^2}\, dx$

Fazendo:

$\sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta$

$x = 2\, tg\ \theta$

$dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$

Temos:

$I = \int 2\sec\theta\, .\, 2\sec^2\theta\, d\theta$

$= 4\int \sec^3\theta\, d\theta$

$= 4\left(\frac{1}{2}\sec\theta\, tg\ \theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta\right)$

$= 2\sec\theta\, tg\ \theta + 2\ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + \overline{C}$

$= 2\, \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\, .\, \frac{x}{2} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + \overline{C}$

$= \frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + \overline{C}$

$= \frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2\ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| + C$

66. $\int \left(\sqrt{1+x^2}+2x\right)dx$

Fazendo:

$\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$

$x = tg\ \theta$

$dx = \sec^2\theta\ d\theta$

Temos:

$I = \int (\sec\theta + 2\ tg\ \theta)\sec^2\theta\ d\theta$

$= \int \left(\sec^3 + 2\ tg\ \theta \sec\theta \sec\theta\right)d\theta$

$= \frac{1}{2}\sec\theta\ tg\ \theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta\ d\theta + 2\frac{\sec^2\theta}{2} + \overline{C}$

$= \frac{1}{2}\sec\theta\ tg\ \theta + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + \sec^2\theta + \overline{C}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\ .\ x + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + 1 + x^2 + \overline{C}$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + x^2 + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

67. $\int\left(sen\ x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

$= \int sen\ x\ dx + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$= -\cos x + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Fazendo:

$\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$

$x = tg\ \theta$

$dx = \sec^2\ \theta\ d\theta$

Temos:

$$I = -\cos x + \int \frac{tg^2\theta \,.\, \sec^2\theta \, d\theta}{\sec\theta}$$

$$= -\cos x + \int tg^2\theta \,.\, \sec\theta \, d\theta$$

$$= -\cos x + \int \left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta \, d\theta$$

$$= -\cos x + \int \left(\sec^3\theta - \sec\theta\right) d\theta$$

$$= -\cos x + \frac{1}{2}\sec\theta \, tg\ \theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta \, d\theta - \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= -\cos x + \frac{1}{2}\sec\theta \, tg\ \theta - \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\ .\, x - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right| + C$$

Nos exercícios de 68 a 72, calcular a integral definida.

68. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

Fazendo:

$u^2 = 3x^2$

$u = \sqrt{3}\, x$

$du = \sqrt{3}\, dx$

Temos:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}du}{\sqrt{u^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}}$$

Considerando:

$\sqrt{u^2+2} = \sqrt{2}\sec\theta$

$u = \sqrt{2}\ tg\ \theta$

$du = \sqrt{2}\sec^2\theta \, d\theta$

Obtemos:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+2}}{\sqrt{2}} + \frac{u}{\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right| + C$$

Assim,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ \ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}+0}{\sqrt{2}}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$$

69. $\int_0^{\frac{a}{2b}} \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx,\ 0 < a < b$

Fazendo:

$u^2 = b^2x^2$

$u = b\ x$

$du = b\ dx$

Temos:

$I = \int \sqrt{a^2 - u^2}\ .\frac{1}{b}\, du$

Considerando:

$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$

$u = asen\theta$

$du = a\cos\theta d\theta$

$$I = \frac{1}{b}\int a\cos\theta \,.\, a\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{b}\int \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\, sen\, 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2} arc\ sen\, \frac{u}{a} + \frac{1}{4}\,.\,\frac{2u\sqrt{a^2-u^2}}{a^2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2} arc\ sen\, \frac{bx}{a} + \frac{bx\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2a^2}\right) + C$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{a}{2b}} \sqrt{a^2-b^2x^2}\ dx = \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2} arc\ sen\, \frac{bx}{a} + \frac{bx\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2a^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2b}}$$

$$= \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2} arc\ sen\frac{1}{2} + \frac{b\,.\,\frac{a}{2b}\sqrt{a^2-b^2\,.\,\frac{a^2}{4b^2}}}{2a^2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{6} + \frac{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{4a^2-a^2}{4}}}{2a^2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{b}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

70. $\int_1^2 \frac{dt}{t^4\sqrt{4+t^2}}$

Fazendo:

$$\sqrt{4+t^2} = 2\sec\theta$$

$$t = 2\, tg\ \theta$$

$$dt = 2\sec^2\theta \, d\theta$$

Temos:

$$I = \int \frac{dt}{t^4\sqrt{4+t^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\, tg^4\theta \,.\, 2\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{tg^4\theta}$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^4\theta}{sen^4\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\cos^3\theta}{sen^4\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int sen^{-4}\theta\left(1-sen^2\theta\right)\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(sen^{-4}\theta\cos\theta - sen^{-2}\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\frac{sen^{-3}\theta}{-3} - \frac{1}{16}\frac{sen^{-1}\theta}{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{48\, sen^3\theta} + \frac{1}{16 sen\theta} + C$$

$$= -\frac{1}{48}\cos\sec^3\theta + \frac{1}{16}\cos\sec\theta + C$$

$$= -\frac{1}{48}\frac{\sqrt{4+t^2}^3}{t^3} + \frac{1}{16}\frac{\sqrt{4+t^2}}{t} + C$$

Assim,

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^4\sqrt{4+t^2}} = \left[\frac{-1}{48}\frac{\sqrt{4+t^2}^3}{t^3} + \frac{\sqrt{4+t^2}}{16t}\right]_1^2$$

$$= \frac{-1}{48}\left(\frac{\sqrt{8^3}}{8} - \frac{\sqrt{5^3}}{1}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\sqrt{8}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{1}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{24} + \frac{5\sqrt{5}}{48} + \frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{1}{48}\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right)$$

71. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2\sqrt{9t^2+16}}$

Fazendo:

$u^2 = 9t^2$

$u = 3t$

$du = 3dt$

Temos:

$$I = \int \frac{\frac{1}{3}du}{\frac{u^2}{9}\sqrt{u^2+16}}$$

Considerando:

$$\sqrt{u^2+16} = 4\sec\theta$$

$$u = 4tg\ \theta$$

$$du = 4\sec^2\theta\, d\theta$$

Obtemos:

$$I = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}\int \frac{4\sec^2\theta\, d\theta}{16\, tg^2\theta \,.\, 4\sec\theta} = 3\,.\,\frac{1}{4\,.\,4}\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{tg^2\theta}$$

$$= \frac{3}{16}\int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{sen^2\theta}$$

$$= \frac{3}{16}\int sen^{-2}\theta\,.\cos\theta\, d\theta \qquad \text{I}$$

$$= -\frac{3}{16}\cos\sec\theta + C$$

$$= \frac{-3}{16}\cdot\frac{\sqrt{u^2+16}}{u} + C$$

$$= \frac{-3}{16}\cdot\frac{\sqrt{9t^2+16}}{3t} + C$$

Assim,

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2\sqrt{9t^2+16}} = \frac{-3}{16}\cdot\frac{\sqrt{9t^2+16}}{3t}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-1}{16}\left(\frac{\sqrt{43}}{3} - \sqrt{17}\right)$$

72. $\int_6^7 \frac{dt}{(t-1)^2\sqrt{(t-1)^2-9}}$

Fazendo:

$$u^2 = (t-1)^2$$

$$u = t-1$$

$$du = dt$$

Temos:

$$I = \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-9}}$$

Considerando:

$$\sqrt{u^2-9} = 3\,tg\,\theta$$

$$u = 3\sec\theta$$

$$u = 3\sec\theta\,tg\,\theta\,d\theta$$

Obtemos:

$$I = \int \frac{3\sec\theta\,.\,tg\,\theta\,d\theta}{9\sec^2\theta\,.\,3\,.\,tg\,\theta}$$

$$= \int \frac{d\theta}{9\sec\theta} = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\,sen\theta + C$$

$$= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{u^2-9}}{u} + C$$

$$= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{(t-1)^2-9}}{t-1} + C$$

Assim,

$$\int_6^7 \frac{dt}{(t-1)^2\sqrt{(t-1)^2-9}} = \frac{1}{9}\left.\frac{\sqrt{(t-1)^2-9}}{t-1}\right|_6^7$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{27}}{6} - \frac{4}{5}\right)$$

Nos exercícios 73 a 76, verificar se a integral imprópria converge. Em caso positivo, determinar seu valor.

73. $\int_3^{10} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

$$I = \int_3^{10} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \lim_{r\to 3^+}\int_r^{10} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$$

Fazendo:

$x = 3\sec\theta \qquad dx = 3\sec\theta\, tg\,\theta\, d\theta$

Temos:

$$I_1 = \int \frac{3\sec\theta\, tg\theta\, d\theta}{9\sec^2\theta\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} = \frac{1}{3}\int \frac{tg\theta\, d\theta}{\sec\theta\, 3\, tg\,\theta}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{9}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{9} sen\theta + c$$

$$= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c$$

$$I = \lim_{r\to 3^+} \frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\Bigg|_r^{10}$$

$$= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{10^2-9}}{10} - \lim_{r\to 3^+}\frac{1}{9}\frac{\sqrt{r^2-9}}{r}$$

$$= \frac{\sqrt{91}}{90} - \frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-9}}{3} = \frac{\sqrt{91}}{90}$$

Portanto, a integral converge e tem como resultado $\frac{\sqrt{91}}{90}$.

74. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

Fazendo:

$x = 2\sec\theta$

$dx = 2\sec\theta\, tg\,\theta\, d\theta$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec\theta\, tg\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta - 4}}$$

$$= \int \frac{2\sec\theta\, tg\theta\, d\theta}{2\, tg\ \theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln\left|\sec\theta + tg\ \theta\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + c$$

$$I = \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2-4}{2}}\right|_3^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2-4}{2}}\right| - \ln\left|\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right|$$

$$= +\infty$$

Portanto, a integral diverge.

75. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} = \lim_{s\to1^-} \int_0^s \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$$

$x = sen\theta$
$dx = \cos\theta\, d\theta$

$$I_1 = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\left(1-sen^2\theta\right)^{3/2}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\left(\cos\theta\right)^3} = \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int \sec^2\theta\, d\ \theta = tg\ \theta + c = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

$$I = \lim_{s\to1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_0^s = \lim_{s\to1^-} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} - 0 = +\infty$$

Portanto, a integral diverge.

76. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$x = 2\,tg\,\theta$
$dx = 2\sec^2\,\theta\,d\theta$

$$I_1 = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{2\,tg\,\theta\sqrt{4\,tg^2\theta+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{tg\,\theta\,.\sec\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta}{tg\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{sen\,\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos ec\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\ln\left|\cos ec\,\theta - \cot g\,\theta\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} - \frac{2}{x}\right| + c$$

$$I = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} - \frac{2}{x}\right\|_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+4}}{b} - \frac{2}{b}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{5}-2\right|$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln\left(\sqrt{\frac{b^2+4}{b^2}} - \frac{2}{b}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{5}-2\right|$$
$$= \frac{1}{2}\,.\,0 - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{5}-2\right|$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{5}-2\right|$$

Portanto, a integral converge e tem como resultado $-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{5}-2\right| \cong 0{,}7218$.

7.6 – EXERCÍCIOS – pg. 325

Nos exercícios de 1 a 23, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{2x^3}{x^2+x}\,dx$

$= 2\int \frac{x^3}{x\,(x+1)}dx = 2\int \frac{x^2 dx}{x+1}$

$= 2\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$= 2\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)+C$

$= x^2-2x+2\ln|x+1|+C$

2. $\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}dx$

$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+\frac{3}{2}x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}dx$

$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{A}{x-\frac{1}{2}}+\frac{B}{x+2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{4/5}{x-\frac{1}{2}}+\frac{6/5}{x+2}\right)dx$

$= \frac{4}{10}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{5}\ln|x+2|+C$

$= \frac{2}{5}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{5}\ln|x+2|+C$

3. $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}dx$

$$= \int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)(x+2)} dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \right) dx$$

Cálculo de A, B e C

$$(x-1) \equiv A(x+1)(x+2) + B(x-2)(x+2) + C(x-2)(x+1)$$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad A \,.\, 3 \,.\, 4 = 1$$

$$A = {}^{1}\!/_{12}$$

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad C \,.\, (-4) \,.\, (-1) = -3$$

$$C = {}^{-3}\!/_{4}$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad B \,.\, (-3) \,.\, (1) = -2$$

$$B = {}^{2}\!/_{3}$$

Assim,

$$I = \int \left(\frac{{}^{1}\!/_{12}}{x-2} + \frac{{}^{2}\!/_{3}}{x+1} + \frac{{}^{-3}\!/_{4}}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{12} \ln|x-2| + \frac{2}{3} \ln|x+1| - \frac{3}{4} \ln|x+2| + C$$

4. $\int \frac{3x^2}{2x^3 - x^2 - 2x + 1} dx$

$$= \int \frac{\frac{3}{2} x^2 dx}{x^3 - \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}} \right) dx$$

Cálculo de A, B e C

$$x^2 \equiv A(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) + B(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) + C\,(x-1)(x+1)$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad A \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$$

$$A = 1$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad B \,.\, (-2) \,.\, \left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$B = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad C \,.\, \left(-\frac{1}{2}\right) \,.\, \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$C = -\frac{1}{3}$$

Assim,

$$I = \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1/3}{x+1} - \frac{1/3}{x-1/2}\right)dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + C$$

5. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^2-2x+1}\,dx$

$$= \int dx + \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= x + \int\left(\frac{7}{x-1} + \frac{10}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= x + 7\ln|x-1| - \frac{10}{x-1} + C$$

6. $\int \frac{x-1}{(x-2)^2\,(x-3)^2}\,dx$

$$\int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2}\right)dx$$

Cálculo de A, B , C e D

$$x-1 \equiv A(x-2)(x-3)^2 + B(x-3)^2 + C(x-2)^2(x-3) + D(x-2)^2$$
$$x-1 \equiv A\left(x^3-8x^2+21x-18\right) + B\left(x^2-6x+9\right) + C\left(x^3-7x^2+16x-12\right) + D\left(x^2-4x+4\right)$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -8A + B - 7C + D = 0 \\ 21A - 6B + 16C - 4D = 1 \\ -18A + 9B - 12C + 4D = -1 \end{cases}$$

$A = 3$; $B = 1$; $C = -3$ e $D = 2$
Assim,

$$I = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{-3}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} \right) dx$$
$$= 3\ln|x-2| + \frac{(x-2)^{-1}}{-1} - 3\ln|x-3| + 2 \cdot \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + C$$
$$= 3\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - 3\ln|x-3| - \frac{2}{x-3} + C$$
$$= 3\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| - \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} + C$$

7. $\int \frac{(x^2+1)}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}\,dx$

$$I = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} dx$$

Cálculo de A, B, C e D
$$x^2+1 \equiv A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)(x-2) + D(x-1)$$

$A = -2$; $B = 2$; $C = -1$; $D = 5$
Assim,

$$I = -2\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2} + C$$

$$= -2\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2} + C$$

$$= 2\ln\frac{|x-2|}{|x-1|} + \frac{1}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2} + C$$

$$= \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 + \frac{1}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2} + C$$

8. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2}$

$$= \int\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4}\right)dx$$

Cálculo de A, B e C

$$1 \equiv Ax(x-4) + B(x-4) + Cx^2$$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = -4B \quad \therefore \quad B = -1/4$

$x = 4 \quad \rightarrow \quad 1 = 16C \quad \therefore \quad C = 1/16$

$A + C = 0 \quad \therefore \quad A = -1/16$

Assim,

$$I = \int\left(\frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{-1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{1}{16}}{x-4}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4}\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{16}\ln|x-4| + C$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| + \frac{1}{4x} + \frac{1}{16}\ln|x-4| + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right| + \frac{1}{4x} + C.$$

9. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{2x^2 + 2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2 + 1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x + 2 + \frac{-x + 2}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + 2\int \frac{dx}{x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\ln \left| x^2 + 1 \right| + 2\ arc\ tgx \right) + C$$

$$= \frac{x^2}{4} + x - \frac{1}{4}\ln \left(x^2 + 1 \right) + arc\ tg\ x + C$$

10. $\int \frac{5dx}{x^3 + 4x}$

$$= 5\int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \right) dx$$

Cálculo de A, B e C

$$1 \equiv A\left(x^2 + 4 \right) + \left(Bx + C \right) x$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad A = {}^{1}\!/_{4}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \quad \therefore \quad B = {}^{-1}\!/_{4} \\ \quad C = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$I = 5\int \left(\frac{1/4}{x} + \frac{-1/4\, x}{x^2 + 4} \right) dx$$

$$= 5\left(\frac{1}{4}\ln \left| x \right| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\ln \left| x^2 + 4 \right| \right) + C$$

$$= \frac{5}{4}\left(\ln \left| x \right| - \frac{1}{2}\ln \left(x^2 + 4 \right) \right) + C$$

11. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx$

$$= \int \frac{3x\,dx}{x^2 - x + 1} - \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x - 1 + 1}{x^2 - x + 1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arc\ tg\ \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}} + C$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arc\ tg\ \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arc\ tg\ \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

12. $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$

$$= \int \frac{dx}{(x + 2)\left(x^2 - 2x + 4\right)}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4}\right)dx$$

Cálculo de A, B e C

$$1 \equiv A\left(x^2 - 2x + 4\right) + (Bx + C)(x + 2)$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 2B + C = 0 \\ 4A + 2C = 1 \end{cases}$$

$A = \frac{1}{12}$; $B = \frac{-1}{12}$ e $C = \frac{1}{3}$

Assim,

$$I = \int \frac{1/12\,dx}{x+2} + \int \frac{-1/12\,x + 1/3}{x^2-2x+4}dx$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| + \int \frac{-1/12\,x}{x^2-2x+4}dx + \int \frac{1/3}{x^2-2x+4}dx$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+4} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln\left|x^2-2x+4\right| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

13. $\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\left(x^2+2x+3\right)^2} - \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\left(x^2+2x+3\right)^2} - 2\int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+2x+3\right)^{-1}}{-1} - 2\left[\frac{x+1}{2\,.\,2\,(2-1)\left(x^2+2x+3\right)} + \frac{1}{4(2-1)}\int \frac{dx}{x^2+2x+3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-1}{x^2+2x+3} - \frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$= \frac{-x-2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

14. $\int \frac{dx}{x\left(x^2-x+1\right)^2}$

$$= \int\left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2-x+1\right)^2}\right)dx$$

Cálculo de A, B, C, D e E.

$$1 \equiv A\left(x^2-x+1\right)^2 + (Bx+C)x\left(x^2-x+1\right) + (Dx+E)x$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = A$$

$$1 \equiv A\left(x^4-2x^3+3x^2-2x+1\right) + (Bx+C)\left(x^3-x^2+x\right) + Dx^2 + Ex$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=0 \\ 3A+B-C+D=0 \\ -2A+C+E=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$A=1;\ B=-1,\ C=1;\ D=-1,\ E=1$

Assim,

$$I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2-x+1}+\frac{-x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{-2x-1+1}{x^2-x+1}\,dx+\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{-2x+1-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\,dx+\int\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{-2x+1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(-2x+1)dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-x+1\right)^{-1}}{-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arc\ tg\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{5\sqrt{3}}{9}arc\ tg\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{x+1}{3\left(x^2-x+1\right)}+C$$

15. $\int\frac{4x^4}{x^4-x^3-6x^2+4x+8}dx$

$$=\int\left(4+\frac{4x^3+24x^2-16x-32}{(x-2)^2(x+2)(x+1)}\right)dx$$

$$=\int 4dx+\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}\right)dx$$

Calculando A,B,C, e D:

$$4x^3+24x^2-16x-32\equiv A(x-2)^2(x+2)+B(x-2)^2(x+1)+C\,(x-2)(x+2)(x+1)+D\,(x+2)(x+1)$$

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ -2A-3B+C+D=24 \\ -4A-4C+3D=-16 \\ 8A+4B-4C+2D=-32 \end{cases}$$

$A=\frac{4}{9}$; $B=-4$; $C=\frac{68}{9}$; $D=\frac{16}{3}$

Assim,

$$I=4x+\int\frac{\frac{4}{9}dx}{x+1}+\int\frac{-4dx}{x+2}+\int\frac{\frac{68}{9}dx}{x-2}+\int\frac{\frac{16}{3}dx}{(x-2)^2}$$

$$=4x+\frac{4}{9}\ln|x+1|-4\ln|x+2|+\frac{68}{9}\ln|x-2|+\frac{16}{3}\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C$$

16. $\int\frac{x^2}{3x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}dx$

$$I=\int\frac{\frac{1}{3}x^2}{x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{x^2dx}{x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(1+\frac{\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}}{x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int dx+\frac{1}{6}\int\left(\frac{A}{x-\frac{1}{2}}+\frac{B}{x+\frac{1}{3}}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[x+\frac{1}{6}\int\left(\frac{\frac{9}{5}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{4}{5}}{x+\frac{1}{3}}\right)dx\right]+C$$

$$=\frac{1}{3}x+\frac{1}{10}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|-\frac{2}{45}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|+C$$

17. $\int\frac{dx}{x^2+9x}$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9} \right) dx$$

$$= \int \frac{1/9}{x} dx + \int \frac{-1/9x}{x^2 + 9} dx$$

$$= \frac{1}{9} \ln |x| + \frac{-1}{9} \cdot \frac{1}{2} \ln |x^2 + 9| + C$$

$$= \frac{1}{9} \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 9) \right) + C$$

18. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + 1} dx + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 4} dx$$

Calculando A,B,C, e D:

$$1 \equiv (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ 4A + C = 0 \\ 4B + D' = 1 \end{cases}$$

$A = 0$; $B = 1/3$; $C = 0$; $D = -1/3$

Assim,

$$I = \int \frac{1/3}{x^2 + 1} dx + \int \frac{-1/3}{x^2 + 4} dx$$

$$= \frac{1}{3} arc\ tg\ x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} arc\ tg\ \frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{1}{3} arc\ tg\ x - \frac{1}{6} arc\ tg\ \frac{x}{2} + C$$

19. $\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1} \right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \right) dx$$

Calculando A, B e C

$$x^2+2x+2 \equiv A\left(x^2+x+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+1\right)$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C+A-B=2 \\ A-C=2 \end{cases}$$

$$A=5/3\ ;\ B=-2/3\ ;\ C=-1/3$$

Assim,

$$I=\int\left(1+\frac{5/3}{x-1}+\frac{-\frac{2}{3}x+\frac{-1}{3}}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=x+\frac{5}{3}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$=x+\frac{5}{3}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|+C$$

20. $\int\frac{x^3dx}{\left(x^2+2\right)^2}$

Fazendo

$$\frac{x^3}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}$$

Calculando A,B,C e D

$$x^3 \equiv \left(Ax+B\right)\left(x^2+2\right)+Cx+D$$

$$x^3 \equiv Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx+D$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ 2A+C=0 \ \Rightarrow\ C=-2 \\ 2B+D=0 \ \Rightarrow\ D=0 \end{cases}$$

Assim,

$$I = \int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| - \frac{\left(x^2+2\right)^{-1}}{-1} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + \frac{1}{x^2+2} + C$$

21. $\int \frac{dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$

$$\frac{1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

Calculando A,B,C e D

$$1 \equiv A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = -A \quad \therefore \quad A = -1$

$x = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = D \quad \therefore \quad D = 1$

$A + B = 0$

$B = -A \quad \therefore \quad B = 1$

$3A + B - C + D = 0 \;\therefore\; C = -1$

Assim,

$$I = \int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right)dx$$
$$= -\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$$
$$= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

22. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\,(x+1)^2}$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

Calculando A,B,C e D

$$x \equiv A\,(x-1)\,(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2\,(x+1) + D(x-1)^2$$
$$x \equiv A\,(x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1) + Bx^2 + 2Bx + B + C(x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + x + 1) + Dx^2 - 2Dx + D$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - C + D = 0 \\ -A + 2B - C - 2D = 1 \\ -A + B + C + D = 0 \end{cases}$$

$$A = 0, B = 1/4, C = 0, D = -1/4$$

Assim,

$$I = \int \left(\frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{-1/4}{(x+1)^2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{4}\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C$$

23. $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} dx$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Calculando A,B,C e D

$$x^2 + 2x - 1 \equiv A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx + D)(x-1)^2$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad 2 = 2B \quad \therefore \quad B = 1$$

$$x^2 + 2x - 1 \equiv A(x^3 + x - x^2 - 1) + Bx^2 + B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 2C + D = 1 \\ A + C - 2D = 2 \\ -A + B + D = -1 \end{cases}$$

$$A = 1, B = 1, C = -1, D = -1$$

Assim,

$$I = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-x-1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \int \frac{-x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - arc\ tg\ x + C$$

24. Verificar a formula

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\frac{1}{u^2-a^2} = \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a}$$

Calculando A eB

$1 \equiv A(u+a) + B(u-a)$

$u = a \quad \rightarrow \quad 1 = 2a\,A \quad \therefore \quad A = {}^{1}\!/_{2a}$

$u = -a \quad \rightarrow \quad 1 = -2a\,B \quad \therefore \quad B = {}^{-1}\!/_{2a}$

Assim,

$$I = \int \frac{du}{a^2-u^2} = -\int \frac{du}{u^2-a^2}$$

$$= -\left[\int \frac{{}^{1}\!/_{2}a}{u-a}du + \int \frac{{}^{-1}\!/_{2}a}{u+a}du \right]$$

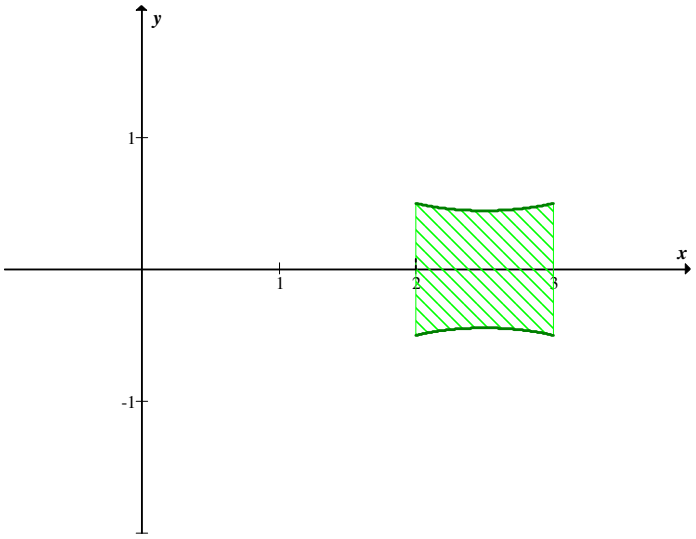
$$= \frac{-1}{2a}\ln|u-a| + \frac{1}{2a}\ln|u+a| + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

25. Calcular a área da região limitada pelas curvas $y = \frac{1}{(x-1)(x-4)}$, $y = \frac{1}{(1-x)(x-4)}$,

$x = 2$ e $x = 3$

A Figura que segue mostra a área.



$$A=\int_2^3\left(\frac{1}{(1-x)(x-4)}-\frac{1}{(x-1)(x-4)}\right)dx$$

$$=\int_2^3\frac{-2}{(x-1)(x-4)}dx$$

Fazendo:

$$\frac{-2}{(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}$$

Calculando A e B:

$$-2\equiv A(x-4)+B(x-1)$$

$$x=4 \quad\rightarrow\quad -2=3B \quad\therefore\quad B=-2/3$$

$$x=1 \quad\rightarrow\quad -2=-3A \quad\therefore\quad A=2/3$$

Assim,

$$\int\frac{-2dx}{(x-1)(x-4)}=\int\left(\frac{2/3}{x-1}-\frac{2/3}{x-4}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln|x-4|+C$$

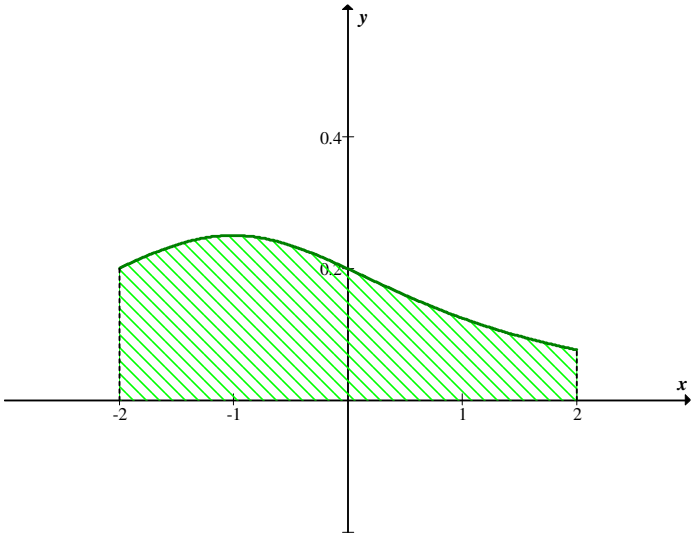
$$A=\left[\left(\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln|x-4|\right)\right]_2^3$$

$$=\frac{2}{3}(\ln 2-\ln 1)-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{2}{3}\ln 2=\frac{4}{3}\ln 2 u.a.$$

26. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$ de $x = -2$ ate $x = 2$

A Figura que segue mostra a área.



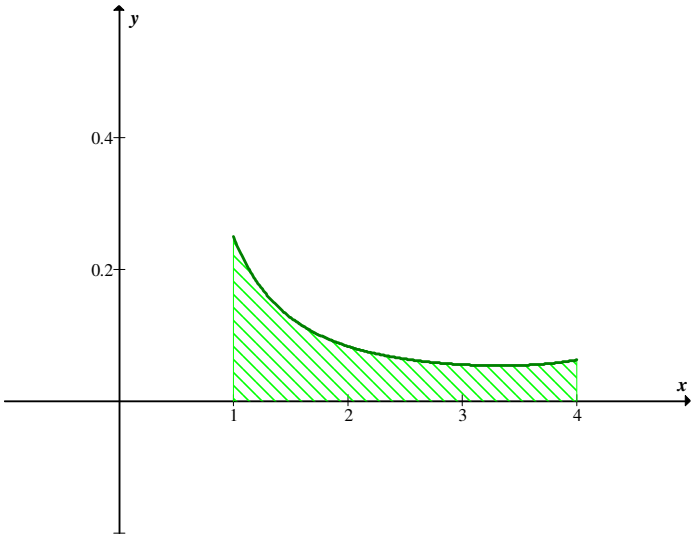
$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2}\, arc\ tg\ \frac{x+1}{2}\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\, arc\ tg\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} arc\ tg\left(-\frac{1}{2}\right) u.a.$$

27. Calcular a área da região sob o gráfico $y = \dfrac{-1}{x^2(x-5)}$ de $x = 1$ ate $x = 4$

A Figura que segue mostra a área.



$$I = \int \frac{-dx}{x^2(x-5)}$$

$$\frac{1}{x^2(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5}$$

$$1 \equiv A(x-5)x + B(x-5) + Cx^2$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = -5B \quad \therefore \quad B = -\,{}^{1}\!/_{5}$$
$$x = 5 \quad \rightarrow \quad 1 = 25C \quad \therefore \quad C = {}^{1}\!/_{25}$$

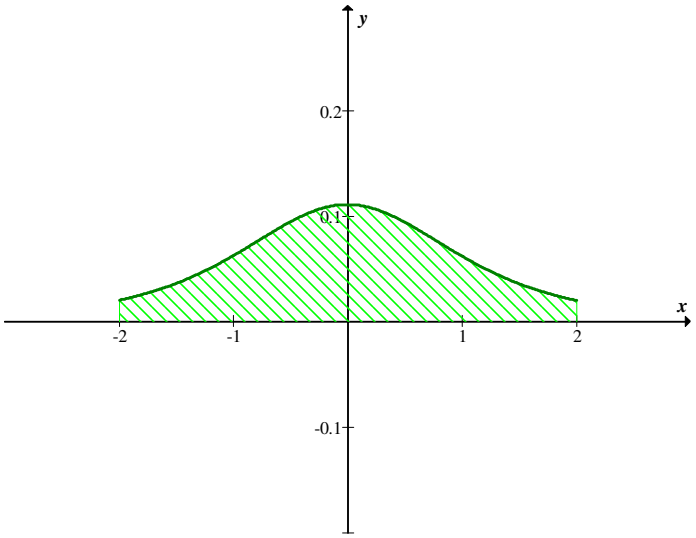
$$A + C = 0 \quad \therefore \quad A = {}^{-1}\!/_{25}$$

$$I = -\int \left(\frac{-1/25}{x} + \frac{-1/5}{x^2} + \frac{1/25}{x-5} \right) dx$$
$$= \frac{1}{25} \ln|x| + \frac{1}{5}.\frac{1}{x} - \frac{1}{25} \ln|x-5| + C$$

$$A = \left(\frac{1}{25} \ln|x| + \frac{1}{5}.\frac{1}{x} - \frac{1}{25} \ln|x-5| \right)\Big|_1^4$$
$$= \frac{1}{25} \ln 4 + \frac{-1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \ln 4$$
$$= \left(\frac{2}{25} \ln 4 + \frac{3}{20} \right) u.a.$$

28. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \dfrac{1}{\left(x^2+3\right)^2}$ de $x = -2$ ate $x = 2$

A Figura que segue mostra a área.



$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$x = \sqrt{3}\ tg\ \theta$$

$$dx = \sqrt{3}\ \sec^2\theta\ d\theta$$

$$x^2 + 3 = 3\ tg^2\theta + 3$$

$$= 3\left(tg^2\theta + 1\right)$$

$$= 3\sec^2\theta$$

$$I = \int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{9\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\int \cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sen\ 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{2}\ arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\,.\,2\,.\,\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+x^2}}\right)$$

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{18} arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2\,.\left(3+x^2\right)} \right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9} arc\ tg\ \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{21} u.a.$$

29. Investigar as integrais impróprias

(a) $I = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x-5)}$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2(x-5)}$$

$$\frac{1}{x^2(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5}$$

$$= \frac{A(x-5)x + B(x-5) + C\left(x^2\right)}{x^2(x-5)}$$

$$1 = A(x-5)x + B(x-5) + C\left(x^2\right)$$

$$x = 5 \quad \Rightarrow \quad 1 = C\,.\,25 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{25}$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = B\,.\,(-5) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{5}$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -4A - 4B + C$$

$$1 = -4A - \frac{4}{5} + \frac{1}{25}$$

$$4A = \frac{4}{5} + \frac{1}{25} - 1 = \frac{20+1-25}{25}$$

$$4A = \frac{-4}{25}$$

$$A = -\frac{1}{25}$$

$$I_1 = \int -\frac{1}{25}.\frac{dx}{x} + \int -\frac{1}{5}\frac{dx}{x^2} + \int \frac{1}{25}\frac{dx}{x-5}$$
$$= -\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int x^{-2}dx - \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x-5}$$
$$= -\frac{1}{25}\ln|x| + \frac{1}{5x} + \frac{1}{25}\ln|x-5| + c$$
$$= \frac{1}{5x} + \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x-5}{x}\right| + c$$

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_{10}^{b}\frac{dx}{x^2(x-5)}$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{5x} + \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x-5}{x}\right|\right)\Bigg|_{10}^{b}$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\ln\left|\frac{b-5}{b}\right|\right] - \frac{1}{5.10} - \frac{1}{25}\ln\left|\frac{10-5}{10}\right|$$
$$= -\frac{1}{50} - \frac{1}{25}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{25} - \frac{1}{50}$$

A integral converse e tem como resultado $\frac{\ln 2}{25} - \frac{1}{50}$.

(b) $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2(x-5)}$

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2(x-5)} = \lim_{r\to0^+}\int_r^2 \frac{dx}{x^2(x-5)}$$
$$= \lim_{r\to0^+}\left(\frac{1}{5x} + \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x-5}{x}\right|\right)\Bigg|_r^2$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{25}\ln\frac{3}{2} - \lim_{r\to0^+}\left(\frac{1}{5r} + \frac{1}{25}\ln\left|\frac{r-5}{r}\right|\right)$$
$$= +\infty$$

A integral diverge.

c) $I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x-5)}$

$$I = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x-5)}$$

$$= \int_5^{10} \frac{dx}{x^2(x-5)} + \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x-5)}$$

$$I_1 = \int_5^{10} \frac{dx}{x^2(x-5)} = \lim_{r \to 5^+} \int_r^{10} \frac{dx}{x^2(x-5)}$$

$$= \lim_{r \to 5^+} \left(\frac{1}{5x} + \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x-5}{x} \right| \right) \Bigg|_r^{10}$$

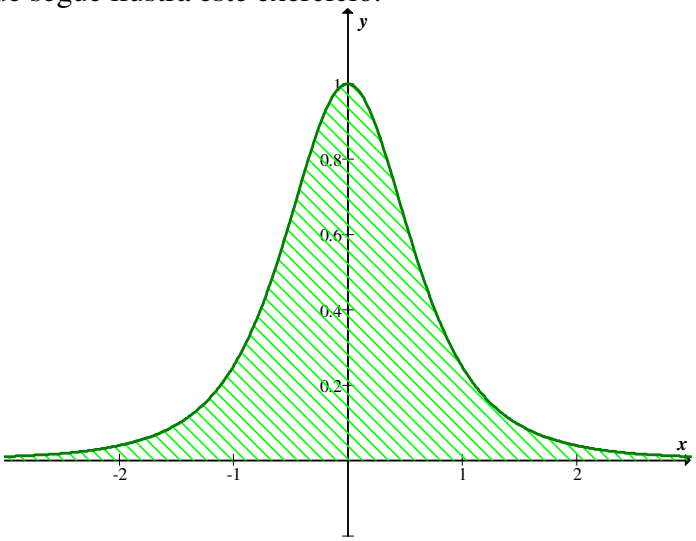
$$= \lim_{r \to 5^+} \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{25} \ln \left| \frac{10-5}{10} \right| \right) - \left(\frac{1}{5r} + \frac{1}{25} \ln \left| \frac{r-5}{r} \right| \right)$$

$$= +\infty$$

A integral diverge

30. Determinar, se possível, a área da região sob o gráfico da função $y = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ de $-\infty$ a $+\infty$.

A Figura que segue ilustra este exercício.



$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x\left(x^2+1\right)^{1-2}}{2\,.\,(2-1)} + \frac{1}{2\,.\,1}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{2-1}}$$

$$= \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\;x + c$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como o integrando é uma função par, basta investigar a integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Temos,

$$I_1 = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}arc\,tg\;x \right)\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{1}{2}arc\,tg\left(+\infty\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Logo $I = 2\,.\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

7.9 – EXERCÍCIOS – pg. 333

Nos exercícios de 1 a 14, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{(1+sen\ x)}{sen\ x(1+\cos\ x)}dx$

Fazendo:

$t = tg\ \frac{x}{2}$

Temos:

$$I = \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2\,t}{1+t^2}\,\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1+t^2+2t)}{(1+t^2)^2}}{\frac{4t}{(1+t^2)^2}}dt = \int \frac{2(t+1)^2}{4t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{(t+1)^2}{t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+1}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$= \frac{tg^2\frac{x}{2}}{4}+tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$$

2. $\int \frac{dx}{1+sen\ x+\cos\ x}$

Fazendo:

$t = tg\ \frac{x}{2}$

Temos:

$$= \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t+2}$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C$$

$$= \ln\left|tg\ \frac{x}{2}+1\right| + C$$

3. $\int \dfrac{2dx}{sen\ x + tg\ x}$

Fazendo:

$t = tg\ \dfrac{x}{2}$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{2\,.\,2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{1+t^2}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{4dt}{\left(1+t^2\right)\dfrac{2t\left(1-t^2\right)+2t\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}}$$

$$= \int \frac{4dt}{\left(1+t^2\right)}\cdot\frac{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}{2t-2t^3+2t+2t^3}$$

$$= \int \frac{4\left(1-t^2\right)}{4t}\,dt$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t}dt$$

$$= \int \frac{dt}{t} - \int t\ dt$$

$$= \ln|t| - \frac{t^2}{2} + C$$

$$= \ln\left|tg\ \frac{x}{2}\right| - \frac{tg^2\ \dfrac{x}{2}}{2} + C$$

4. $\int \dfrac{dx}{4+5\cos x}$

Fazendo:

$$t = tg\ \frac{x}{2}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4+5.\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{4+\frac{5-5t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{4+4t^2+5-5t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{9-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{9-t^2}$$

$$= \int \frac{2dt}{9-t^2}$$

$$= 2.\frac{1}{2.3}\ln\left|\frac{t+3}{t-3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+3}{t-3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+3}{tg\frac{x}{2}-3}\right| + C$$

5. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

Fazendo:

$$t = tg\ \frac{x}{2}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{3+3t^2+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{4+2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, arc\, tg \, \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \, arc\, tg \, \frac{tg \, \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C$$

6. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

Fazendo:

$t = tg \, \frac{x}{2}$

Temos:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2-1+t^2}$$

$$= \int \frac{2dt}{2t^2} = \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-1}{tg \, \frac{x}{2}} + C$$

7. $\int \frac{1+\cos x}{1-sen \, x} \, dx$

Fazendo:

$t = tg \, \frac{x}{2}$

Temos:

$$I=\int\frac{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int\frac{\dfrac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1+t^2-2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int\frac{2}{t^2-2t+1}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int\frac{4\,dt}{(t-1)^2(1+t^2)}$$

$$\frac{4}{(t-1)^2(1+t^2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$$4\equiv A(t-1)(t^2+1)+B(t^2+1)+(Ct+D)(t-1)^2$$

$$t=1\quad\Rightarrow\quad 4=2B\quad\therefore\quad B=2$$

$$4\equiv A(t^3+t-t^2-1)+Bt^2+B+(Ct+D)(t^2-2t+1)$$
$$\equiv At^3+At-At^2-A+Bt^2+B+Ct^3-2Ct^2+Ct+Dt^2-2Dt+D$$

$$\begin{cases}A+C=0\\-A+B-2C+D=0\\A+C-2D=0\\-A+B+D=4\end{cases}$$

$$A=-2,B=2,C=2,D=0$$

$$I=\int\left(\frac{-2}{t-1}+\frac{2}{(t-1)^2}+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt$$
$$=-2\ln|t-1|+2\,\frac{(t-1)^{-1}}{-1}+\ln|t^2+1|+C$$
$$=-2\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|-\frac{2}{tg\left(\dfrac{x}{2}\right)-1}+\ln\left|tg^2\frac{x}{2}+1\right|+C$$

8. $\int \frac{dx}{3+sen\ 2x}$

Fazendo

$u = 2x$

$du = 2dx$

e

$t = tg\ \frac{u}{2}$

Temos:

$$I = \int \frac{\frac{du}{2}}{3+sen\ u} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2+2t+3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+1}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}.\frac{3}{\sqrt{8}}\ arc\ tg\ \frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}arc\ tg\ \frac{3\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}arc\ tg\ \frac{3t+1}{\sqrt{8}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}arc\ tg\ \frac{3tg\ \frac{u}{2}+1}{\sqrt{8}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}arc\ tg\ \frac{3tg\ x+1}{\sqrt{8}}+C$$

9. $\int \frac{\cos(2t-1)}{2-\cos(2t-1)}dt$

Fazendo:

$u = 2t - 1$

$du = 2dt$

e

$t = tg\ \frac{u}{2}$

Temos:

$$I = \frac{\cos u}{2 - \cos u} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt}{\frac{2+2t^2-1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1+t^2}{3t^2+1} dt$$

$$= \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)(3t^2+1)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)\left(t^2+\frac{1}{3}\right)} dt$$

Usando:

$$\frac{1-t^2}{(1+t^2)(t^2+1/3)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1/3}$$

$$1 - t^2 \equiv (At+B)(t^2+1/3) + (Ct+D)(1+t^2)$$

$A + C = 0$

$B + D = -1$

$\frac{1}{3}A + C = 0$

$\frac{1}{3}B + D = 1$

$A = 0, B = -3, C = 0, D = 2$

$$I = \frac{1}{3}\int\left(\frac{-3}{1+t^2}+\frac{2}{t^2+1/3}\right)dt$$

$$= -arctgt + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}t) + C$$

$$= -arctg\left(tg\,\frac{2t-1}{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}tg\,\frac{2t-1}{2}\right)+C.$$

10. $\int \frac{dt}{3+sent+\cos t}$

Fazendo $t = tg\,\frac{u}{2}$:

$$I = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$= \int \frac{2du}{1+u^2}\cdot\frac{1+u^2}{2u^2+2u+4}$$

$$= \int \frac{du}{u^2+u+2} = \int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arc\,tg\,\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}arc\,tg\,\frac{2u+1}{\sqrt{7}}+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}arc\,tg\left(\frac{2tg\,\frac{t}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+C$$

11. $\int \frac{e^x dx}{4sen\,e^x - 3\cos e^x}$

Fazendo

$u = e^x$

$du = e^x dx$

$$I = \int \frac{du}{4sen\,u - 3\cos u}$$

Fazendo $t = tg\frac{u}{2}$:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2} - 3.\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{8t-3+3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3t^2+8t-3}$$

$$= \int \frac{\frac{2}{3}dt}{t^2+\frac{8t}{3}-1}$$

Fazendo

$$\frac{\frac{2}{3}}{t^2+\frac{8t}{3}-1} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{2}{3} \equiv A\left(t - 1/3\right) + B(t+3)$$

$$t = 1/3 \quad \Rightarrow \quad B = 1/5$$

$$t = -3 \quad \Rightarrow \quad A = -1/5$$

Temos:

$$I = \int \left(\frac{-1/5}{t+3} + \frac{1/5}{t-1/3} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{5}\ln(t+3) + \frac{1}{5}\ln\left|t - 1/3\right| + C$$

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|tg\frac{u}{2}+3\right| + \frac{1}{5}\ln\left|tg\frac{u}{2}-\frac{1}{3}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|tg\frac{e^x}{2}+3\right| + \frac{1}{5}\ln\left|tg\frac{e^x}{2}-\frac{1}{3}\right| + C$$

12. $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\cos\theta}$

Fazendo $t = tg\,\frac{\theta}{2}$:

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)dt}{(1-t^2)^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{1+t^2}{2}dt$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt$$

$$= -\int\left(1+\frac{-2}{t^2+1}\right)dt$$

$$= -t + 2arc\ tg\ t + C$$

$$= -tg\,\frac{\theta}{2} + 2arc\ tg\left(tg\,\frac{\theta}{2}\right) + C$$

13. $\int \frac{dx}{sen\ x + \cos\ x}$

Fazendo $t = tg\,\frac{x}{2}$:

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= -\int \frac{2dt}{t^2-2t-1}$$

$$\frac{1}{t^2-2t-1} = \frac{A}{\left(t-1-\sqrt{2}\right)} + \frac{B}{\left(t-1+\sqrt{2}\right)}$$

$$1 \equiv A\left(t-1+\sqrt{2}\right) + B\left(t-1-\sqrt{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$I = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t-1+\sqrt{2}} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t-1-\sqrt{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t-1+\sqrt{2} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| tg\ \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| tg\ \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2} \right| + C$$

14. $\int \frac{d\theta}{4 - sen\ \theta + \cos \theta}$

Fazendo $t = tg\ \frac{\theta}{2}$:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{4+4t^2-2t+1-t^2}$$

$$= \int \frac{2dt}{3t^2-2t+5}$$

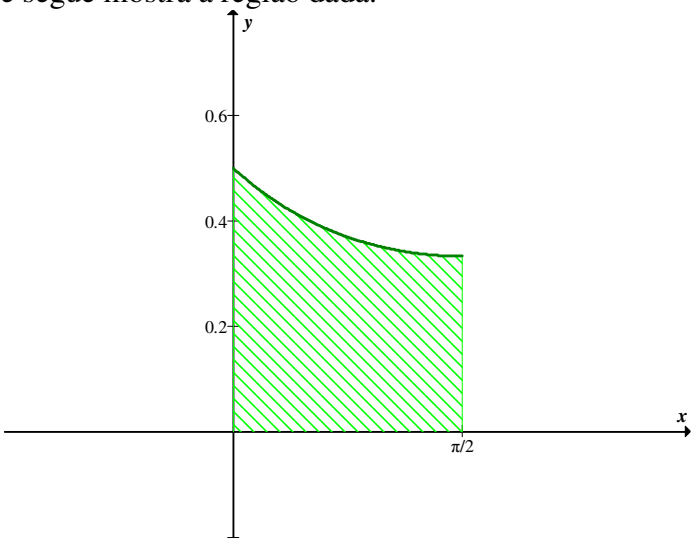
$$= \int \frac{\frac{2}{3}dt}{t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{5}{3}} = \int \frac{\frac{2}{3}dt}{\left(t - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{14}{9}}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{\sqrt{14}}{3}}\ arc\ tg\ \frac{t - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{14}}{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\ arc\ tg\ \frac{3t-1}{\sqrt{14}} + C = \frac{2}{\sqrt{14}}\ arc\ tg\ \frac{3tg\ \frac{\theta}{2} - 1}{\sqrt{14}} + C$$

15. Calcular a área sob a curva $y = \dfrac{1}{2 + sen\ x}$, de $x = 0$ a $x = \dfrac{\pi}{2}$.

A figura que segue mostra a região dada.



$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + sen\ x}$$

$$I = \int \frac{dx}{2 + sen\ x}$$

Fazendo $t = tg\dfrac{x}{2}$:

$$I = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2 + \dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2 + 2t^2 + 2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{2t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} arc\ tg\ \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{2tg\frac{\pi}{4}+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{2tg0+1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

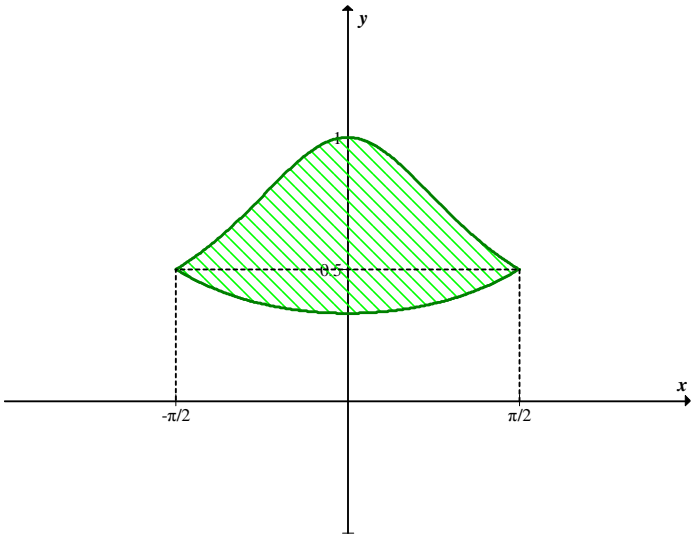
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2\pi - \pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} u.a.$$

16. Calcule a área limitada pelas curvas $y = \frac{1}{2+\cos x}$ e $y = \frac{1}{2-\cos x}$ entre $-\pi/2$ e $\pi/2$

A figura que segue mostra a região dada.



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2-\cos x}-\frac{1}{2+\cos x}\right)dx$$

$$I=\int\left(\frac{1}{2-\cos x}-\frac{1}{2+\cos x}\right)dx$$

Fazendo $t=tg\,\frac{x}{2}$:

$$I=\int\left(\frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}-\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int\frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{3t^2+1}-\int\frac{2dt}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{t^2+3}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+1/3}-2\int\frac{dt}{t^2+3}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arc\,tg\sqrt{3}\,t+(-2)\frac{1}{\sqrt{3}}arc\,tg\,\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arc\,tg\left(\sqrt{3}\,tg\,\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}arc\,tg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,tg\,\frac{x}{2}\right)+C$$

Portanto,

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\left(\sqrt{3}\ tg\ \frac{x}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\ arc\ tg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ tg\ \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\left(-\sqrt{3}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\ u.a.$$

Nos exercícios de 17 a 33 calcular a integral indefinida:

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x - x^2 - 6}}$

Fazendo

$$\sqrt{5x - x^2 - 6} = (x-2).t$$

$$5x - x^2 - 6 = (x-2)^2 .t^2$$

$$-(x-2)(x-3) = (x-2)^2 .t^2$$

$$t^2 = \frac{-(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$t^2 = \frac{3-x}{x-2}$$

$$t = \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

temos que:

$$x = \frac{2t^2 + 3}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{-2t}{\left(1 + t^2\right)^2} dt$$

$$\sqrt{5x - x^2 - 6} = (x-2).t$$

$$= \frac{t}{1+t^2}$$

Assim,

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt}{\dfrac{2t^2+3}{1+t^2}\cdot\dfrac{t}{1+t^2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dt}{2t^2+3}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{6}}arc\ tg\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t + C$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{3}}arc\ tg\ \sqrt{\frac{2\left(3-x\right)}{3\left(x-2\right)}} + C$$

18. $\int \dfrac{dx}{\left(x+4\right)\sqrt{x^2+4x+9}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2+4x+9} = x+t$$

$$x = \frac{t^2-9}{4-2t}$$

$$dx = \frac{\left(4-2t\right)\left(2t\right)-\left(t^2-9\right)\left(-2\right)}{\left(4-2t\right)^2}dt$$

$$= \frac{8t-4t^2+2t^2-18}{\left(4-2t\right)^2}dt$$

$$= \frac{-2t^2+8t-18}{\left(4-2t\right)^2}dt$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t^2+8t-18}{(4-2t)^2}dt}{\dfrac{t^2-9+16-8t}{4-2t}\,\dfrac{t^2-9+4t-t^2}{4-2t}}$$

$$= \int \frac{-2t^2+8t-18}{\left(t^2-8t+7\right)\left(-t^2+4t-9\right)}\,dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-8t+7}$$

$$= 2\int \left(\frac{\frac{1}{6}}{t-7} - \frac{\frac{1}{6}}{t-1} \right) dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{6}\ln|t-7| - \frac{1}{6}\ln|t-1| \right) + C$$

$$= \frac{2}{6}\ln\left|\frac{t-7}{t-1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+9}-x-7}{\sqrt{x^2+4x+9}-x-1}\right| + C$$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x-3}}$

Fazendo:

$$\sqrt{4x^2+x-3} = 2x+t$$

$$4x^2+x-3 = 4x^2+4xt+t^2$$

$$x = \frac{t^2+3}{1-4t}$$

$$dx = \frac{2t-4t^2+12}{(1-4t)^2}dt$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{2t - 4t^2 + 12}{\left(1 - 4t^2\right)}}{\dfrac{t^2+3}{1-4t}\left(2 \cdot \dfrac{t^2+3}{1-4t} + t\right)} dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2+3} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg \left(\frac{\sqrt{4x^2 + x - 3} - 2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$

Fazendo:

$$\sqrt{1 + x + x^2} = x + t$$

$$1 + x + x^2 = x^2 + 2xt + t^2$$

$$x - 2x\,t = t^2 - 1$$

$$x(1 - 2t) = t^2 - 1$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}$$

$$dx = \frac{(1 - 2t)\,2t - \left(t^2 - 1\right)(-2)}{(1 - 2t)^2} dt$$

$$= \frac{2t - 4t^2 + 2t^2 - 2}{(1 - 2t)^2} dt$$

$$= \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(1 - 2t)^2} dt$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t}$$

Temos:

$$I = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(1 - 2t)^2} \cdot \frac{1 - 2t}{-t^2 + t - 1} dt$$

$$= \int \frac{2\,dt}{1 - 2t} = -\ln|1 - 2t| + C$$

$$= -\ln\left|1 - 2\sqrt{1 + x + x^2} + 2x\right| + C$$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$

Fazendo:

$$\sqrt{2+x-x^2} = xt+\sqrt{2}$$

$$2+x-x^2 = x^2t^2+2\sqrt{2}xt+2$$

$$1-x = xt^2+2\sqrt{2}t$$

$$x = \frac{1-2\sqrt{2}\,t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2\sqrt{2}t^2-2t-2\sqrt{2}}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\,t^2+t+\sqrt{2}}{1+t^2}(-2)dt$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2-\sqrt{2}\,t^2+t+\sqrt{2}}{\left(1+t^2\right)^2}}{\dfrac{1-2\sqrt{2}\,t}{1+t^2}\cdot\dfrac{-\sqrt{2}\,t^2+t+\sqrt{2}}{1+t^2}}\,dt$$

$$= \int \frac{-2dt}{1-2\sqrt{2}t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|1-2\sqrt{2}\,t\right|+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|1-2\sqrt{2}\,\frac{\left(\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}\right)}{x}\right|+C$$

22. $\int \frac{x+1}{\left(2x+x^2\right)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$

Fazendo:

$$\sqrt{2x+x^2} = x+t$$

$$x = \frac{t^2}{2-2t}$$

$$dx = \frac{-2t^2+4t}{(2-2t)^2}\,dt$$

$$\sqrt{2x+x^2} = \frac{-t^2+2t}{2-2t}$$

$$x+1=\frac{t^2-2t+2}{2-2t}$$

$$2x+x^2=(x+t)^2=\frac{\left(-t^2+2t\right)^2}{(2-2t)^2}$$

Temos:

$$I=\int\frac{\dfrac{t^2-2t+2}{2-2t}\cdot\dfrac{-2t^2+4t^2}{(2-2t)^2}}{\dfrac{\left(-t^2+2t\right)^2}{(2-2t)^2}\cdot\dfrac{-t^2+2t}{2-2t}}dt$$

$$=\int\frac{2\left(t^2-2t+2\right)}{\left(-t^2+2t\right)^2}dt$$

$$=2\int\frac{1/2}{t^2}dt+2\int\frac{1/2}{(t-2)^2}dt$$

$$=\frac{-1}{t}-\frac{1}{t-2}+C$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2x+x^2}-x}-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}-x-2}+C$$

23. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2-2x-3}=x+t$$

$$x=\frac{-3-t^2}{2t+2}$$

$$dx=\frac{-2t^2-4t+6}{(2t+2)^2}dt$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}=\frac{-3-t^2}{2t+2}+t=\frac{t^2+2t-3}{2t+2}$$

$$x-1=\frac{-3-t^2}{2t+2}-1=\frac{-t^2-2t-5}{2t+2}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t^2-4t+6}{(2t+2)^2}\,dt}{\dfrac{-t^2-2t-5}{2t+2}\,\dfrac{t^2+2t-3}{2t+2}}$$

$$= \int \frac{-2\,dt}{-t^2-2t-5}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{+t^2+2t+5}$$

$$= 2\,.\,\frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{t+1}{2} + C$$

$$= arc\,tg\,\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x+1}{2} + C$$

24. $\int \dfrac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{2x^2\,\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

Fazendo:

$$\sqrt{1+x+x^2} = x+t$$

$$x = \frac{t^2-1}{1-2t}$$

$$dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$$

$$x^2 = \frac{(t^2-1)^2}{(1-2t)^2}$$

$$1-\sqrt{1+x+x^2} = 1-x-t = \frac{t^2-3t+2}{1-2t}$$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{t^2-3t+2}{1-2t}\cdot\dfrac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}}{\dfrac{(t^2-1)^2}{(1-2t)^2}\dfrac{-t^2+t-1}{1-2t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(t^2-3t+2)}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{(t-1)(t-2)}{(t-1)^2(t+1)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t-2}{(t-1)^2(t+1)^2}\,dt$$

$$= \int \left[\frac{-1/4}{t-1} + \frac{1/4}{t+1} + \frac{3/2}{(t+1)^2}\right] dt$$

$$= \frac{-1}{4}\ln(t-1) + \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{3}{2}\frac{(t+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{3}{2(t+1)} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-x+1}{\sqrt{1+x+x^2}-x-1}\right| - \frac{3}{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-x+1\right)} + C$$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2+3x+2} = (x+1)t$$

$$(x+1)(x+2) = (x+1)^2 t^2$$

$$x+2 = (x+1)t^2$$

$$x - x\,t^2 = t^2 - 2$$

$$x(1-t^2) = t^2 - 2$$

$$x = \frac{t^2-2}{1-t^2}$$

$$dx = \frac{\left(1-t^2\right)2t - \left(t^2-2\right)\left(-2t\right)}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{2t - 2t^3 + 2t^3 - 4t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{-2t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} = \left(\frac{t^2-2}{1-t^2}+1\right)t$$

$$= \frac{\left(t^2-2+1-t^2\right)t}{1-t^2}$$

$$= \frac{-t}{1-t^2}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t}{\left(1-t^2\right)^2}}{\dfrac{-t}{1-t^2}}dt = \int \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$= \int \frac{2}{1-t^2}dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \ln\left|1-t\right| + \ln\left|1+t\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}}{1-\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+1+\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1-\sqrt{x^2+3x+2}}\right| + C$$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2+2x-3} = x+t$$
$$x^2+2x-3 = x^2+2xt+t^2$$
$$2x-2xt = t^2+3$$
$$x = \frac{t^2+3}{2-2t}$$

$$dx = \frac{(2-2t)\,2t-\left(t^2+3\right)(-2)}{(2-2t)^2}\,dt$$
$$= \frac{4t-4t^2+2t^2+6}{(2-2t)^2}\,dt$$
$$= \frac{-2t^2+4t+6}{(2-2t)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+2x-3} = \frac{t^2+3}{2-2t}+t$$
$$= \frac{t^2+3+2t-2t^2}{2-2t}$$
$$= \frac{-t^2+2t+3}{2-2t}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t^2+4t+6}{(2-2t)^2}}{\dfrac{-t^2+2t+3}{2-2t}}\,dt$$
$$= \int \frac{2}{2-2t}\,dt$$
$$= -\ln|2-2t|+C$$
$$= -\ln\left|2-2\left(\sqrt{2+2x-3}-x\right)\right|+C$$
$$= -\ln\left|\sqrt{2+2x-3}-x-1\right|+C$$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2+x} = x+t$$
$$x^2+x = x^2+2xt+t^2$$
$$x-2xt = t^2$$
$$x = \frac{t^2}{1-2t}$$

$$dx = \frac{(1-2t)2t - t^2(-2)}{(1-2t)^2}\,dt$$
$$= \frac{2t-4t^2+2t^2}{(1-2t)^2}\,dt$$
$$= \frac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+x} = \frac{t^2}{1-2t} + t$$
$$= \frac{t^2+t-2t^2}{1-2t}$$
$$= \frac{-t^2+t}{1-2t}$$

$$2x+1 = 2\,.\,\frac{t^2}{1-2t}+1$$
$$= \frac{2t^2+1-2t}{1-2t}$$

Temos:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2}}{\dfrac{2t^2-2t+1}{1-2t}\,.\,\dfrac{-t^2+t}{1-2t}}\,dt$$
$$= \int \frac{dt}{2t^2-2t+1}$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t^2-t+\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} arc\ tg\ \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= arc\ tg\ \frac{2t-1}{1} + C$$

$$= arc\ tg\ \left(2\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) - 1\right) + C$$

$$= arc\ tg\ \left(2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1\right) + C$$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+12x+5}}$

Fazendo:

$$\sqrt{9x^2+12x+5} = 3x + t$$

$$9x^2+12x+5 = 9x^2 + 6xt + t^2$$

$$12x - 6xt = t^2 - 5$$

$$x = \frac{t^2-5}{12-6t}$$

$$dx = \frac{(12-6t).2t - \left(t^2-5\right)(-6)}{(12-6t)^2} dt$$

$$= \frac{24t - 12t^2 + 6t^2 - 30}{(12-6t)^2} dt$$

$$= \frac{-6t^2 + 24t - 30}{(12-6t)^2} dt$$

$$\sqrt{9x^2+12x+5} = 3 \cdot \frac{t^2-5}{12-6t} + t$$

$$= \frac{3t^2 - 15 + 12t - 6t^2}{12-6t}$$

$$= \frac{-3t^2 + 12t - 15}{12-6t}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-6t^2+24t-30}{(12-6t)^2}}{\dfrac{-3t^2+12t-15}{12-6t}}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{12-6t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t-2}\,dt$$

$$= \frac{-1}{3}\ln|t-2| + C$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|2-\sqrt{9x^2+12+5}+3x\right| + C$$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x+5/4}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2-x+5/4} = x+t$$

$$x^2-x+5/4 = x^2+2xt+t^2$$

$$2xt+x = \frac{5}{4}-t^2$$

$$x = \frac{\frac{5}{4}-t^2}{2t+1}$$

$$dx = \frac{(2t+1)(-2t)-\left(\frac{5}{4}-t^2\right)^2.2}{(2t+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{-4t^2-2t-\frac{5}{2}+2t^2}{(2t+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{-2t^2-2t-5/2}{(2t+1)^2}\,dt$$

$$2x-1 = 2\,.\,\frac{5/4 - t^2}{2t+1} - 1$$

$$= \frac{5/2 - 2t^2 - 2t - 1}{2t-1} = \frac{-2t^2 - 2t + 3/2}{2t-1}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t^2 - 2t - 5/2}{(2t+1)^2}}{\dfrac{-2t^2 - 2t + 3/2}{2t-1} \cdot \dfrac{5/4 - t^2 + 2t^2 + t}{2t+1}}\, dt$$

$$= \int \frac{-2t^2 - 2t - 5/2}{\left(-2t^2 - 2t + 3/2\right)\left(t^2 + t + 5/4\right)} dt$$

$$= \int \frac{-2dt}{-2t^2 - 2t + 3/2}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + t - 3/4} = \int \left(\frac{A}{t - 1/2} + \frac{B}{t + 3/2} \right) dt$$

$$= \int \frac{1/2}{t - 1/2}\, dt + \int \frac{-1/2}{t + 3/2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| t - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| t + \frac{3}{2} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1/2}{t + 3/2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2t-1}{2t+3} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 - x + 5/4} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 5/4} - 2x + 3} \right| + C$$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 3}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2 + x - 3} = x + t$$

$$x^2 + x - 3 = x^2 + 2xt + t^2$$

$$x - 2xt = t^2 + 3$$

$$x = \frac{t^2 + 3}{1 - 2t}$$

$$dx = \frac{(1-2t)\,2t - (t^2+3)(-2)}{(1-2t)^2}\,dt$$

$$= \frac{2t - 4t^2 + 2t^2 + 6}{(1-2t)^2}\,dt$$

$$= \frac{-2t^2 + 2t + 6}{(1-2t)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+x-3} = \frac{t^2+3}{1-2t} + t$$

$$= \frac{t^2+3+t-2t^2}{1-2t}$$

$$= \frac{-t^2+t+3}{1-2t}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t^2+2t+6}{(1-2t)^2}}{\dfrac{t^2+3}{1-2t}\cdot\dfrac{-t^2+t+3}{1-2t}}dt$$

$$= \int \frac{-2t^2+2t+6}{(t^2+3)(-t^2+t+3)}dt$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+3}$$

$$= 2.\frac{1}{\sqrt{3}}arc\ tg\ \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}arc\ tg\ \frac{\sqrt{x^2+x-3}-x}{\sqrt{3}} + C$$

31. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-4x-4}}$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2-4x-4} = x + t$$

$$x^2 - 4x - 4 = x^2 + 2xt + t^2$$

$$2xt + 4x = -4 - t^2$$

$$x = \frac{-4-t^2}{2t+4}$$

$$dx = \frac{(2t+4)(-2t)-(-4-t^2)2}{(2t+4)^2}\,dt$$

$$= \frac{-4t^2-8t+8+2t^2}{(2t+4)^2}\,dt$$

$$= \frac{-2t^2-8t+8}{(2t+4)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2-4x-4} = \frac{-4-t^2}{2t+4}+t$$

$$= \frac{-4-t^2+2t^2+4t}{2t+4}$$

$$= \frac{t^2+4t-4}{2t+4}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{-2t^2-8t+8}{(2t+4)^2}}{\dfrac{-4-t^2}{2t+4}\cdot\dfrac{t^2+4t-4}{2t+4}}dt$$

$$= \int \frac{-2dt}{-4-t^2}$$

$$= \frac{2}{2}arc\ tg\ \frac{t}{2}+C$$

$$= arc\ tg\ \frac{\sqrt{x^2-4x-4}-x}{2}+C$$

32. $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

Fazendo:

$$\sqrt{x^2+2x} = x+t$$

$$x^2+2x = x^2+2xt+t^2$$

$$2x-2xt = t^2$$

$$x = \frac{t^2}{2-2t}$$

$$dx = \frac{-2t^2+4t}{(2-2t)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+2x} = \frac{-t^2+2t}{2-2t}$$

$$x+3 = \frac{t^2+6-6t}{2-2t}$$

Temos

$$I = \int \frac{\dfrac{t^2-6t+6}{2-2t}\cdot\dfrac{-2t^2+4t}{(2-2t)^2}}{\dfrac{-t^2+2t}{2-2t}}dt$$

$$= \int \frac{2\left(t^2-6t+6\right)}{(2-2t)^2}\,dt$$

$$= 2\int\left(\frac{1}{4}+\frac{-4t+5}{4t^2-8t+4}\right)dt$$

$$= 2\int\left(\frac{1}{4}+\frac{-4t+5}{4(t-1)^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\int\frac{-4t+5}{(t-1)^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}t-2\ln|t-1|+\frac{1}{2}\frac{(t-1)^{-1}}{-1}+C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)-2\ln\left|\sqrt{x^2+2x}-x-1\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x-1}+C$$

33. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Fazendo:

$$\sqrt{3-2x-x^2} = xt+\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-2-2\sqrt{3}\,t}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{2\sqrt{3}\,t^2+4t-2\sqrt{3}}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt$$

$$\sqrt{3-2x-x^2} = \frac{-\sqrt{3}t^2-2t+\sqrt{3}}{t^2+1}$$

Temos:

$$I = \int \frac{\dfrac{2\sqrt{3}\,t^2 + 4t - 2\sqrt{3}}{\left(t^2+1\right)^2}}{\dfrac{-\sqrt{3}t^2 - 2t + \sqrt{3}}{t^2+1}}\,dt$$

$$= \int \frac{-2}{t^2+1}dt$$

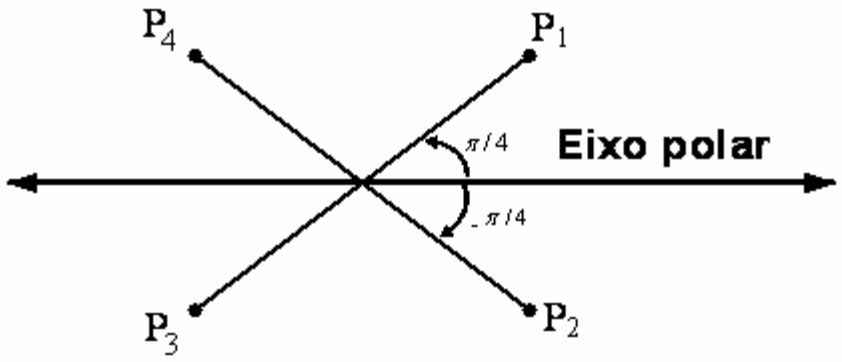
$$= -2arc\ tg\ t + C$$

$$= -2arc\ tg\ \frac{\sqrt{3-2x-x^2} - \sqrt{3}}{x} + C$$

8.11 – EXERCÍCIOS – pg. 379

1. Demarcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares.

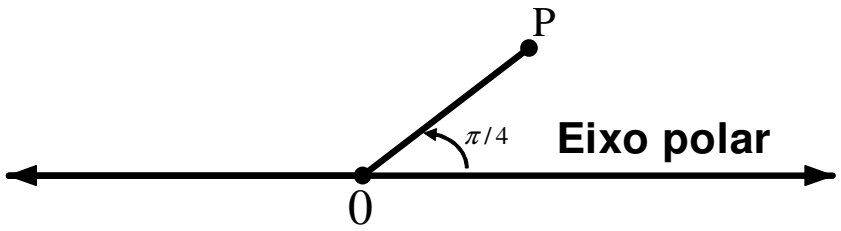
(a) $P_1\left(4, \pi/4\right)$
(b) $P_2\left(4, -\pi/4\right)$
(c) $P_3\left(-4, \pi/4\right)$
(d) $P_4\left(-4, -\pi/4\right)$



2. Em cada um dos itens, assinalar o ponto dado em coordenadas polares e depois escrever as coordenadas polares para o mesmo ponto tais que:

(i) r tenha sinal contrario
(ii) θ tenha sinal contrario

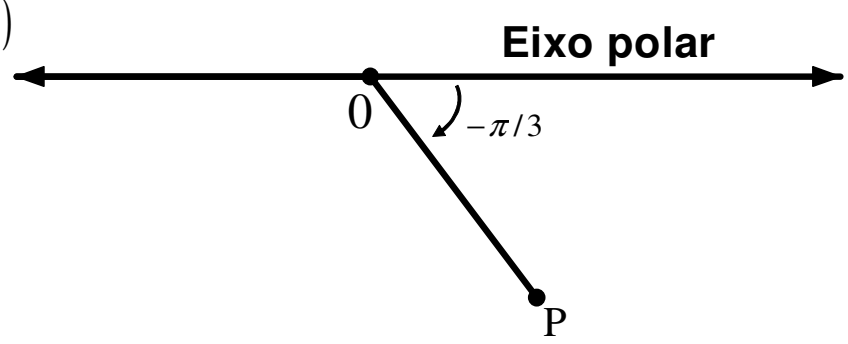
(a) $\left(2, \pi/4\right)$
(i) $\left(-2, 5\pi/4\right)$
(ii) $\left(2, -7\pi/4\right)$



b) $\left(\sqrt{2}, -\pi/3\right)$

(i) $\left(-\sqrt{2}, -4\pi/3\right)$

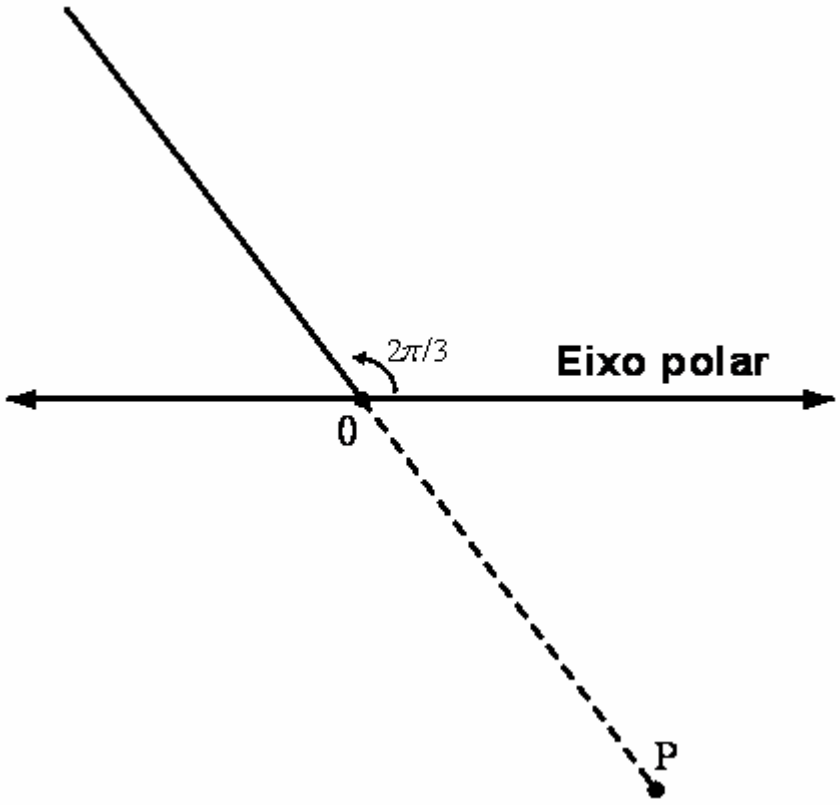
(ii) $\left(\sqrt{2}, 5\pi/3\right)$



(c) $\left(-5, 2\pi/3\right)$

(i) $\left(5, 5\pi/3\right)$

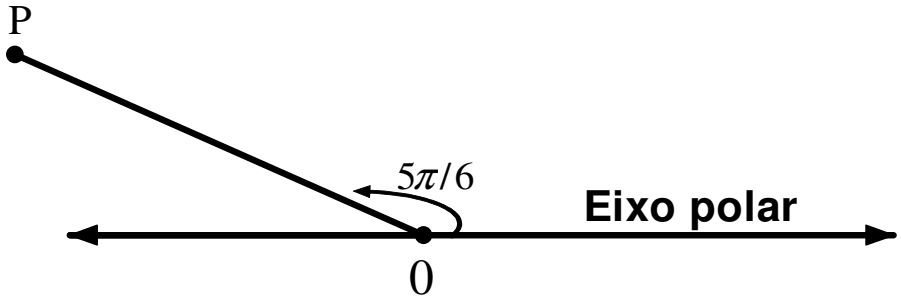
(ii) $\left(-5, -4\pi/3\right)$



(d) $\left(4, 5\pi/6\right)$

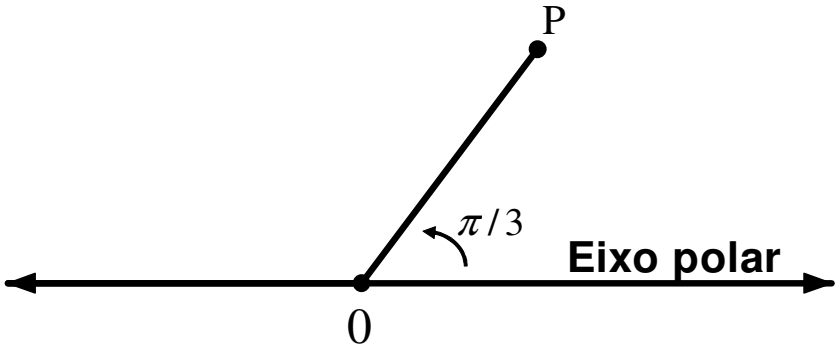
(i) $\left(-4, 11\pi/6\right)$

(ii) $\left(4, -7\pi/6\right)$



3. Demarcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares e encontrar suas coordenadas cartesianas.

a) $\left(3, \pi/3\right)$



$x = r \cos \theta$

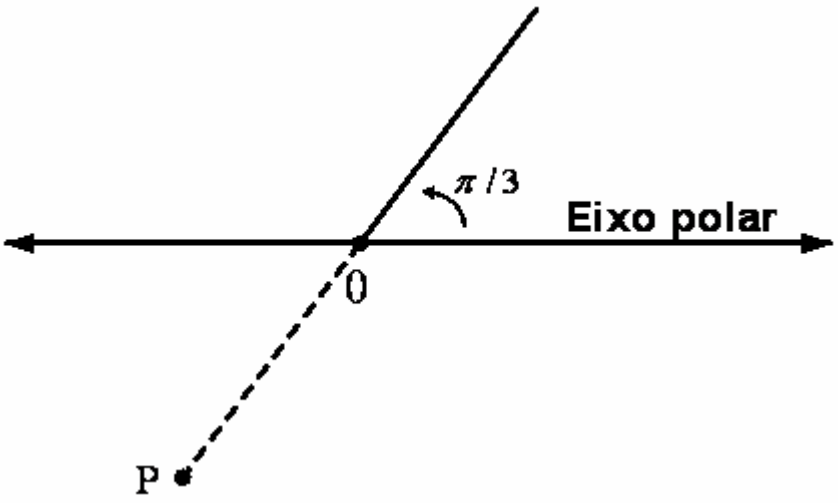
$x = 3 \cos \pi/3 \qquad y = r \; sen \; \theta$

$x = 3 \cdot \frac{1}{2} \qquad y = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 2{,}59$

$x = 1{,}5$

$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cong (1{,}5;\ 2{,}59)$

b) $\left(-3, +\pi/3\right)$



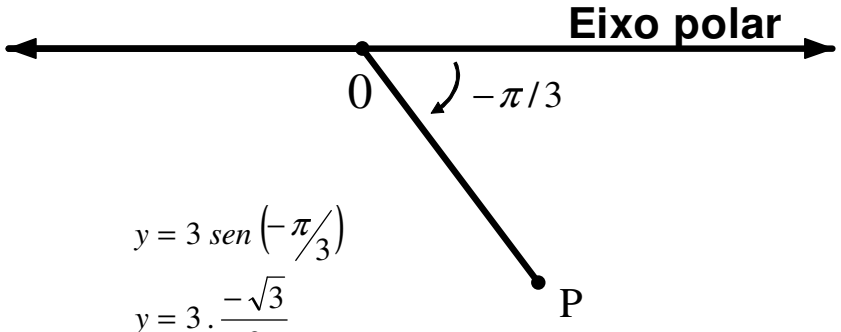
$x = -3 \cos \pi/3$ $\qquad$ $y = -3\ sen\ \pi/3$

$x = -3 \cdot \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y = -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = -1{,}5$ $\qquad$ $y \cong -2{,}59$

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \cong (-1{,}5; -2{,}59)$$

c) $\left(3, -\pi/3\right)$



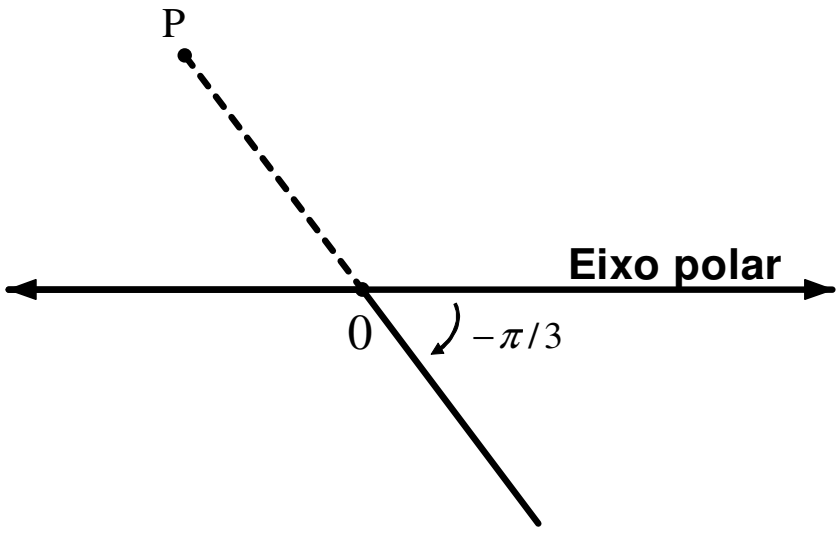
$x = 3 \cos \left(-\pi/3\right)$ $\qquad$ $y = 3\ sen \left(-\pi/3\right)$

$x = 3 \cdot \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y = 3 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$x = 1{,}5$ $\qquad$ $y \cong -2{,}59$

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \cong (1{,}5; -2{,}59)$$

d) $\left(-3, -\pi/3\right)$



$x = -3 \cos\left(-\pi/3\right)$ $\qquad$ $y = -3\ sen\left(-\pi/3\right)$

$x = -3 \,.\, \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y = -3 \,.\, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$x = -1{,}5$ $\qquad$ $y \cong 2{,}59$

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cong (-1{,}5;\ 2{,}59)$

4. Encontrar as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares.

a) $\left(-2, 2\pi/3\right)$

$x = -2 \cos 2\pi/3 = -2 \,.\, -1/2 = 1$

$\left(1, -\sqrt{3}\right)$

$y = -2\ sen\ 2\pi/3 = -2 \,.\, \sqrt{3}/2 = -\sqrt{3}$

b) $\left(4, 5\pi/8\right)$

$x = 4 \cos 5\pi/8 \cong -1{,}5307$

$(-1{,}5307,\ 3{,}6955)$

$y = 4\ sen\ 5\pi/8 \cong 3{,}6955$

c) $\left(3, 13\pi/4\right)$

$x = 3 \cos 13\pi/4 = -3\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$

$y = 3\ sen\ 13\pi/4 = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$

d) $\left(-10, \pi/2\right)$

$x = -10 \cos \pi/2 = -10 \,.\, 0 = 0$

$(0, -10)$

$y = -10 \; sen \; \pi/2 = -10 \,.\, 1 = -10$

e) $\left(-10, 3\pi/2\right)$

$x = -10 \cos 3\pi/2 = -10 \,.\, 0 = 0$

$(0, 10)$

$y = -10 \; sen \; 3\pi/2 = -10 \,.\, -1 = 10$

f) $(1, 0)$

$x = 1 \cos 0 = 1$

$(1, 0)$

$y = 1 \; sen \; 0 = 0$

5. Encontrar um par de coordenadas polares dos seguintes pontos:

a) $(1, 1)$

$$r = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ sen\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$

b) $(-1, 1)$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ sen\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$\left(\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$

c) $(-1,-1)$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ sen\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$\left(\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$

d) $(1,-1)$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ sen\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$\left(\sqrt{2}, -\pi/4\right)$ ou $\left(\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$

6. Usar.

a) $r > 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$;

b) $r < 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$;

c) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \le 0$;

d) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \le 0$;

para escrever os pontos $P_1\left(\sqrt{3}, -1\right)$ e $P_2\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ em coordenadas polares.

$P_1\left(\sqrt{3}, -1\right)$

$r = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad sen\,\theta = \frac{-1}{2}$ $\quad \theta = \frac{-\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{11\pi}{6}$

a) $\left(2, \frac{11\pi}{6}\right)$ b) $\left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ c) $\left(2, \frac{-\pi}{6}\right)$ d) $\left(-2, \frac{-7\pi}{6}\right)$

$P_2\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

$r = 2$

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad sen\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad \theta = \frac{5\pi}{4}$

a) $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$ b) $\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$ c) $\left(2, \frac{-3\pi}{4}\right)$ d) $\left(-2, \frac{-7\pi}{4}\right)$

7. Transformar as seguintes equações para coordenadas polares.

a) $x^2 + y^2 = 4$

$r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta = 4$

$r^2 = 4$

$r = \pm 2$

b) $x = 4$

$r\cos\theta = 4$

c) $y = 2$

$r\ sen\,\theta = 2$

d) $y + x = 0$

$r\ sen\,\theta + r\cos\theta = 0$

$r\left(sen\,\theta + \cos\theta\right) = 0$

$\begin{cases} r = \text{qualquer} \\ sen\,\theta = -\cos\theta \end{cases}$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

e) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$$r^2 - 2r\cos\theta = 0$$
$$r - 2\cos\theta = 0$$
$$r = 2\cos\theta$$

f) $x^2 + y^2 - 6y = 0$

$$r^2 - 6r\ sen\theta = 0$$
$$r = 6\ sen\ \theta$$

8. Transformar as seguintes equações para coordenadas cartesianas

a) $r = \cos\theta$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$x^2 + y^2 - x = 0$$

b) $r = 2\ sen\ \theta$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

c) $r = \dfrac{1}{\cos\theta + sen\ \theta}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$
$$x + y = 1$$

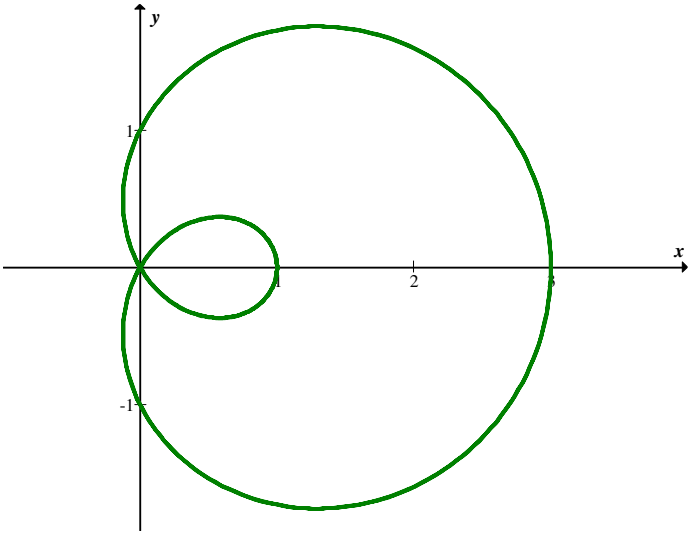
d) $r = a,\ a > 0$

$\sqrt{x^2 + y^2} = a$

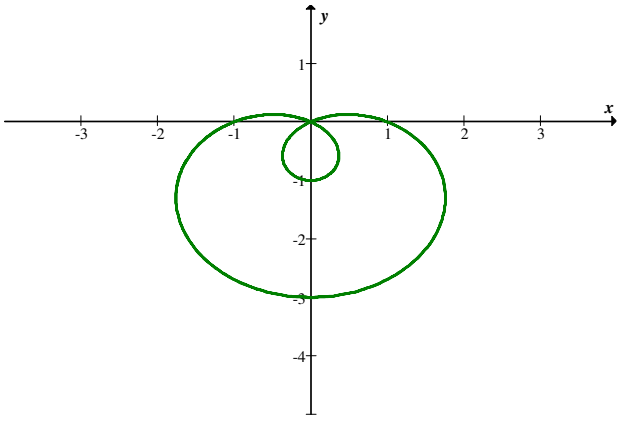
$x^2 + y^2 = a^2$

Nos exercícios de 9 a 32 esboçar o gráfico das curvas dadas em coordenadas polares.

9. $r = 1 + 2\cos\theta$



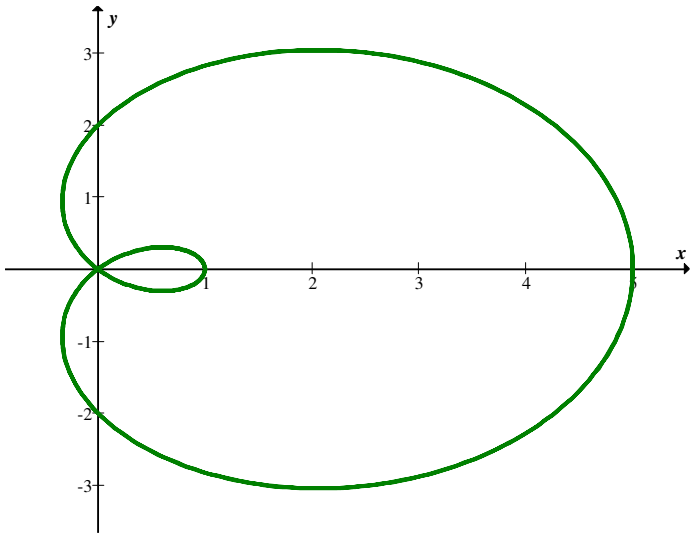
10. $r = 1 - 2\,sen\,\theta$



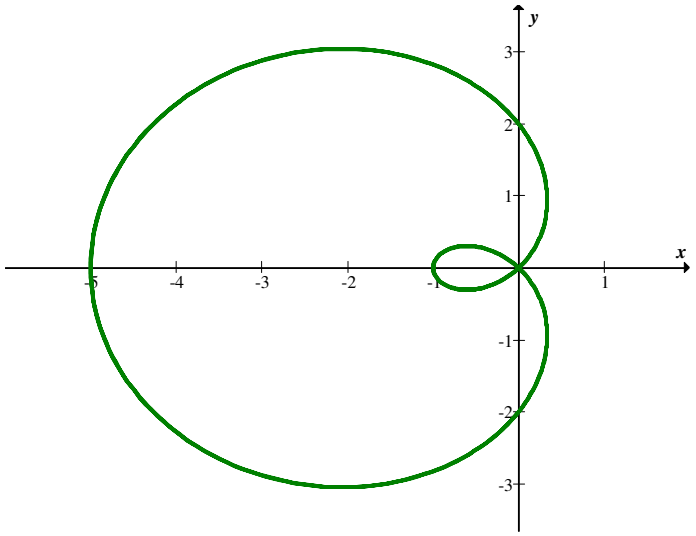
11. $r = a \pm b\cos\theta$

$a = 2$ e $b = 3$
$a = 3$ e $b = 2$
$a = b = 3$

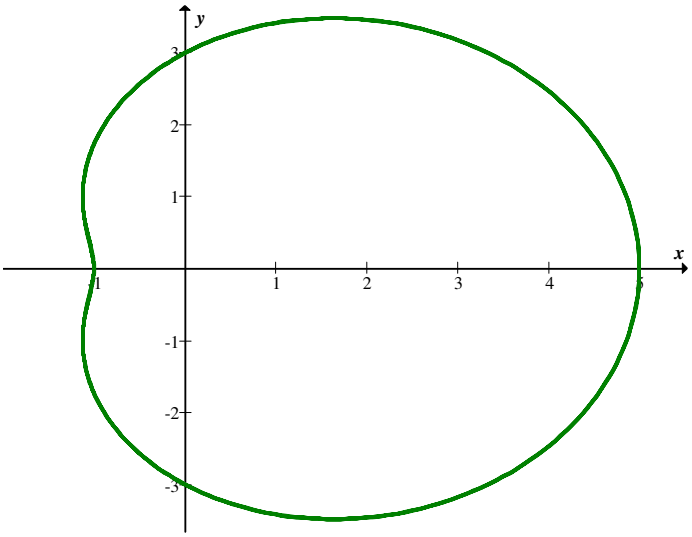
$r = 2 + 3\cos\theta$



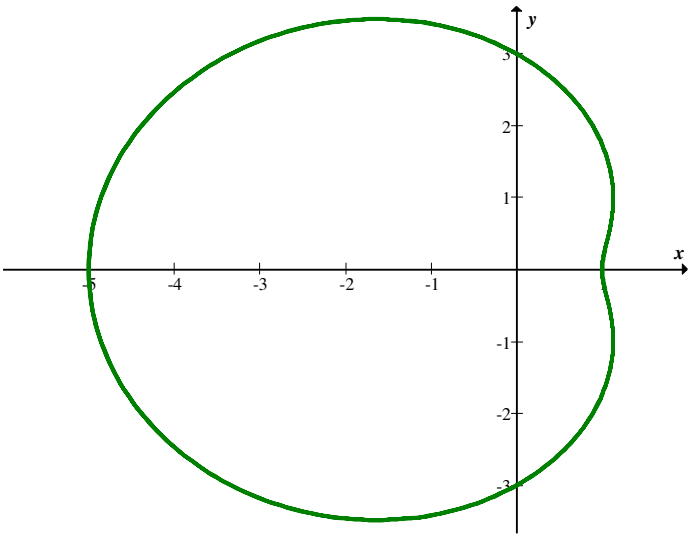
$r = 2 - 3\cos\theta$



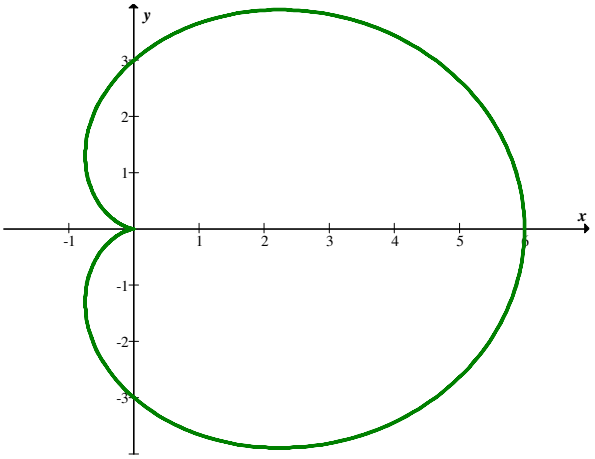
$r = 3 + 2\cos\theta$

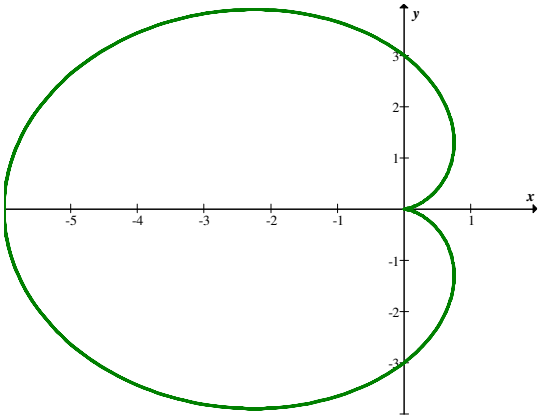


$r = 3 - 2\cos\theta$

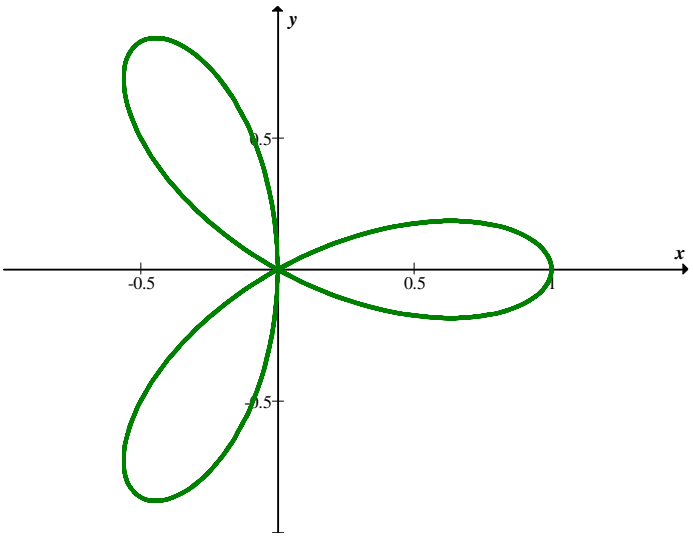


$r = 3 + 3\cos\theta$ e $r = 3 - 3\cos\theta$

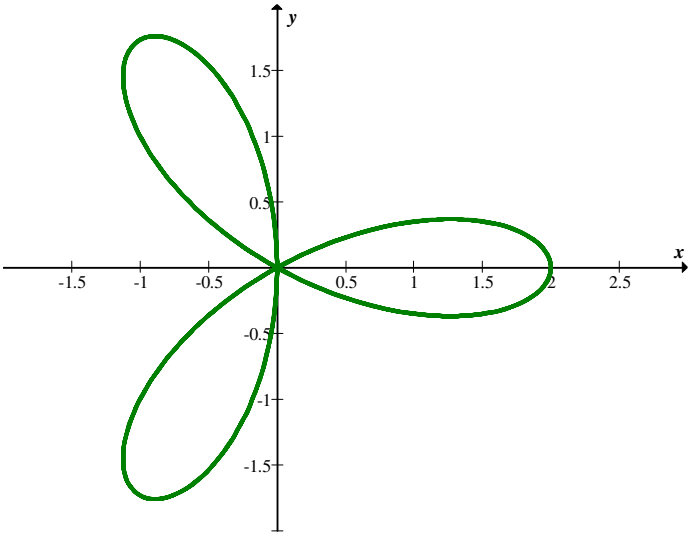




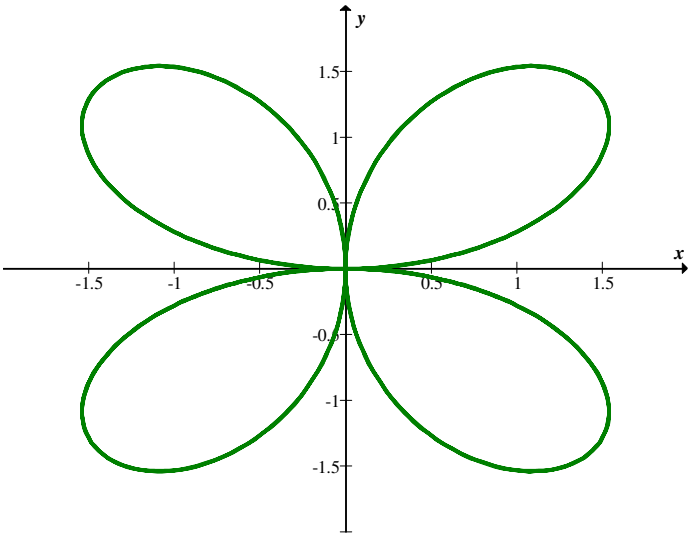
12. $r = \cos 3\theta$



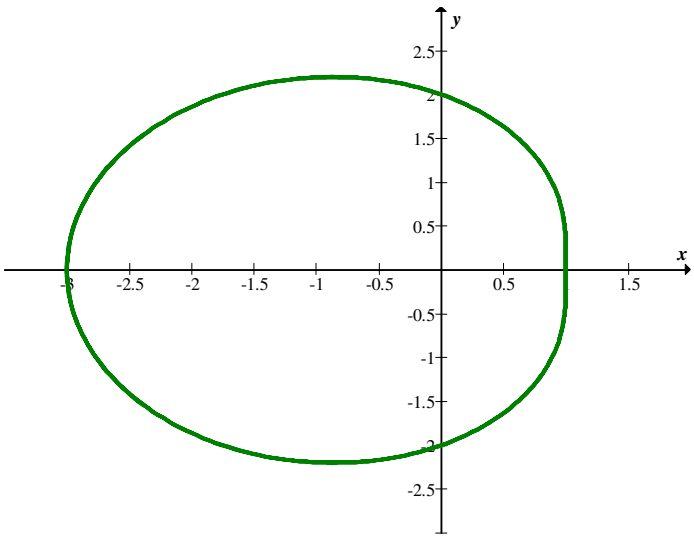
13. $r = 2 \cos 3\theta$



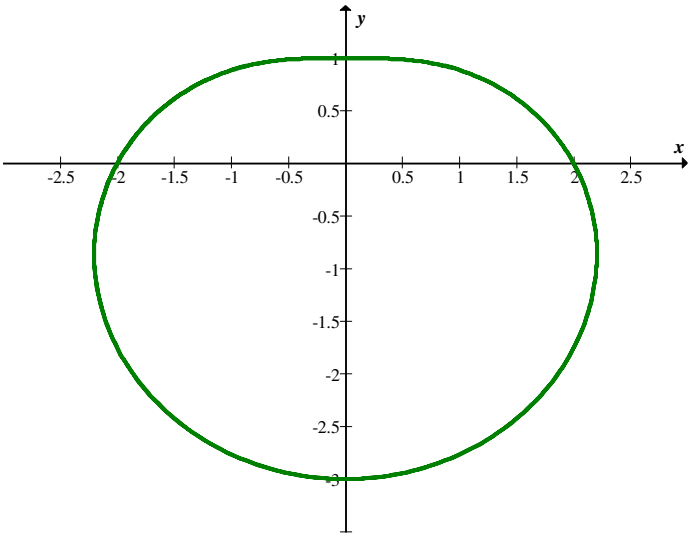
14. $r = 2\ sen\ 2\theta$



15. $r = 2 - \cos\theta$



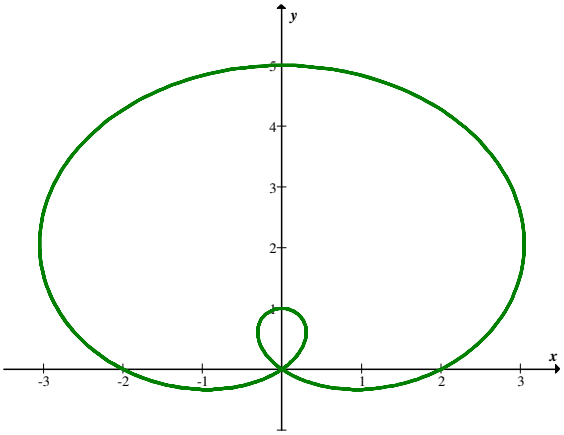
16. $r = 2 - sen\,\theta$

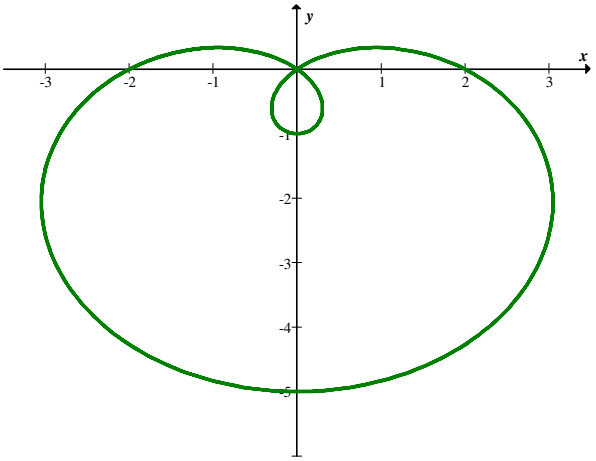


17. $r = a \pm b \; sen \; \theta$

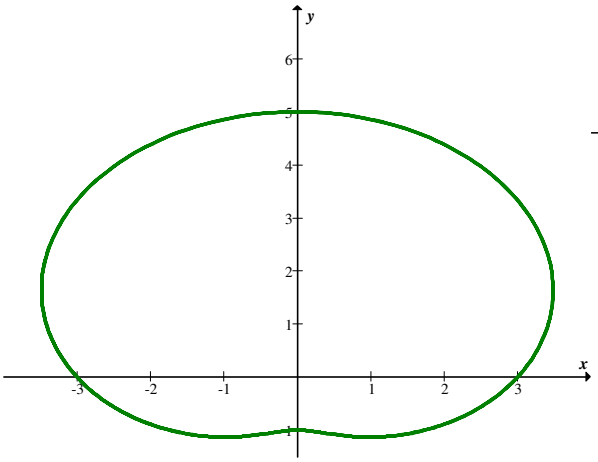
$a = 2$ e $b = 3$
$a = 3$ e $b = 2$
$a = b = 2$

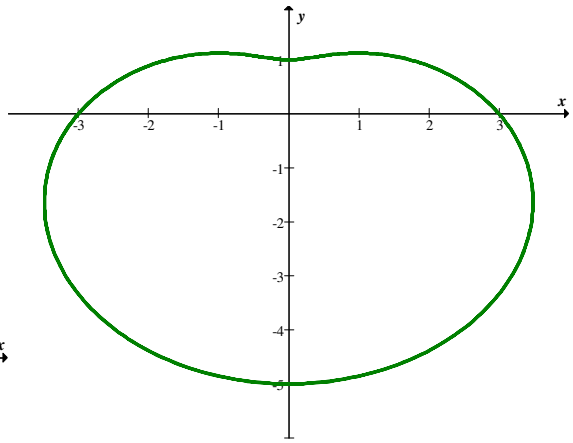
$r = 2 + 3 \; sen \; \theta$ $\qquad$ $r = 2 - 3 \; sen \; \theta$



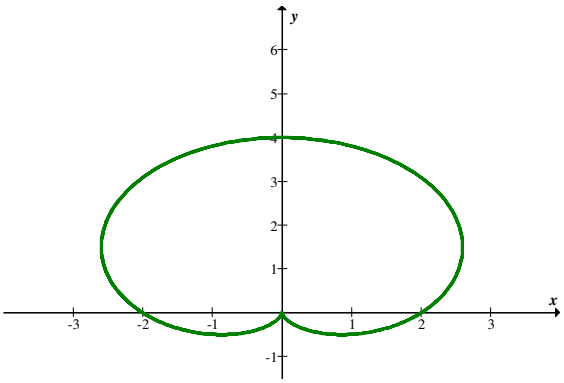


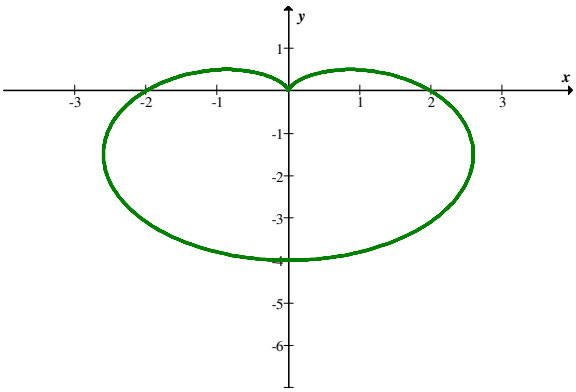
$r = 3 + 2 \; sen \; \theta$ $\qquad$ $r = 3 - 2 \; sen \; \theta$



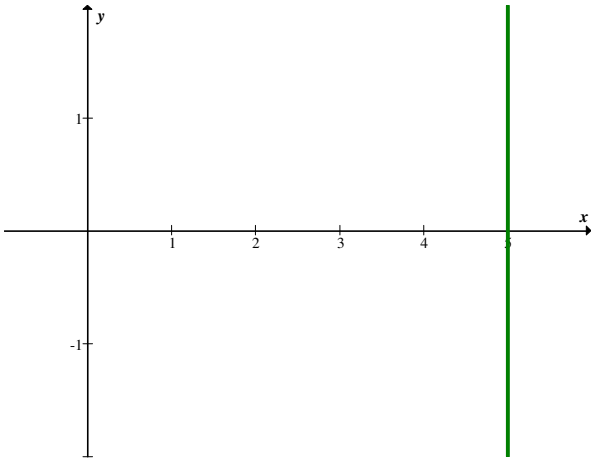


$r = 2 + 2\ sen\ \theta$ $r = 2 - 2\ sen\ \theta$

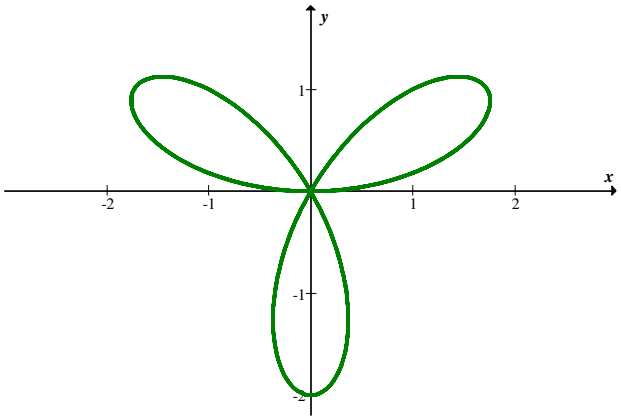




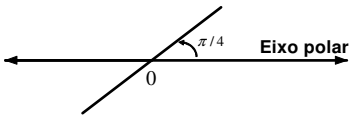
18. $r \cos \theta = 5$



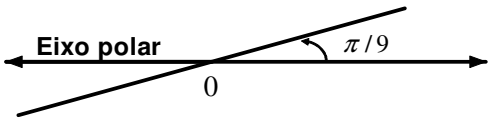
19. $r = 2\ sen\ 3\theta$



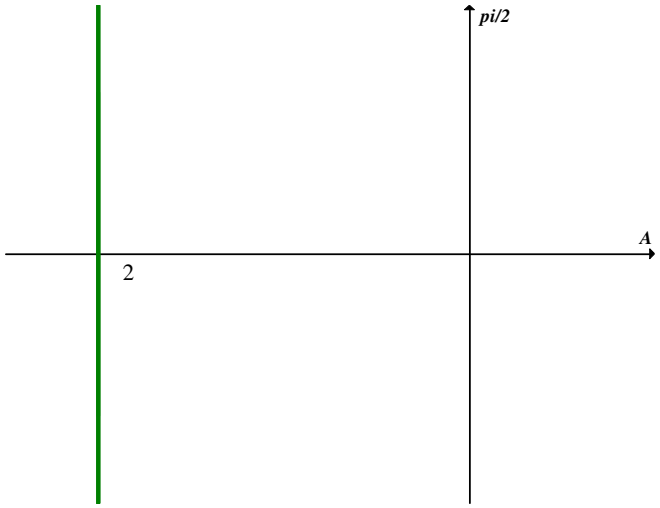
20. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$



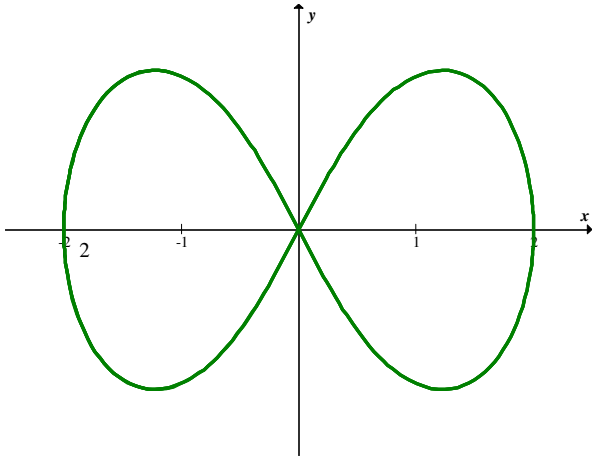
21. $\theta = \dfrac{\pi}{9}$



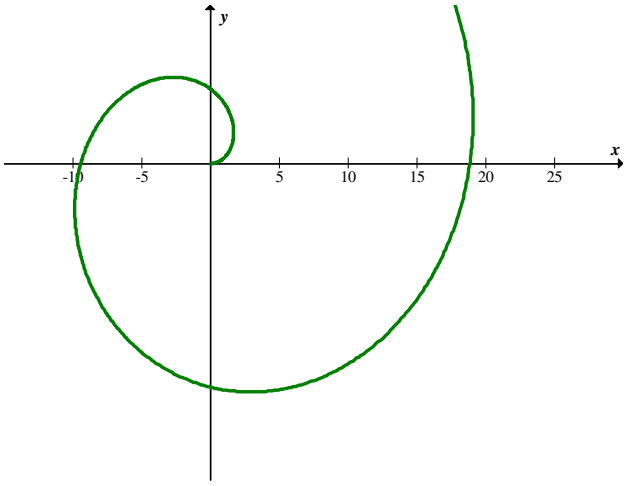
22. $5r\cos\theta = -10$



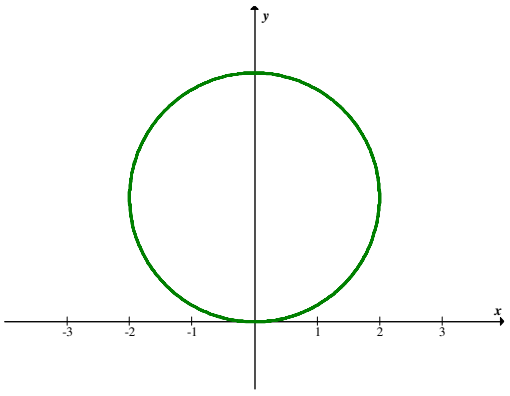
23. $r^2 = 4\cos 2\theta$



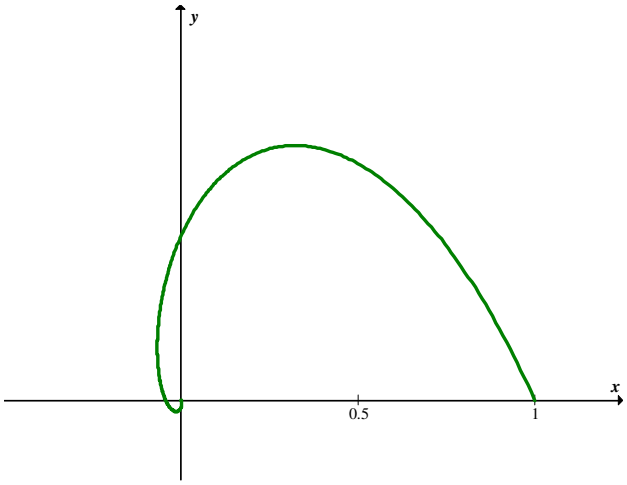
24. $r = 3\theta,\ \theta \geq 0$



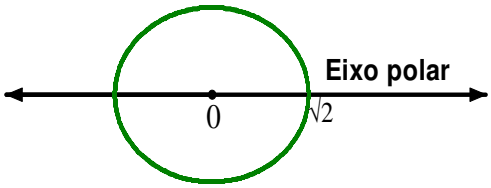
25. $r = 4\ sen\ \theta$



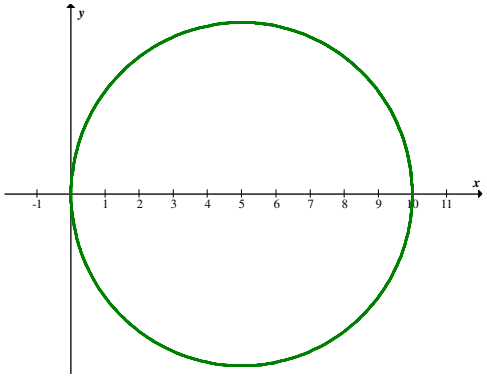
26. $r = e^{-\theta}, \theta \geq 0$



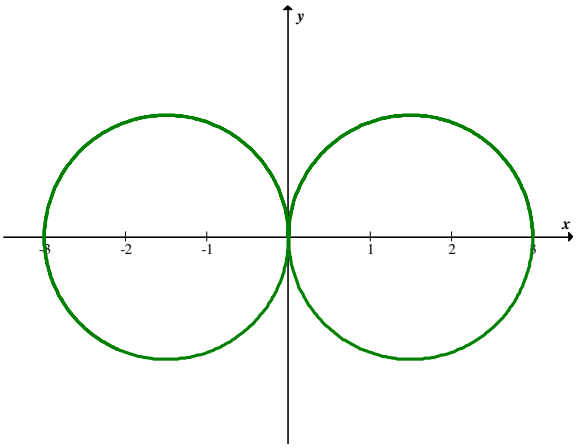
27. $r = \sqrt{2}$



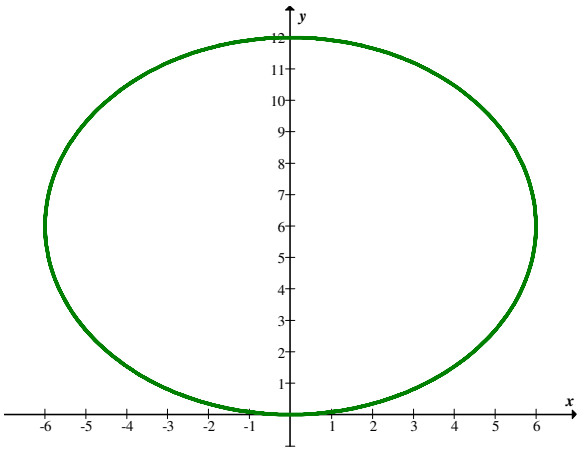
28. $r = 10 \cos \theta$



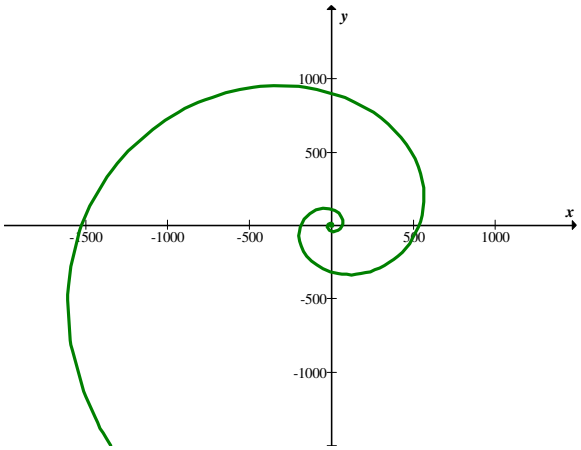
29. $r = 2\left|\cos\theta\right|$



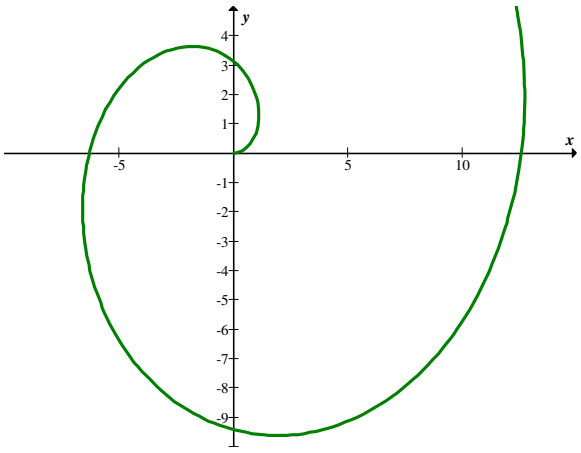
30. $r = 12\ sen\ \theta$



31. $r = e^{\theta/3}$



32. $r = 2\theta$



Nos exercícios 33 a 37, encontrar o comprimento de arco da curva dada.

33. $r = e^{\theta}$, entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$

$$s = \int_0^{\pi/3} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{2e^{2\theta}}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/3} e^{\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\theta}\Big|_0^{\pi/3} = \sqrt{2}\left(e^{\pi/3} - 1\right) u.c.$$

34. $r = 1 + \cos\theta$

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(-sen\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{sen^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 4 \,.\, 2\, sen\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= 8\left(sen\frac{\pi}{2} - sen\, 0\right)$$

$$= 8 \;\; u.c.$$

35. $r = 2\, a\, sen\,\theta$

$$s = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{(2a\cos\theta)^2 + (2a\, sen\,\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{4a^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} 2a\, d\theta$$

$$= 4a\,\frac{\pi}{2} = 2a\pi\, u.c$$

36. $r = 3\,\theta^2$, de $\theta = 0$ até $\theta = {}^{2\pi}\!/_{3}$

$$s = \int_0^{2\pi/3} \sqrt{36\,\theta^2 + 9\theta^4}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi/3} \sqrt{9\,\theta^2\left(4+\theta^2\right)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi/3} 3\theta\left(4+\theta^2\right)^{1/2} d\theta$$

$$= 3\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{\left(4+\theta^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\pi/3}$$

$$= \frac{8}{27}\left(9+\pi^2\right)^{3/2} - 8\,u.c$$

37. $r = e^{2\theta}$, de $\theta = 0$ até $\theta = 3\pi/2$

$$s = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\left(2e^{2\theta}\right)^2 + e^{4\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi/2} \sqrt{4e^{4\theta} + e^{4\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi/2} \sqrt{5}\; e^{2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{2\theta}\Bigg|_0^{3\pi/2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{3\pi} - 1\right) u.\,c.$$

38. Achar o comprimento da cardióide $r = 10(1 - \cos\theta)$.

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(10\ sen\ \theta)^2 + 100(1-\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{200 - 200\cos\theta}\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{200}\ \sqrt{1-\cos\theta}\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} 10\sqrt{2}\ \sqrt{2\ sen^2\ \frac{\theta}{2}}\ d\theta$$

$$= 2\,.\,10\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\int_0^{\pi} sen\ \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -40\,.\,2\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= -80\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$= 80\ u.\,c.$$

Nos exercícios 39 a 46, encontrar a integral que dá o comprimento total da curva dada.

39. $r^2 = 9\cos 2\theta$

$$r = (9\cos 2\,\theta)^{1/2} = 3(\cos 2\theta)^{1/2}$$

$$r' = \frac{3}{2}(\cos 2\theta)^{-1/2}(-sen\ 2\theta)2 = \frac{-3sen\ 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$s = 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{9\ sen^2 2\theta}{\cos 2\theta} + 9\cos 2\theta}\ d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{9\ sen^2 2\theta + 9\cos^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\ d\theta$$

$$= 12\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

40. $r = 3\ sen\ 3\theta$

$$s = 6\int_0^{\pi/6} \sqrt{(9\cos 3\theta)^2 + 9\,sen^2 3\theta}\; d\theta$$

$$= 18\int_0^{\pi/6} \sqrt{9\cos^2 3\theta + sen^2 3\theta}\; d\theta$$

41. $r = 4\cos 4\theta$

$$s = 16\int_0^{\pi/8} \sqrt{(-16 sen\, 4\theta)^2 + 16\cos^2 4\theta}\; d\theta$$

$$= 64\int_0^{\pi/8} \sqrt{16\,sen^2 4\theta + \cos^2 4\theta}\; d\theta$$

42. $r^2 = 9\,sen\,2\theta$

$$r = 3(sen\,2\,\theta)^{1/2}$$

$$r' = 3\frac{1}{2}(sen\,2\,\theta)^{-1/2}.\cos 2\,\theta\,.\,2$$

$$s = 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{9\cos^2 2\theta}{sen\,2\theta} + 9\,sen 2\theta}\; d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{9\cos^2 2\theta + 9\,sen^2 2\theta}{sen\,2\theta}}\; d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{9}{sen\,2\theta}}\; d\theta$$

$$= 12\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{sen\,2\theta}}$$

43. $r = 2 - 3\cos\theta$

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(3\ sen\ \theta)^2 + (2 - 3\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{9\ sen^2\ \theta + 4 - 12\cos\theta + 9\cos^2\ \theta}\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{13 - 12\cos\theta}\ d\theta$$

44. $r = 4 - 2\ sen\ \theta$

$$s = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{(-2\cos\theta)^2 + (4 - 2\ sen\ \theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4\cos^2\ \theta + 16 - 16\ sen\ \theta + 4\ sen^2\ \theta}\ d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{20 - 16\ sen\ \theta}\ d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{5 - 4\ sen\ \theta}\ d\theta$$

45. $r = 3 + 2\cos\theta$

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(-2\ sen\ \theta)^2 + (3 + 2\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\ sen^2\ \theta + 9 + 12\cos\theta + 4\cos^2\ \theta}\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{13 + 12\cos\theta}\ d\theta$$

46. $r = 4 + 2\ sen\ \theta$

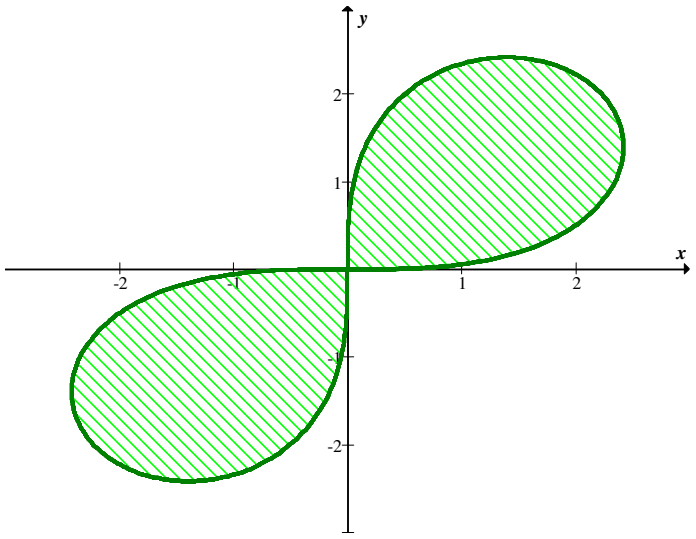
$$s = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{(2\cos\theta)^2 + (4 + 2\,sen\,\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{20 + 16\,sen\,\theta}\; d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{5 + 4\,sen\,\theta}\; d\theta$$

Nos exercícios 47 a 56, calcular a área limitada pela curva dada.

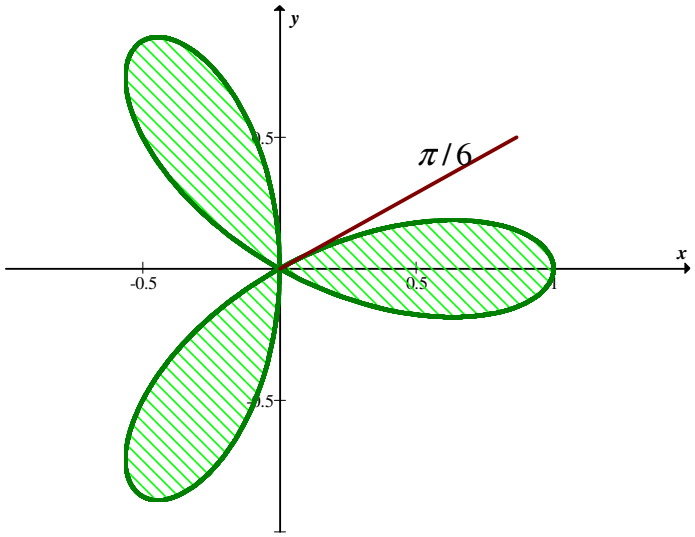
47. $r^2 = 9\,sen\,2\theta$



$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 9\;sen\;2\theta\; d\theta$$

$$= -9 \cdot \frac{1}{2}\cos\,2\theta\Big|_0^{\pi/2} = 9\;u.a.$$

48. $r = \cos 3\theta$



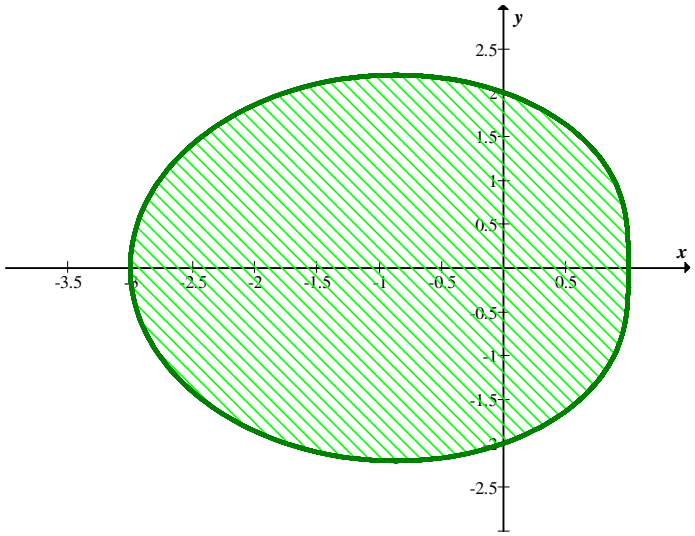
$$A = \frac{1}{2} . 6 \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta \, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6\theta \right) d\theta$$

$$= 3 . \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{12} \, sen \, 6\theta \right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi}{4} \, u. \, a.$$

49. $r = 2 - \cos \theta$

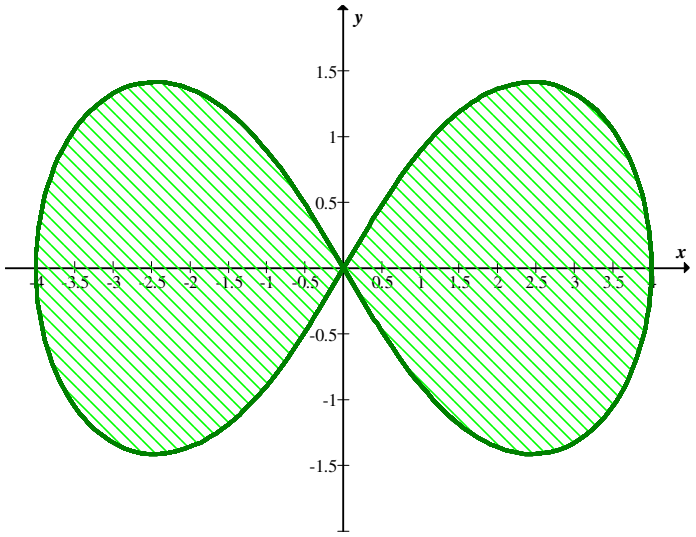


$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (2 - \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= 4\theta - 4\,sen\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\,sen\,2\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{9\pi}{2}\,u.a.$$

50. $r^2 = 16\cos 2\theta$

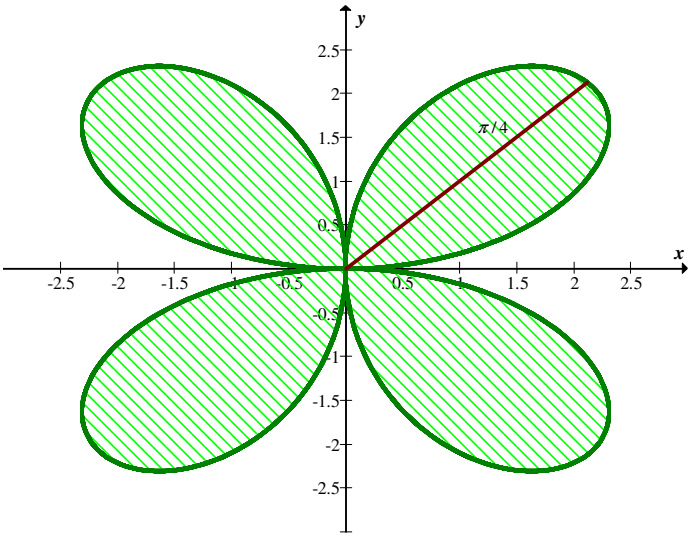


$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\int_0^{\pi/4} 16\cos 2\theta \, d\theta$$

$$= 32\frac{1}{2}\,sen\,2\theta\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= 16\,u.a$$

51. $r = 3\,sen\,2\theta$

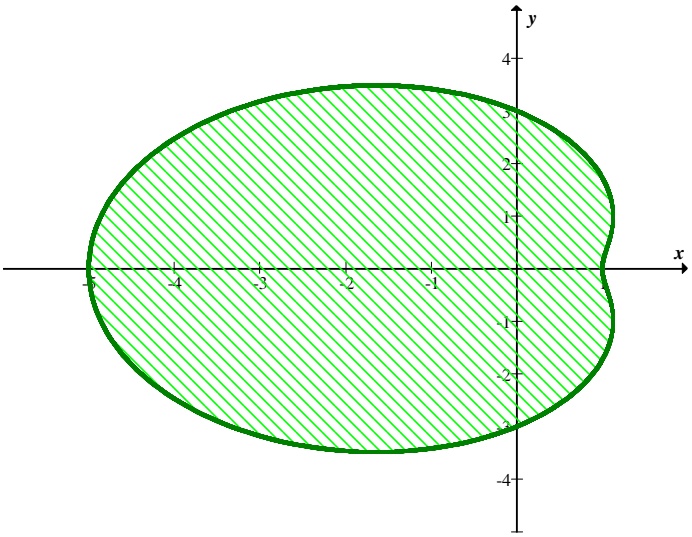


$$A = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 9\ sen^2\ 2\theta\ d\theta$$

$$= 36 \left(\frac{1}{2} \cdot \theta - \frac{1}{8}\ sen\ 4\theta \right) \Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{9\pi}{2}\ u.\ a.$$

52. $r = 3 - 2\cos\theta$



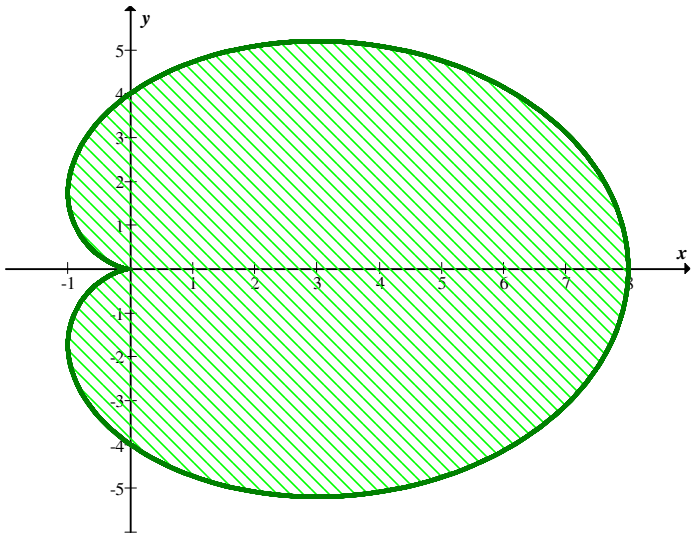
$$s = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (3 - 2\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(9 - 12\cos\theta + 4\cos^2\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi} (9 - 12\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left(11\theta - 12\,sen\,\theta + sen\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 11\pi\ u.\,a.$$

53. $r = 4(1 + \cos\theta)$



$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16(1 + \cos\theta)^2 d\theta$$

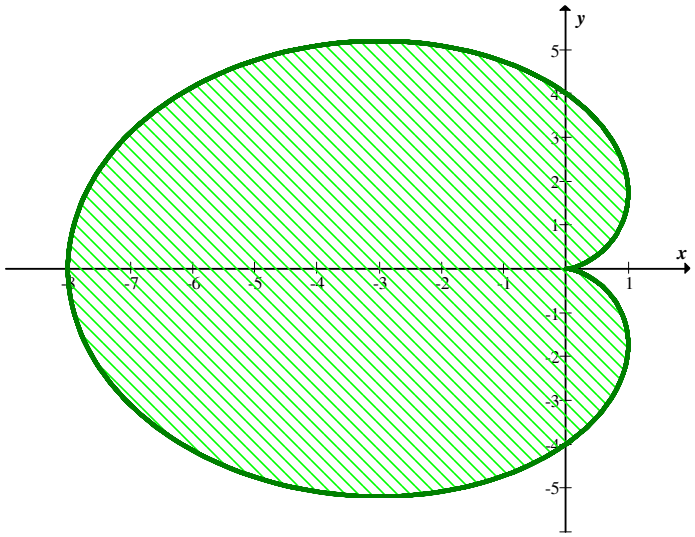
$$= 16\int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= 16\left(\theta + 2\,sen\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sen\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 24\pi\ u.\,a.$$

.

54. $r = 4(1 - \cos\theta)$



$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16(1-\cos\theta)^2 d\theta$$

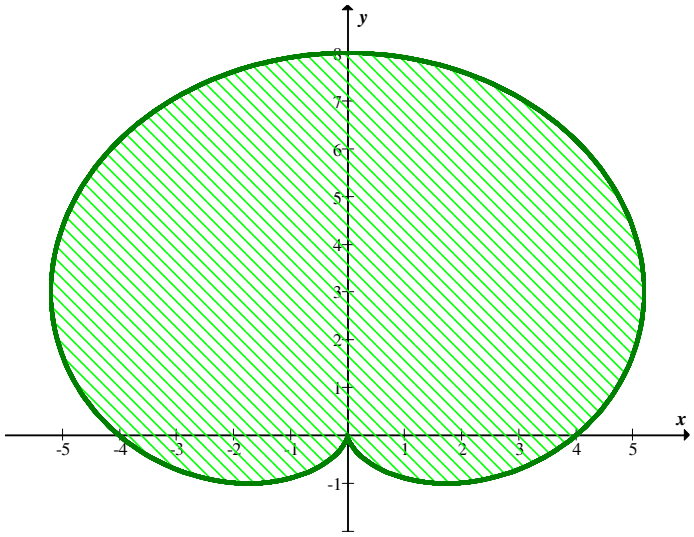
$$= \int_0^{\pi} 16\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= 16\left(\theta - 2\,sen\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sen\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 24\pi\ u.\,a.$$

.

55. $r = 4(1 + sen\,\theta)$



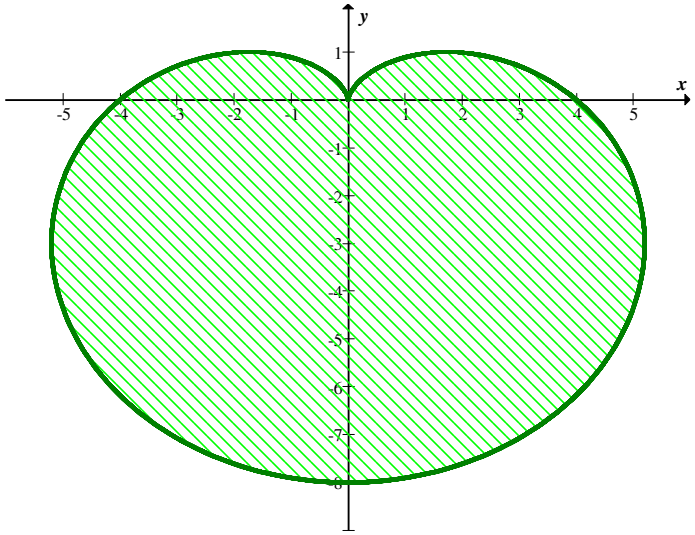
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16(1 + sen\ \theta)^2 d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16(1 + 2\ sen\ \theta + sen^2\ \theta)\, d\theta$$

$$= 16\left(\theta + 2\,(-\cos\theta) + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} sen\ 2\theta \right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 24\pi\ u.\ a.$$

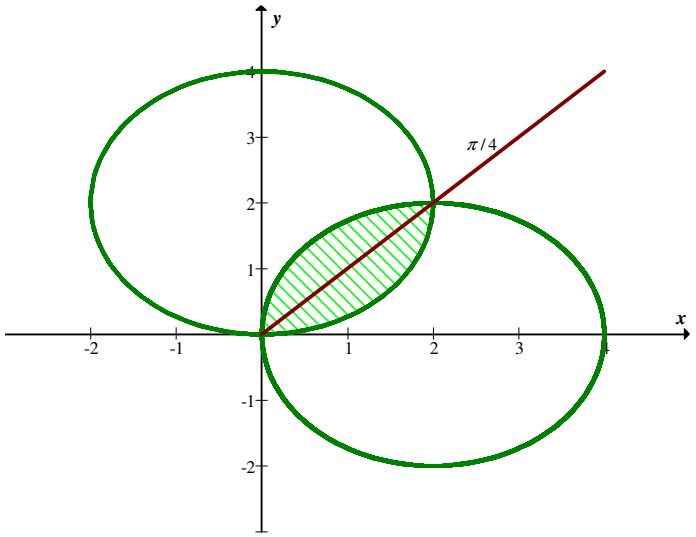
56. . $r = 4(1 - sen\ \theta)$



$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16(1 - sen\ \theta)^2 d\theta$$

$$= 24\pi\ u.\ a.$$

57. Encontrar a área da intersecção entre $r = 2a \cos\theta$ e $r = 2a\ sen\ \theta$



$$2a\cos\theta = 2a\ sen\ \theta$$

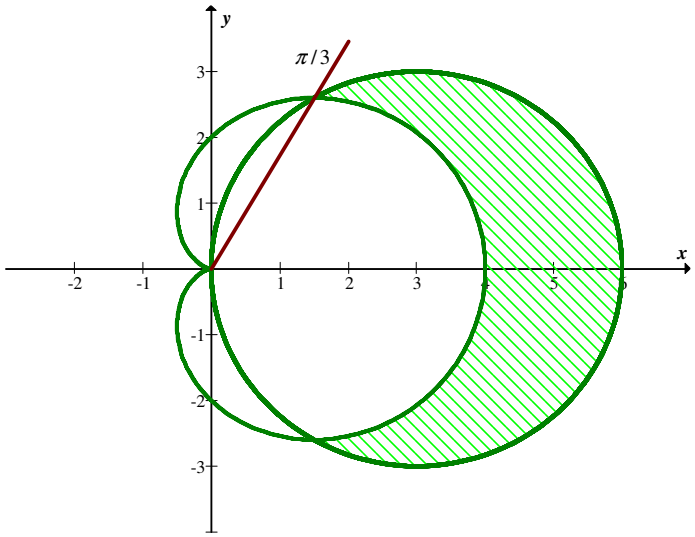
$$\cos\theta = sen\ \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = 2\,.\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2(\pi-2)}{2}\,u.a$$

58. Encontrar a área interior ao círculo $r = 6\cos\theta$ e exterior a $r = 2(1+\cos\theta)$



$$6\cos\theta = 2 + 2\cos\theta$$

$$4\cos\theta = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 36\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} 36\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 36\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} sen\, 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= 18 \cdot \frac{\pi}{3} + 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 4(1+\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} 4(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$

$$= 4\left(\theta + 2sen\theta + \frac{1}{2} sen\, 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/3}$$

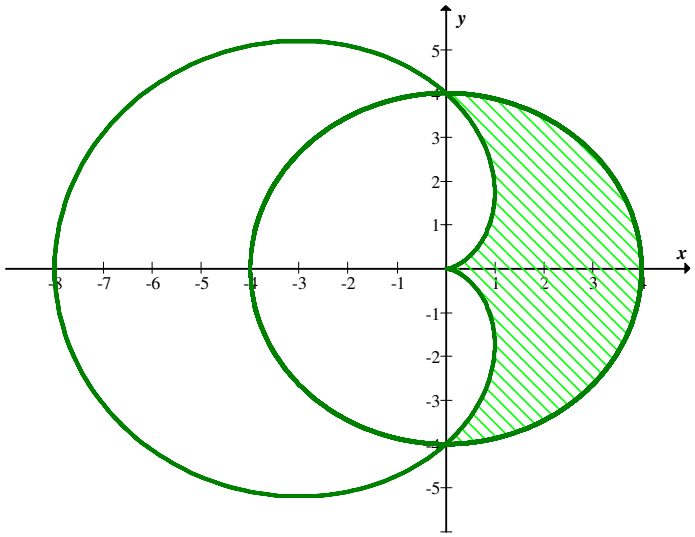
$$= \frac{4\pi}{3} + 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = A_1 - A_2$$

$$= 6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{4\pi}{3} + 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4\pi \; u.\, a.$$

59. Encontrar a área interna ao círculo $r = 4$ e exterior à cardióide $r = 4(1 - \cos\theta)$

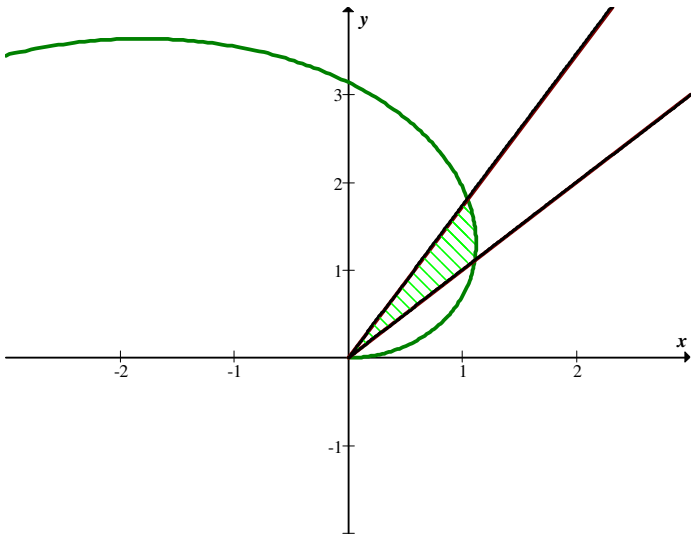


$$A = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[16 - 16(1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(16 - 16 + 32\cos\theta - 16\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= 32 - 4\pi u.a$$

60. Encontrar a área da região do 1° quadrante delimitada pelo primeiro laço da espiral $r = 2\theta$, $\theta \geq 0$ e pelas retas $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$

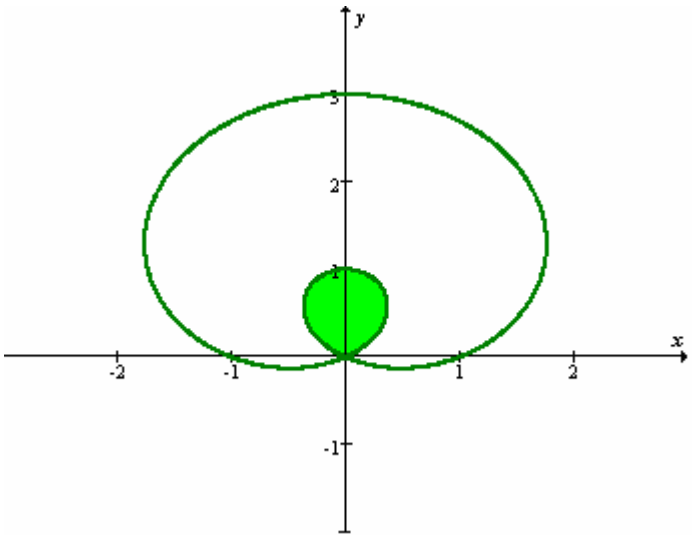


$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} 4\,\theta^2\,d\theta$$

$$= 2\,.\,\frac{\theta^3}{3}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \frac{37\pi^3}{2592} u.\,a.$$

61. Encontrar a área da região delimitada pelo laço interno da limaçon $r = 1 + 2\,sen\,\theta$.



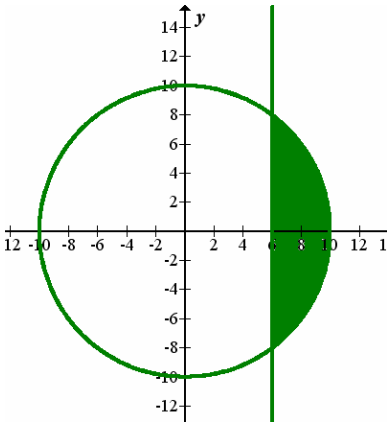
$$A = 2\,.\,\frac{1}{2}\int_{7\pi/6}^{3\pi/2} (1 + 2\,sen\,\theta)^2\,d\theta$$

$$= \int_{7\pi/6}^{3\pi/2} \left(1 + 4\,sen\,\theta + 4\,sen^2\,\theta\right) d\theta$$

$$= \theta - 4\cos\theta + 4\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sen\,2\theta\right)\Big|_{7\pi/6}^{3\pi/2}$$

$$= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} u.\,a.$$

62. Encontrar a área da região interior ao círculo $r = 10$ e a direita da reta $r\cos\theta = 6$.



$10\cos\theta = 6$

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \therefore \quad \theta = arc\cos\frac{3}{5}$$

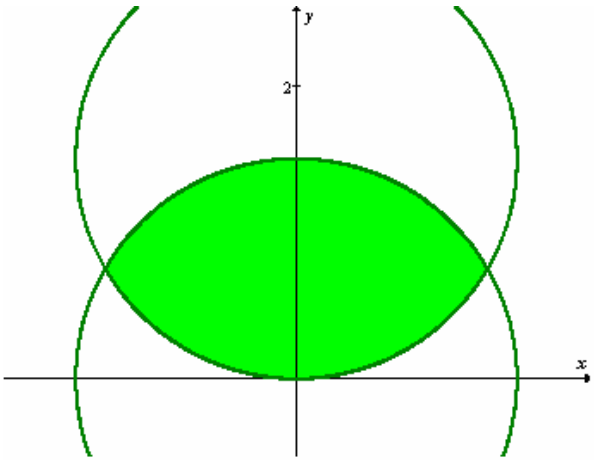
$$A = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\arccos\frac{3}{5}}\left[(10)^2 - \left(\frac{6}{\cos\theta}\right)^2\right]d\theta$$

$$= \left(100\theta - 36tg\,\theta\right)\Big|_0^{\arccos\frac{3}{5}}$$

$$100\arccos\frac{3}{5} - 48u.a.$$

63. Calcular a área da região interior às duas curvas:

a) $2r = 3$ e $r = 3\,sen\,\theta$



$$\frac{3}{2} = 3\ sen\ \theta$$

$$sen\ \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 9\ sen^2\theta\ \ d\theta$$

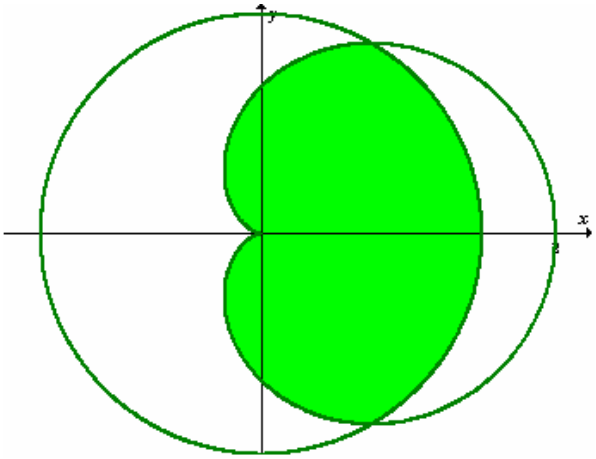
$$= \frac{1}{2}\cdot 9\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\ sen\ 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\pi}{24} - \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9/4\ d\theta = \frac{9\pi}{24}$$

$$A = 2\left(A_1 + A_2\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\ u.\ a.$$

b) $2r = 3$ e $r = 1 + \cos\theta$



$$1 + \cos\theta = \frac{3}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta = \pi/3$$

$$A_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 9/4 \, d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{24\pi - 27\sqrt{3}}{24}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{14\pi - 9\sqrt{3}}{8} \, u.\,a.$$

8.18 – EXERCÍCIOS – pg. 407

1. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de 12 cm de comprimento, se a densidade linear da barra num ponto P, que dista $x\ cm$ da extremidade esquerda, é $(5x+7)\ kg/cm$

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

$$m = \int_0^{12} (5x+7)\,dx$$

$$= 5\frac{x^2}{2} + 7x\Big|_0^{12}$$

$$= \frac{5}{2}.144 + 7.12$$

$$= 444\ kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^{12} x(5x+7)\,dx$$

$$= \frac{1}{144}\left(5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{12}$$

$$= \frac{3384}{444}$$

2. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de comprimento $3m$, se a densidade linear da barra num ponto situado a $x\ m$ do extremo esquerdo é $(5x^2+3)\ kg/m$.

$$\rho(x) = 5x^2 + 3$$

$$m = \int_0^3 (5x^2+3)\,dx$$

$$= 5\frac{x^3}{3} + 3x\Big|_0^3$$

$$= 54\ kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_a^b x\,\rho(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{54}\int_0^3 x\left(5x^2+3\right)dx$$
$$= \frac{1}{54}\left(5\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3$$
$$= \frac{1}{54}\cdot\frac{459}{4}$$
$$\cong 2{,}125$$

3. Calcular a massa total e o centro de massa de uma barra de $5m$ de comprimento, sabendo que a densidade linear num ponto é uma função do 1° grau da distância total deste ponto ao extremo direito da barra. A densidade linear no extremo direito é $5kg/m$ e no meio da barra é $2kg/m$

$$\rho(x) = k_1(5-x)+k_2$$
$$\rho(5) = k_2 = 5$$
$$\rho(2{,}5) = 2{,}5k_1 + k_2 = 2 \quad \therefore \quad k_1 = -1{,}2$$

$$m = \int_0^5 \left[-1{,}2\,(5-x)+5\right]dx$$
$$= \int_0^5 \left(-6+1{,}2x+5\right)dx$$
$$= \int_0^5 \left(1{,}2x-1\right)dx$$
$$= 1{,}2\frac{x^2}{2} - x\Bigg|_0^5$$
$$= 10\ kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\int_0^5 x\,(1{,}2x - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\left(1{,}2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{150}{3} - \frac{25}{2}\right)$$

$$= 3{,}75$$

4. Uma barra horizontal esta localizada sobre o eixo dos x, como mostra a figura 8.105. Se a densidade linear num ponto qualquer da barra é proporcional à distância deste ponto até a origem, determinar o valor da constante de proporcionalidade, de modo que a massa da barra seja

$$m = \frac{b+a}{2}\,u.\,m.$$

$$\rho(x) = kx$$

$$m = \int_a^b kx\,dx$$

$$= k\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{b+a}{2}$$

$$k\left(b^2 - a^2\right) = b + a$$

$$k = \frac{b+a}{b^2 - a^2}$$

$$= \frac{1}{b-a}$$

5. O comprimento de uma barra é 2m e a densidade linear no extremo direito é $1kg/m$. A densidade linear num ponto varia diretamente com a segunda potência da distância do ponto ao extremo esquerdo. Calcular a massa total e o centro de massa da barra.

$$\rho(x) = kx^2$$

$$\rho(2) = k \,.\, 4 = 1 \quad \therefore \quad k = 1/4$$

$$m = \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2$$

$$= \frac{2}{3} kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2/3} \int_0^2 x \,.\, \frac{1}{4} x^2 dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2$$

$$= \frac{3}{2}$$

6. Determinar o momento de inércia de uma barra homogênea de 3 cm de comprimento, em relação a um eixo perpendicular, que:

a) passa no ponto médio da barra;
b) passa por uma extremidade da barra.

Considerar a densidade linear da barra igual a $0{,}8\ kg/m$

$$I_l = \int_a^b d^2(x)\, \rho(x) dx$$

a) $d(x) = |x - 1{,}5|$

$$I_l = \int_0^3 (x - 1{,}5)^2 \,.\, k \; dx$$

$$= k \,.\, \left. \frac{(x-1{,}5)^3}{3} \right|_0^3$$

$$= 2{,}25\, k \quad (k = 0{,}8)$$

$$= 2{,}25 \,.\, 0{,}8$$

$$= 1{,}8\ kg \,.\, m^2$$

b) $d(x) = (3 - x)$

$$I_l = \int_0^3 (3-x)^2 \, . \, k \, dx$$

$$= k \, . \, \frac{(3-x)^3}{3}\Bigg|_0^3$$

$$= 9\,k$$

$$= 9 \, . \, 0{,}8$$

$$= 7{,}2 \; kg \, . \, m^2$$

OBS.: no outro extremo temos $\int_0^3 x^2 k \, dx \quad = 9k \quad = 7{,}2 \; kg \, . \, m^2$

7. Uma barra horizontal mede $8\,m$ de comprimento. No seu ponto médio a densidade linear é $0{,}8 \; kg/m$ e cresce proporcionalmente com o quadrado da distância até este ponto. Se numa das extremidades a densidade é $16{,}8 \; kg/m$, determinar a massa e o centro de massa da barra

$$\rho(4) = 0{,}8$$
$$\rho(x) = k \, (x-4)^2 + 0{,}8$$
$$\rho(8) = 16\,k + 0{,}8 = 16{,}8 \quad \therefore \quad k = 1$$

$$m = \int_0^8 \left((x-4)^2 + 0{,}8\right) dx$$

$$= \frac{(x-4)^3}{3} + 0{,}8x\Bigg|_0^8$$

$$= 49{,}07 \; kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^8 x\left[(x-4)^2 + 0{,}8\right]dx$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^8 x\left(x^2 - 8x + 16 + 0{,}8\right)dx$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{x^4}{4} - 8\frac{x^3}{3} + 16{,}8\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{1}{49{,}07}.196{,}27 \cong 3{,}9997$$

8. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 7 em relação a um eixo perpendicular que:
   a) passa no ponto médio da barra;
   b) passa por uma das extremidades da barra.

a)

$$I_l = \int_0^8 \left(0{,}8 + (x-4)^2\right)(x-4)^2\,dx$$

$$= \int_0^8 \left(0{,}8(x-4)^2 + (x-4)^4\right)\,dx$$

$$= 0{,}8\,.\,\frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-4)^5}{5}\Bigg|_0^8$$

$$\cong 443{,}73 kg.m^2$$

b)

$$I_l = \int_0^8 \left(0{,}8 + (x-4)^2\right)(8-x)^2\,dx$$

$$= \int_0^8 \left(0{,}8 + x^2 - 8x + 16\right)\left(64 - 16x + x^2\right)dx$$

$$= \int_0^8 \left(1075{,}20 - 780{,}8x + 208{,}8x^2 - 24x^3 + x^4\right)dx$$

$$= 1228{,}8 kg.m^2$$

9. Achar o momento de inércia da barra dos exercícios 1 e 3 para um eixo perpendicular que:

a) passa pelo extremo direito;
b) passa pelo extremo esquerdo;
c) passa pelo ponto médio da barra.

Exercício 1

(a)

$$I_l = \int_0^{12} (12-x)^2 \, (5x+7)\, dx$$

$$= \int_0^{12} \left(720x + 1008 - 120x^2 - 168x + 5x^3 + 7x^2\right) dx$$

$$= 5\frac{x^4}{4} - 113\frac{x^3}{3} + 552\frac{x^2}{2} + 1008x \Big|_0^{12}$$

$$= 12672 \; kg \; . \; cm^2$$

(b)

$$I_l = \int_0^{12} \left(5x^3 + 7x^2\right) dx$$

$$= 5\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} \Big|_0^{12}$$

$$= 29\,952 \; kg \; . \; cm^2$$

(c)

$$I_l = \int_0^{12} (x-6)^2 \, (5x+7)\, dx$$

$$\int_0^{12} \left(x^2 - 12x + 36\right)(5x+7)\, dx$$

$$= \int_0^{12} \left(5x^3 + 7x^2 - 60x^2 - 84x + 180x + 252\right) dx$$

$$= 5\frac{x^4}{4} - 53\frac{x^3}{3} + 96\frac{x^2}{2} + 252x \Big|_0^{12}$$

$$= 5328 \; kg \; . \; cm^2$$

Exercício 3

(a)

$$I_l = \int_0^5 \left[-1{,}2\,(5-x)+5\right](5-x)^2\,dx$$

$$= \int_0^5 \left[-1{,}2\,(5-x)^3 + 5\,(5-x)^2\right]dx$$

$$= 1{,}2\frac{(5-x)^4}{4} - 5\frac{(5-x)^3}{3}\Bigg|_0^5$$

$$\cong 20{,}83\ kg\ .\ m^2$$

(b)

$$I_l = \int_0^5 \left[-1{,}2\,(5-x)+5\right]x^2\,dx$$

$$= \int_0^5 \left[-6+1{,}2x+5\right]x^2\,dx$$

$$= \int_0^5 \left(-x^2 + 1{,}2x^3\right)dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 1{,}2\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^5$$

$$= 145{,}83\ kg\ .\ m^2$$

(c)

$$I_l = \int_0^5 (2{,}5-x)^2\left[-1{,}2\,(5-x)+5\right]dx$$

$$= \int_0^5 \left[\left(6{,}25-5x+x^2\right)(-6+1{,}2x)+5\right]\,dx$$

$$= \int_0^5 \left[7{,}5x+5x-x^2-6x^2+1{,}2x^3-6{,}25\right]dx$$

$$= -6{,}25x+12{,}5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 1{,}2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^5$$

$$\cong 20{,}833\ kg\ .\ m^2$$

10. Uma barra localizada sobre o eixo dos x tem extremos $x=0$ e $x=4$. Se a densidade linear é dada por $\rho(x)=\dfrac{1}{x+1}$, determinar a massa e o centro de massa da barra.

$$m=\int_0^4 \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$=\ln|x+1|\Big|_0^4=\ln 5\ u.\,m.$$

$$\bar{x}=\frac{1}{\ln 5}\int_0^4 x\,.\,\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{\ln 5}\int_0^4\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\ln 5}\left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^4$$
$$=\frac{4-\ln 5}{\ln 5}$$
$$=\frac{4}{\ln 5}-1$$

11. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 10 em relação a um eixo perpendicular que passa no ponto $x=-1$

$$I_l=\int_0^4 \frac{1}{x+1}(x+1)^2\,dx$$
$$=\int_0^4 (x+1)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^4$$
$$=12$$

12. Determinar a massa e o centro de massa de uma barra que esta localizada sobre o eixo dos x, com extremos nos pontos $x=0$ e $x=1$. A densidade linear da barra é dada por $\rho(x)=e^x$

$$m=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e-1\ u.\,m$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^1 x\, e^x dx$$
$$= \frac{1}{m}\left(x\, e^x - e^x\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{e-1}(e - e + 1)$$
$$= \frac{1}{e-1}$$

13. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 12 em relação a um eixo perpendicular que passa pela origem

$$I = \int_0^1 x^2 e^x dx$$
$$= \left(x^2 e^x - 2x\, e^x + 2e^x\right)\Big|_0^1$$
$$= e - 2e + 2e - 2$$
$$= e - 2$$

14. Uma barra homogênea mede $3\,m$ de comprimento. Se o seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular que passa por uma de suas extremidades é $22{,}5\ kg\,.\,m^2$, determinar a densidade linear da barra.

$$I = \int_0^3 x^2 k\, dx \quad \rho(x) = k$$
$$= k\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{k}{3}.27 = 9k$$
$$9k = 22{,}5 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{22{,}5}{9} = 2{,}5$$
$$\rho = 2{,}5 kg/m$$

15. Uma mola tem comprimento natural de $10\,m$. Sob um peso de $5N$, ela se distende $3\,m$:
    a) Determinar o trabalho realizado para distender a mola de seu comprimento natural até $25\,m$.
    b) Determinar o trabalho realizado para distender a mola de $11\,m$ a $21\,m$

$$f(x) = kx$$
$$5 = 3k$$
$$k = \frac{5}{3} \quad \therefore \quad f(x) = \frac{5}{3}x$$

a)

$$w = \int_0^{15} \frac{5}{3}x\,dx = \frac{5}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{15}$$
$$= 187{,}5J$$

b)

$$w = \int_1^{11} \frac{5}{3}x\,dx$$
$$= \frac{5}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_1^{11}$$
$$= 100J$$

16. Uma força de $12N$ é necessária para comprimir uma mola de um comprimento natural de $8\,m$ para um comprimento de $7\,m$. Encontrar o trabalho realizado para comprimir a mola de seu comprimento natural para um comprimento de $2\,m$

$$f = kx; 12 = k.1 \quad \therefore \quad k = 12$$

$$w = \int_0^6 12x\,dx = 12\frac{x^2}{2}\Big|_0^6$$
$$= 216J$$

17. Uma mola tem comprimento natural de $12\,m$. Para comprimi-la de seu comprimento natural até $9\,m$, usamos uma força de $500\,N$. Determinar o trabalho realizado ao comprimir a mola de seu comprimento natural até $5\,m$.

$$f = kx;\ 500 = 3k$$
$$k = 500/3$$

$$w = \int_0^7 \frac{500}{3}x\,dx = \frac{500}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^7$$
$$= \frac{12\,250}{3}J$$

18. Um balde pesa $5N$ e contém argila cujo peso é $30N$. O balde está no extremo inferior de uma corrente de $50\,m$ de comprimento, que pesa $5N$ e está no fundo de um poço. Encontrar o trabalho necessário para suspender o balde até a borda do poço.

peso balde + peso argila $35N$

O peso de um metro da corrente é $\frac{1}{10}N$.

Quando o balde subiu *x*, o peso correspondente da corrente é: $(50-x).0{,}1$.

$$f(x) = 35 + (50-x).\,0{,}1$$

$$w = \int_0^{50} (35 + (50-x).\,0{,}1)\,dx$$

$$= 35x + 5x - 0{,}1\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{50}$$

$$= 1875J$$

19. Um tanque cilíndrico circular reto, de raio $1{,}2\ \ m$ e altura $3m$ está cheio de água, achar o trabalho efetuado para esvaziar o tanque, pela parte superior.

$$w = \int_0^3 9{,}807.1000\,.\pi\,(1{,}2)^2.\ (3-y)dy$$

$$= \pi\,(1{,}2)^2.1000.9{,}807\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3$$

$$= 63549{,}36\ J$$

20. Um tanque cilíndrico circular reto de $2m$ de diâmetro e $3m$ de profundidade, está cheio de água e deve ser esvaziado pela parte superior. Determinar o trabalho necessário para esvaziar o tanque:
    a) considerando que a água seja deslocada por um muro de um embolo, partindo da base do tanque;
    b) por bombeamento.

a)

$$w = \int_0^3 9807\pi.1^2 .(3-y)\,dy$$

$$= 9807\,\pi\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3$$

$$= 44131{,}5\,\pi\ J$$

b)

$$w = \int_0^3 9807\pi(3-y)\,dy$$

$$= 9807\pi\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3$$

$$= 44131{,}5\pi J$$

21. Um tanque tem a forma de um cone circular reto, de altura $20m$ e raio da base $102\ cm$. Se o tanque está cheio de água, encontrar o trabalho realizado para bombear a água pelo topo do tanque.

$$\frac{x-0}{y-0} = \frac{1{,}02}{20} \quad \therefore \quad x = \frac{1{,}02\,y}{20} = 0{,}051y$$

raio: $0{,}051y$

$$w = \int_0^{20} 9807\,\pi\,(0{,}051y)^2(20-y)dy$$

$$= 9807\,\pi.\,0{,}002601\int_0^{20}\left(20y^2 - y^3\right)dy$$

$$= 25{,}508\,\pi\left(20\,\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^{20}$$

$$= 340106{,}66\pi J$$

22. Um reservatório cheio de água é da forma de um paralelepípedo retângulo de $1{,}40\,m$ de profundidade, $4m$ de largura e $8m$ de comprimento. Encontrar o trabalho necessário para bombear a água do reservatório ao nível de $1m$ acima da superfície.

$$w = \int_0^{1,40} 9807 \,.\, 32 \,.\, (2{,}40 - y)dy$$

$$= 9807.32\left(2{,}40y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1,40}$$

$$= 746901{,}12J$$

23. Uma comporta vertical de uma represa tem a forma de um retângulo de base $4m$ e altura $2m$. O lado superior da comporta está a $0{,}5m$ abaixo da superfície da água. Calcular a força total que essa comporta está sofrendo.

$$F = \int_0^2 9807(2{,}5 - y)\,.\,4\,dy$$

$$= 39228\left(2{,}5y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2$$

$$= 117684\,N$$

24. Um tanque tem a forma de um prisma quadrangular de altura $1m$. Se o tanque está cheio de água e o seu lado da base mede $3m$, determinar a força decorrente da pressão da água sobre um lado do tanque

$$F = \int_0^1 9807\,(1 - y)\,(3 - 0)dy$$

$$= \int_0^1 9807\,(3 - 3y)dy$$

$$= 9807\left(3y - 3\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= 14710{,}5\,N$$

25. Uma chapa tem a forma da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$. Se esta chapa é imersa verticalmente na água, de tal forma que seu lado superior coincide com o nível d'água, determinar a força decorrente da pressão da água sobre um lado da chapa.

$$F = \int_0^4 9807\,(4-y)\left(\sqrt{y}+\sqrt{y}\right)dy$$

$$= 9807\int_0^4 (4-y)\,2\sqrt{y}\,dy$$

$$= 9807 \,.\, 2\left(4\,.\,\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= 167372{,}8\ N$$

26. Uma chapa retangular de $1m$ de altura e $2m$ de largura é imersa verticalmente num liquido, sendo que sua base inferior esta a $3m$ da superfície do liquido. Determinar a força total exercida sobre um lado da chapa, se o liquido pesa $4000\ N/m^3$.

$$F = \int_0^1 4000\,(3-y)\,2\,dy$$

$$= 8000\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 8000\left(3 - 1/2\right)$$

$$= 20000 = 2\,.\,10^4\ N$$

Nos exercícios de 27 a 30, temos uma comporta de uma represa, colocada verticalmente, com a forma indicada. Calcular a força total contra a comporta.

27. Um retângulo com $30m$ de largura e $10m$ de altura; nível d'água: $2m$ acima da base da comporta.

$$F = \int_0^2 9807\,(2-y)\,30\,dy$$

$$= 9807 \,.\, 30\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$= 588420\ N$$

28. Um trapézio isósceles com $30m$ de largura no topo, $20m$ de largura na base e $8m$ de altura; nível da água coincide com o topo da comporta.

$$F = \int_0^8 9807\,(8-y)\,.\,2\,.\,\frac{5y+80}{8}\,dy$$

$$= \frac{9807}{4}\int_0^8 \left(40y + 640 - 5y^2 - 80y\right)\,dy$$

$$= \frac{9807}{4}\left(640y - \frac{5y^3}{3} - 40\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4$$

$$= 7322560\ N$$

29. Um triângulo isósceles com $16m$ de altura no topo e $10m$ de altura; nível da água coincide com o topo da comporta.

$$F = \int_0^{10} 9807\,(10-y)\left(\tfrac{4}{5}y + \tfrac{4}{5}y\right)dy$$

$$= \int_0^{10} 9807\,(10-y)\,\frac{8}{5}y\ \,dy$$

$$= \int_0^{10} 9807\left(16y - \frac{8}{5}y^2\right)dy$$

$$= 9807\left(16\,.\,\frac{y^2}{2} - \frac{8}{5}\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^4$$

$$= 2615200\ N$$

30. Um trapézio isósceles com $17m$ de largura no topo, $9m$ na base e $5m$ de altura; nível da água: $2m$ acima da base da comporta.

$$F = \int_0^2 9807\,(2-y)\,2\left(\frac{4}{5}y + 4{,}5\right)dy$$

$$= 2\,.\,9807\int_0^2 (2-y)\left(\frac{4}{5}y + 4{,}5\right)dy$$

$$= 2\,.\,9807\int_0^2 \left(\frac{8}{5}y + 9 - \frac{4}{5}y^2 - 4{,}5y\right)dy$$

$$= 2\,.\,9807\left(\frac{8}{5}\frac{y^2}{2} + 9y - \frac{4}{5}\frac{y^3}{3} - 4{,}5\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 197447{,}6\ N$$

31. O topo de um tanque tem $3m$ de comprimento e $2m$ de largura. As extremidades são triângulos eqüiláteros verticais, com um vértice apontando para baixo. Qual é a força total em uma extremidade do tanque, quando ele está cheio de um líquido que pesa $12000\ N/m^3$?

$$F = \int_0^{\sqrt{3}} 12000\left(\sqrt{3} - y\right)2\,\frac{y}{\sqrt{3}}\,dy$$

$$= 24000\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 12000 = 12\,.\,10^3\ N$$

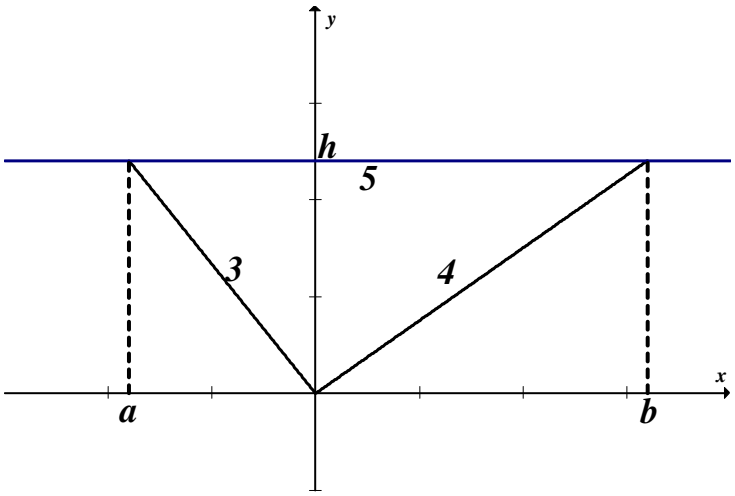
32. Uma chapa é limitada pela curva $y = x^{2/3}$ e a reta $y = 1$, no plano xy, com o eixo dos y apontando para cima e suas escalas medidas em metros. A chapa está submersa em óleo, cujo peso é $9600\ N/m^3$, com a reta $y = 1$ sobre a superfície do óleo. Qual é a força do óleo em cada lado da chapa?

$$F = \int_0^1 9600\,(1-y)\,2\,.\,y^{3/2}\,dy$$

$$= 19200\left(\frac{y^{5/2}}{5/2} - \frac{y^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\cong 2194{,}28\ N$$

33. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo de lados 3,4 e 5m. A lâmina está imersa verticalmente num líquido de tal forma que a hipotenusa coincide com o nível do líquido. Determinar a força exercida pelo líquido sobre um lado da lâmina se o peso do líquido é $6500\ N/m^3$



Cálculo de *h*:
A área do triângulo pode ser expressa como:
Área: $A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ ou $A = \frac{5h}{2}$.
Portanto,

$$\frac{5h}{2} = 6$$

$$h = 12/5$$

Cálculo de *a*:

$$3^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + a^2$$

$$a = -9/5$$

Cálculo de *b*:

$$4^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + b^2$$

$$b = 16/5$$

Equação da reta que passa por $(0,0)\left(-9/5, 12/5\right)$

$$x = \frac{-3}{4}y$$

Equação da reta que passa por $(0,0)\left(16/5, 12/5\right)$

$$x = \frac{4}{3}y$$

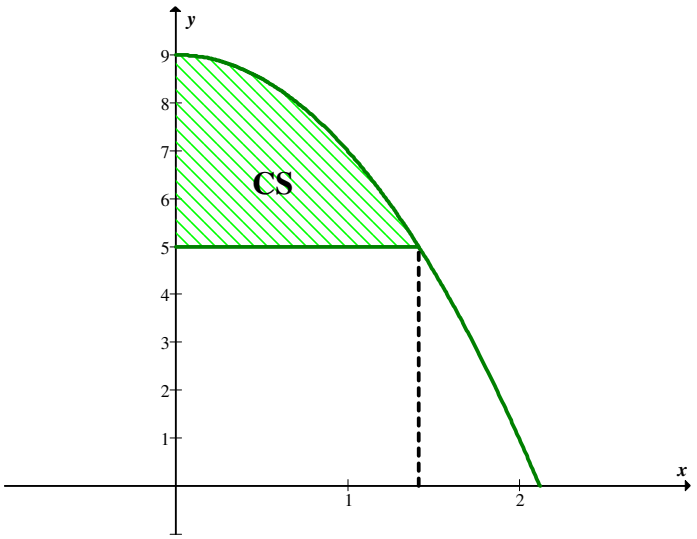
Assim temos:

$$F = \int_0^{12/5} 6500\left(12/5 - y\right)\left(\frac{4}{3}y + \frac{3}{4}y\right)dy$$

$$= 31200\ N$$

34. A função demanda para um certo produto é dada por $p = -2x^2 + 9$ sendo p o preço unitário em reais e x a quantidade demandada semanalmente. Determine o excedente de consumo se o preço de mercado é estabelecido a R$ 5,00 cada unidade do produto.

A figura que segue mostra o gráfico da função demanda e a área que representa o excedente de consumo.



Temos:

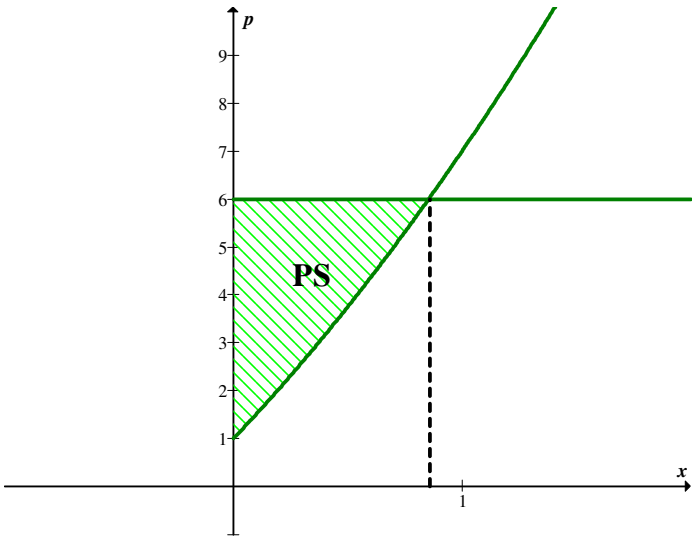
$$CS = \int_0^{\sqrt{2}} (-2x^2 + 9 - 5)dx$$

$$= -2\frac{x^3}{3} + 4x\Big|_0^{\sqrt{2}} \cong 3{,}77$$

Resposta: R$3,77

35. Um fornecedor de produtos de limpeza estabelece que a quantidade de mercadoria a ser colocada no mercado está relacionada com o preço p, em reais, pela função $p = x^2 + 5x + 1$. Se o preço de mercado é igual a R$6,00, encontrar o excedente de produção.

A figura que segue mostra a área a ser calculada.



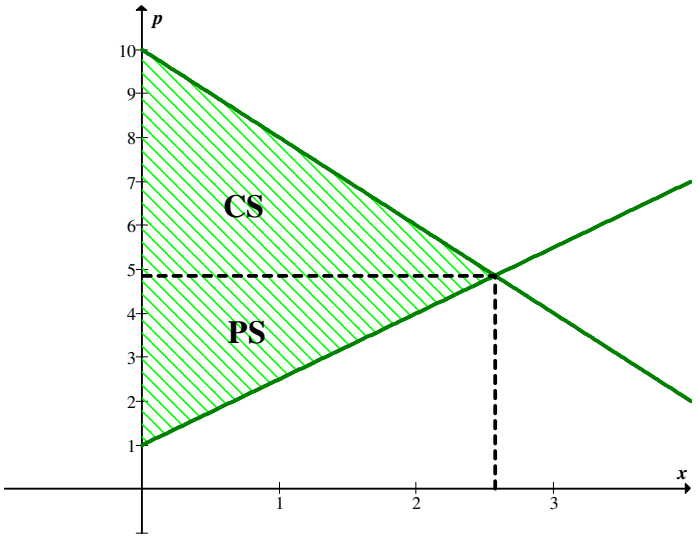
Temos:

$$PS = \int_0^{3\sqrt{5}/2-5/2} (6 - x^2 - 5x - 1)dx \cong 2{,}24$$

Resposta: R$2,24

36. A quantidade demandada de um certo produto A está relacionada ao preço unitário p, em reais, por $p = 10 - 2x$ e a quantidade x (em unidades) que o fornecedor está disposto a colocar no mercado está relacionada ao preço unitário p por $p = \frac{3}{2}x + 1$. Se o preço de mercado é igual ao preço de equilíbrio, determine o excedente de consumo e o excedente de produção.

A figura que segue ilustra o problema



Temos:
Ponto de equilíbrio: $(18/7, 34/7)$

$$CS = \int_0^{18/7} (10 - 2x - \tfrac{34}{7})dx \cong 6{,}61\,.$$

$$PS = \int_0^{18/7} (\frac{34}{7} - \frac{3}{2}x - 1)dx \cong 4{,}96.$$

37 Estima-se que um investimento gerará renda à taxa de $R(t)$ igual a R$180.000,00 por ano, pelos próximos três anos. Determine o valor presente deste investimento se a taxa de juros é de 6% ao ano, compostos continuamente.

$$VP = \int_0^3 180.000 \times e^{-0{,}06t} dt \cong 494.189{,}36$$

8.4 – EXERCÍCIOS – pg. 344

Nos exercícios de 1 a 14, encontrar o comprimento de arco da curva dada.

1. $y = 5x - 2,\ -2 \le x \le 2$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 5^2}\, dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{26}\ dx = \sqrt{26}\ x \Big|_{-2}^{2}$$

$$= \sqrt{26}\,(2 + 2) = 4\sqrt{26}\ u.c.$$

2. $y = x^{2/3} - 1,\ 1 \le x \le 2$

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\ dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{9x^{2/3}}}\ dx$$

$$= \int_1^2 \left(9x^{2/3} + 4\right)^{1/2}\ dx\,.\,\frac{1}{3}\,.\,x^{-1/3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \int_1^2 \left(9x^{2/3} + 4\right)^{1/2} . 6\,.\,x^{-1/3} dx$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{\left(9x^{2/3} + 4^{3/2}\right)}{3/2} \Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}\left(\left(9x^{2/3} + 4\right)^{3/2} - 13^{3/2}\right) = \frac{1}{27}\left(\left(9\,.\,2^{2/3} + 4\right)^{3/2} - 13\sqrt{3}\right)$$

3. $y = \frac{1}{3}\left(2 + x^2\right)^{3/2},\ 0 \le x \le 3$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\left(2 + x^2\right)^{1/2} . 2x$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2\left(2 + x^2\right)}dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1 + x^2 + x^4}\,dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\left(x^2 + 1\right)}\,dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 + 1\right)dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} + 3 = 12$$

4. $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\,sen^3 t \end{cases}$$

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t\; sen^2 t + 36\,sen^4 t\cos^2 t}\;dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 6.\sqrt{sen^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + sen^2 t\right)}\,dt$$

$$= 24\int_0^{\pi/2} sen\,t\,.\cos t\,dt = 24\,.\,\frac{sen^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 12\,u.c.$$

5. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2},\ 1 \le x \le 2$

$$y' = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}\left(-2\right)x^{-3}$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{1+\left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+x^6 - 2x^3 . \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{16x6}}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+x^6 - 2x^3 . \frac{1}{16x^6}}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{8x^6 + 16x^{12} + 1}{16x^6}}\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4x^3} \sqrt{\left(4x^6 + 1\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4x^3} \sqrt{\left(4x^6 + 1\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^2 \left(4x^3 + x^{-3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(4 . \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2^4 - \frac{1}{2 . 2^2} - 1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{123}{32}$$

6. $x = \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4y}$, $1 \le y \le 3$

$$x' = \frac{1}{3} . 3y^2 + \frac{1}{4}(-1) . y^{-2}$$

$$= y^2 - \frac{1}{4y^2}$$

$$= \frac{4y^4 - 1}{4y^2}$$

$$1+\left(\frac{4y^4-1}{4y^2}\right)^2 = 1+\frac{16y^8-8y^4+1}{16y^4} = \frac{16y^4+16y^8-8y^4+1}{16y^4}$$

$$= \frac{16y^8+8y^4+1}{16y^4} = \frac{\left(4y^4-1\right)^2}{16y^4}$$

$$s = \int_1^3 \sqrt{\frac{\left(4y^4+1\right)^2}{16y^4}}\, dy$$

$$= \int_1^3 \frac{4y^4+1}{4y^2}\, dy = \int_1^3 \left(y^2+\frac{1}{4}y^{-2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{3}+\frac{1}{4}.\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{3^3}{3}-\frac{1}{4.3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{53}{6}$$

7. $y = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ de $(0,1)$ a $\left(1, \frac{e+e^{-1}}{2}\right)$

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2.e^x.e^{-x}+e^{-2x}\right)}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2 + e^{2x} + \frac{1}{e^{-2x}}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x}\sqrt{\left(e^{2x}+1\right)^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x}\left(e^{2x}+1\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1} - 1 + 1\right)$$

$$= sen\ h\, 1$$

8. $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$$

$$x^2 + 1 = t^2$$

$$x^2 = t^2 - 1$$

$$x = \left(t^2 - 1\right)^{1/2}$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right)^{1/2}.\ 2t\ dt$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int \frac{t}{\left(t^2-1\right)^{1/2}} \cdot \frac{t\,dt}{\left(t^2-1\right)^{1/2}}$$

$$= \int \frac{t^2 dt}{t^2-1}$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt$$

$$= \int dt + \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)}$$

$$= t + \int \frac{1/2}{t-1} dt - \int \frac{1/2}{t+1} dt$$

$$= t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C$$

$$= t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + C$$

$$s = \left(\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

$$= \left(3 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{4}\right| - 2 - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\right|\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

9. $y = 1 - \ln(sen\ x)$, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$

$$y' = -\frac{\cos x}{sen\ x}$$

$$s = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{sen^2 x}}\, dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x}}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{sen^x}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos ec\ x\, dx$$

$$= \ln \left| \cos ec - \cot g\ x \right| \Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \right| - \ln \left| 2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right|$$

$$= \ln \left| \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1} \right|$$

$$= \ln \left| \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\sqrt{6} - \sqrt{2}} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}\ 3} \right| u.c.$$

10. $y = \sqrt{x^3}$, de $P_0\ (0, 0)$ ate $P_1\ (4, 8)$

$$y' = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx$$

$$= \frac{4}{9} \frac{\left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_0^4$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^{3/2} - 1 \right]$$

$$= \frac{8}{27} \left(10\sqrt{10} - 1\right) u.c.$$

11. $y = 4\sqrt{x^3} + 2$ de $P_0(0, 2)$ ate $P_1(1, 6)$

$$y' = 4.\frac{3}{2}x^{1/2} = 6x^{1/2}$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+36x}\ dx$$

$$= \frac{1}{36}\left.\frac{(1+36x)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{36}.\frac{2}{3}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$

$$= \frac{1}{54}\left(37\sqrt{37}-1\right)u.c.$$

12. $y = 6\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)$ de $P_0(1, 0)$ ate $P_1\left(2\sqrt{2}, 6\right)$

$$y' = 6.\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$= 4x^{-1/3}$$

$$s = \int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+16x^{-2/3}}\ dx$$

$$= \int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{16}{x^{-2/3}}}\ dx$$

$$= \int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x^{-2/3}+16}{x^{-2/3}}}\ dx$$

$$= \int_1^{2\sqrt{2}} \left(16+x^{-2/3}\right)^{1/2} x^{-1/3}\ dx$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\left(16 + x^{-2/3}\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^{2\sqrt{2}}$$

$$= \left(16 + \left(2\sqrt{2}\right)^{-2/3}\right)^{3/2} - 17^{3/2}$$

$$= 18\sqrt{18} - 17\sqrt{17}$$

$$= 54\sqrt{2} - 17\sqrt{17}\ u.c.$$

13. $(y-1)^2 = (x+4)^3$ de $P_0(-3, 2)$ ate $P_1(0, 9)$

$$y - 1 = (x+4)^{3/2}$$

$$y = 1 + (x+4)^{3/2}$$

$$y' = \frac{3}{2}(x+4)^{1/2}$$

$$s = \int_3^0 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+4)}\, dx$$

$$= \frac{4}{9} \frac{\left(1 + 9/4 (x+3)^{3/2}\right)}{3/2} \Bigg|_{-3}^{0}$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right)$$

$$= \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}\ .u.c.$$

14. $x^2 = y^3$, de $P_0(0, 0)$ ate $P_1(8,4)$

$$y = x^{2/3}$$

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$s = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9} x^{-2/3}}\, dx$$

$$= \int_0^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{9x^{2/3}}} dx$$

$$= \int_0^8 \left(9x^{2/3} + 4\right)^{1/2} . 3 . x^{-1/3}\, dx$$

$$u = 9x^{2/3} + 4$$

$$du = 9 . \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$= \frac{1}{18} . \frac{\left(9x^{2/3} + 4\right)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_0^8$$

$$= \frac{1}{18} . \frac{2}{3} \left(40\sqrt{40} - 4\sqrt{4}\right)$$

$$= \frac{1}{27} \left(80\sqrt{10} - 8\right) u.c.$$

Nos exercícios de 15 a 21, estabelecer a integral que da o comprimento de arco da curva dada.

15. $y = x^2,\ 0 \le x \le 2$

$$y' = 2x$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

16. $y = \frac{1}{x}$ de $P_0\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ ate $P_1\left(4, \frac{1}{4}\right)$

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$s = \int_{1/4}^{4} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$
$$= \int_{1/4}^{4} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}}\, dx$$
$$= \int_{1/4}^{4} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx$$

17. $x^2 - y^2 = 1$ de $P_0\left(3, -2\sqrt{2}\right)$ ate $P_0\left(3, 2\sqrt{2}\right)$

$$x^2 = 1 + y^2$$
$$x = \left(1 + y^2\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{1}{2}\left(1 + y^2\right)^{1/2}. 2y$$

$$s = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{1 + y^2}}\, dy$$
$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + y^2 + y^2}{1 + y^2}}\, dy$$
$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + 2y^2}{1 + y^2}}\, dy$$

18. $y = e^x$, de $P_0(0, 1)$ ate $P_1\left(2, e^2\right)$

$$y' = e^x$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

19. $y = x^2 + 2x - 1,\ 0 \le x \le 1$

$$y' = 2x + 2$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+(2x+2)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2+8x+4}\;dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4x^2+8x+5}\;dx$$

20. $y = \sqrt{x}\,,\ 2 \le x \le 4$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$s = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx$$

21. $y = sen\ 3x\,,\ 0 \le x \le 2\pi$

$$y' = 3\cos 3x$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+9\cos^2 3x}dx$$

Nos exercícios de 22 a 29, calcular o comprimento de arco da curva dada na forma paramétrica.

22. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, $1 \le t \le 3$

$$s = \int_1^3 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt$$

$$= \int_1^3 t\sqrt{9t^2 + 4}\; dt$$

$$= \frac{1}{18} \frac{\left(9t^2 + 4\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} \left(85\sqrt{85} - 13\sqrt{13}\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(85\sqrt{85} - 13\sqrt{13}\right) u.c.$$

23. $\begin{cases} x = 2\left(t - sen\, t\right) \\ y = 2\left(1 - \cos t\right) \end{cases},\ t \in [0, \pi]$

$$x' = 2\left(1 - \cos t\right)$$
$$y' = 2\ sen\ t$$

$$s = \int_0^\pi \sqrt{4\left(1 - \cos t\right)^2 + 4\ sen^2 t}\; dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{4\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + sen^2 t\right)}\, dt$$

$$= \int_0^\pi 2\sqrt{2 - 2\cos t}\; dt$$

$$= \int_0^\pi 2\sqrt{\left(1 - \cos t\right)}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\ dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2sen^2\ \frac{t}{2}}\ dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2}\ sen\ \frac{t}{2} dt$$

$$= -4\ .\ 2\ .\ \cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = -8\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$= -8(0-1)$$

$$= 8\ u.\ c.$$

24. $\begin{cases} x = -sen\ t \\ y = \cos t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi]$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + sen^2 t}\ dt$$

$$= t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

25. $\begin{cases} x = t\ sen\ t \\ y = t\ \cos t \end{cases},\ t \in [0, \pi]$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{t^2\cos^2 t + 2t\cos t\ sen\ t + sen^2 t + \cos^2 t - 2t\ sen\ t\cos t + t^2 sen^2 t}\ dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1+t^2}\ dt$$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\pi + \sqrt{1+\pi^2}\right|$$

26. $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 1 \end{cases},\ t \in [0, 2]$

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+9}\ dt$$

$$= \sqrt{10}\ t\Big|_0^2 = 2\sqrt{10}$$

27. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}$, $0 \le t \le 2$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}.3t^2 \\ y' = \dfrac{1}{2}.2t \end{cases}$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{t^4 + t^2}\ dt = \int_0^2 t\sqrt{t^2+1}dt$$

$$u = t^2 + 1$$
$$du = 2t\ dt$$

$$s = \int_0^2 t\left(t^2+1\right)^{1/2} dt = \frac{1}{2}\left.\frac{\left(t^2+1\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left(5^{3/2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right) u.\,c.$$

28. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t\, sen\ t \end{cases}$, $1 \le t \le 2$

$$\begin{cases} x' = -e^t\, sen\ t + \cos t\ e^t \\ y' = e^t \cos t + sen\ t\ e^t \end{cases}$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{e^{2t}(\cos t - sen\, t)^2 + e^{2t}(\cos t + sen\, t)^2}$$

$$= \int_1^2 e^t \sqrt{2}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\, e^t \Big|_1^2 = \sqrt{2}\left(e^2 - e\right) u.\, c.$$

29. $\begin{cases} x = 2\cos t + 2t\ sen\, t \\ y = 2\ sen\, t - 2t\cos t \end{cases}, \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$$x' = 2t\cos t$$
$$y' = 2t\ sen\, t$$

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4t^2\cos^2 t + 4t^2 sen^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2t\, dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}\, u.\, c.$$

30. Achar o comprimento da hipociclóide

$$\begin{cases} x = 4\ sen^3 t \\ y = 4\cos 3\, t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x' = 4 \,.\, 3\ sen^2 t \,.\cos t \\ y' = -4 \,.\, 3\cos^2 t \,.\, sen\, t \end{cases}$$

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{12^2\, sen^4 t\, \cos^2 t + 12\cos^4 t\; sen^2 t}\; dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 12\; sen\, t\, \cos t\; dt$$

$$= 4 \,.\, 12 \,.\, \frac{sen^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{48}{2}(1-0)$$

$$= 24\; u.\, c.$$

31. Achar o comprimento da circunferência.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\; sen\, t \end{cases},\; t \in [0,\, 2\pi]$$

$$x' = -a\; sen$$
$$y' = a\cos t$$

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 sen^2 t + a^2\cos^2 t}\; dt$$

$$= 4\int a\; dt = 4\; at\Big|_0^{\pi/2} = 2\; a\pi\; u.\, c.$$

32. Calcular o comprimento da parte da circunferência que está no 1° quadrante

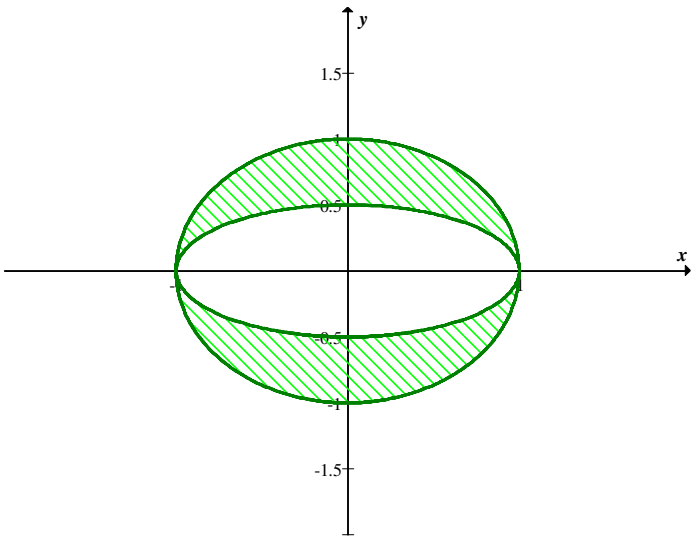
$$\begin{cases} x = 7\cos\dfrac{t}{4} \\ y = 7\; sen\dfrac{t}{4} \end{cases}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 sen^2\frac{t}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cos^2\frac{t}{4}}\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{7}{4} dt = \frac{7}{4} t\Big|_0^{2\pi} = \frac{7}{4}\pi\; u.\, c.$$

Nos exercícios de 33 a 35, calcular a área da região limitada pelas seguintes curvas, dadas na forma paramétrica.

33. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\, t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \dfrac{1}{2} sen\, t \end{cases}$

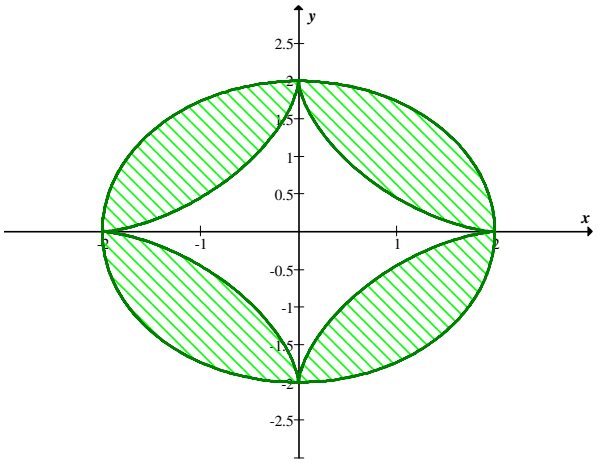


$$A = -4\int_0^{\pi/2} sen\, t\,(-sen\, t)\, dt + 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} sen\, t\,(-sen\, t)\, dt$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\pi$$

$$= \frac{1}{2}\pi\ u.c.$$

34. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\ sen^3 t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\ sen\, t \end{cases}$



$$A = 4\left[-\int_0^{\pi/2} 2\,sen\,t\,(-2\,sen\,t)dt - \int_0^{\pi/2} -2\,sen^3 t\,.\,2\,.\,3\cos^2 t(-sen\,t)dt \right]$$

$$= 4\left[4\,.\,\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\,sen\,2t \right)\Big|_0^{\pi/2} - 12\int_0^{\pi/2} sen^4 t\,\cos^2 t\,dt \right.$$

$$= 4\left[2\,.\,\frac{\pi}{2} - 12\int_0^{\pi/2} sen^4 t\,(1 - sen^2 t)\,dt \right]$$

$$= 4\pi - 48\int_0^{\pi/2} (sen^4 t - sen^6 t)\,dt$$

$$= 4\pi + 48\left(-\frac{1}{6}\,sen^5 t\cos t + \frac{5}{6}\int sen^4 t\,dt \right) - 48\int sen^4 t\,dt\Big|_0^{\pi/2}$$

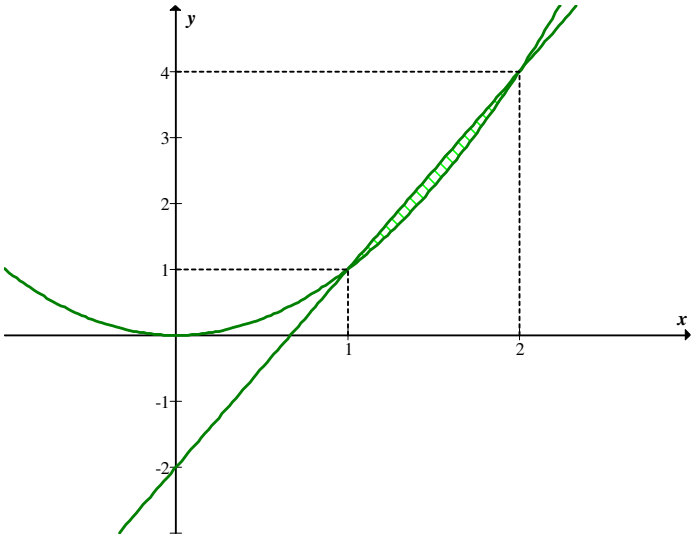
$$= 4\pi - \frac{48}{6}\,sen^5 t\cos t\Big|_0^{\pi/2} + 48\,\frac{5}{2}\int_0^{\pi/2} sen^4 t\,dt - 48\int_0^{\pi/2} sen^4 t\,dt$$

$$= 4\pi - 8\left(-\frac{1}{4}\,sen^3 t\cos t + \frac{3}{4}\int sen^2 t\,dt \right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 4\pi - 6\left(\frac{1}{2}t \right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 4\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{8\pi - 3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}\,u.c.$$

35. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$



$y = x^2$

$y = 3x - 2$

$x = 2$ e $x = 1$

$(1,1) \rightarrow t = 1$ $\qquad$ $(1,1) \rightarrow t = 0$

$(2,4) \rightarrow t = 2$ $\qquad$ $(2,4) \rightarrow t = 1$

$$A_1 = \int_1^2 t^2 . 1 . dt \qquad A_1 = \int_0^1 (1 + 3 . t) . dt$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 \qquad = t + 3\frac{t^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{7}{3} \qquad = \frac{5}{2}$$

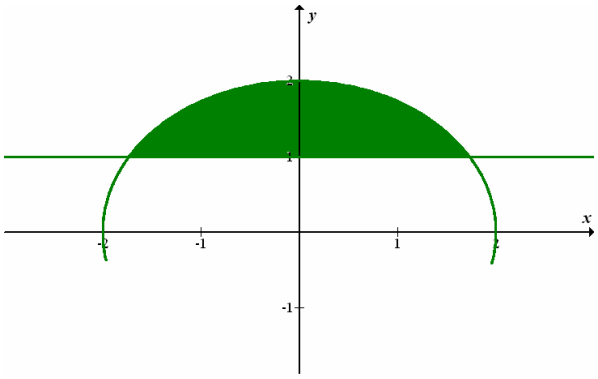
$$A = \frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{1}{6}\, u.c.$$

36. Calcular a área da arte da circunferência

$x = 2 \cos t$

$y = 2\ sen\ t$

que está acima da reta $y = 1$



$(0, 2) \quad \rightarrow \quad t = \pi/2$

$\left(\sqrt{3}, 1\right) \quad \rightarrow \quad 2\cos t = \sqrt{3} \quad \therefore \quad \cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad t = \dfrac{\pi}{6}$

$$A_1 = \int_{\pi/2}^{\pi/6} 2\ sen\ t\ (-2\ sen\ t)\ dt$$

$$= -4\int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = -2\left(t - \frac{1}{2}\ sen\ 2t\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi/6}$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} sen\ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} sen\ \pi\right)$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi$$

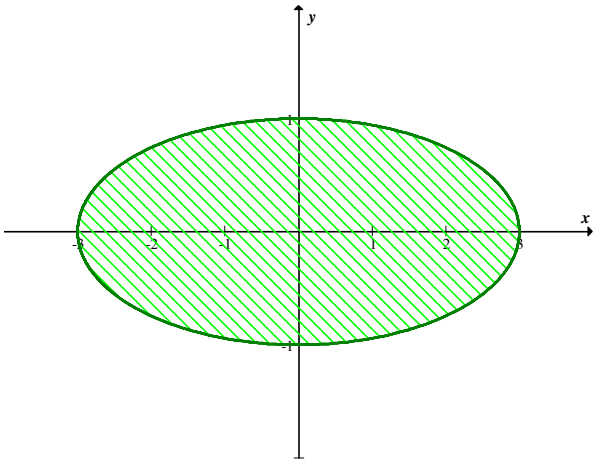
$$= \frac{-2\pi + 3\sqrt{3} + 6\pi}{6} = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6}$$

$$A = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{4\pi + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}\ u.\ c.$$

37. Calcular a área da região delimitada pela elipse



$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = sen\ t \end{cases}$$

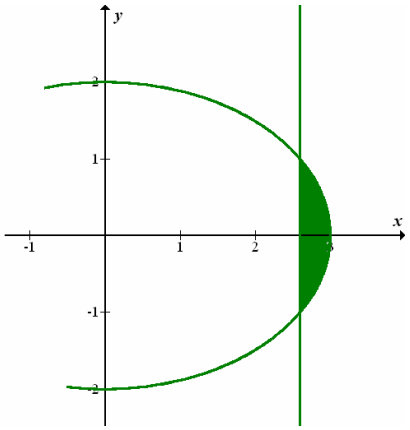
$$A_1 = \int_{\pi/2}^{0} sen\ t\,(-3\ sen\ t)\,dt$$

$$= 3\int_{\pi/2}^{0} sen^2\ t\ \ dt$$

$$= \frac{3\pi}{4}\ u.c.$$

$$A = 4\,.\,\frac{3\pi}{4} = 3\pi\ u.a$$

38. Calcular a área da região limitada à direita pela elipse $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\ sen\ t \end{cases}$ e a esquerda pela reta $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\cos t \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \quad \therefore \quad t = \frac{\pi}{6}$$

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} 2\ sen\ t\ (-3\ sen\ t)\ dt = 6\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} sen^2 t\ dt$$

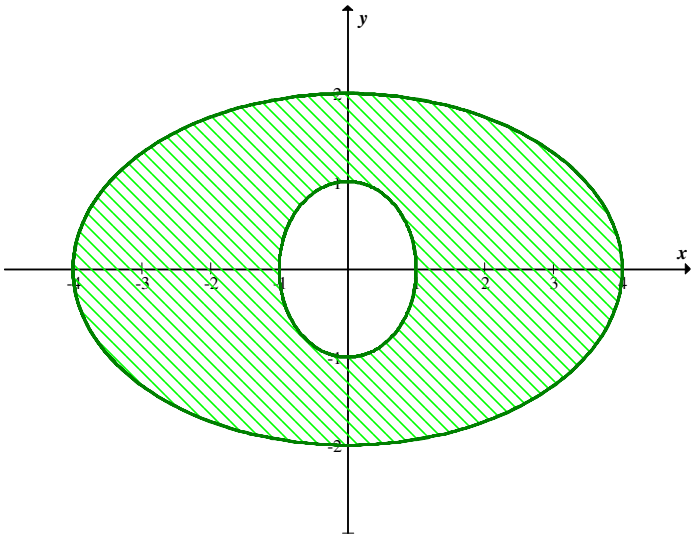
$$= 6\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}sen\ 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/6}$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}sen\ \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{3}\ u.\ a.$$

39. Calcular a área da região entre as curvas

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\ sen\ t \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\ t \end{cases}$$



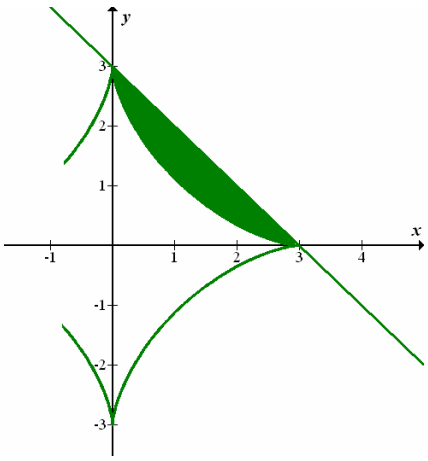
$$A_1 = 4\int_{\pi/2}^{0} 4\ sen\ t(-2\ sen\ t)dt = 8\pi$$

$$A_2 = 4\int_{\pi/2}^{0} -sen\ t\ sen\ t\ dt = -\left(\frac{1}{2}sen\ t\cos t + \frac{1}{2}t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \pi$$

$$A = 8\pi - \pi = 7\pi\ u.\ a.$$

40. Calcular a área entre o arco da hipociclóide $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\ sen^3 t \end{cases}$, $t \in \left[0, \pi/2\right]$

e a reta $x + y = 3$



$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 3\, sen^3 t \left(-3 \,.\, 3\cos^3 t \,.sen\, t\right) dt$$

$$= 27 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sen^4 t \cos^2 t \; dt$$

$$= 27 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sen^4 t \left(1 - sen^2 t\right) dt$$

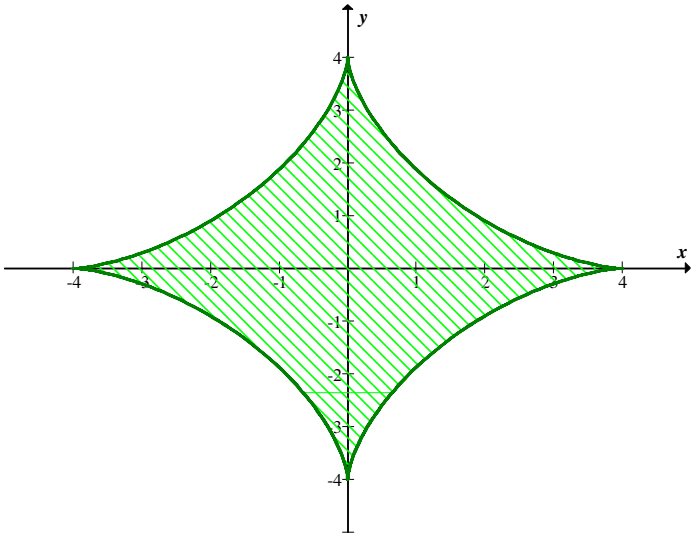
$$= 27 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(sen^4 t - sen^6 t\right) dt$$

$$= 27 \left[\frac{1}{6} sen^5 t \cos t - \frac{1}{24} sen^3 t \cos t - \frac{1}{16} sen\, t \cos t + \frac{1}{16} t \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 27 \,.\, \frac{1}{6} \,.\, \frac{\pi}{2} = \frac{27}{32}\pi$$

$$A = \frac{9}{2} - \frac{27}{32}\pi = \frac{144 - 27\pi}{32} u.\, a.$$

41. Calcular a área delimitada pela hipociclóide $\begin{cases} x = 4\, sen^3 t \\ y = 4\cos^3 t \end{cases}$



$$A = \int_0^{\pi/2} 4\cos^3 t \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, sen^2 t \,.\, \cos t \; dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(48\cos^4 t \; sen^2 t\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 48\cos^4 t \left(1 - \cos^2 t\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 48\left(\cos^4 t - \cos^6 t\right) dt$$

$$= \frac{3\pi}{2}\, u.\, a.$$

$$A = 4 \,.\, \frac{3\pi}{2} = 6\pi \; u.\, a$$

42. Calcular a área da região S , hachurada na figura 8.12

$$x = k\left(t - sen\, t\right)$$
$$y = k\left(1 - \cos t\right)$$

$$A = \int_0^{2\pi} k\left(1 - \cos t\right) k\left(1 - \cos t\right) dt$$

$$= k^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos t\right)^2 dt$$

$$= k^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt$$

$$= k^2 \left(t - 2\, sen\, t + \frac{1}{2}\cos t \; sen\, t + \frac{1}{2} t \right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= k^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} \,.\, 2\pi \right)$$

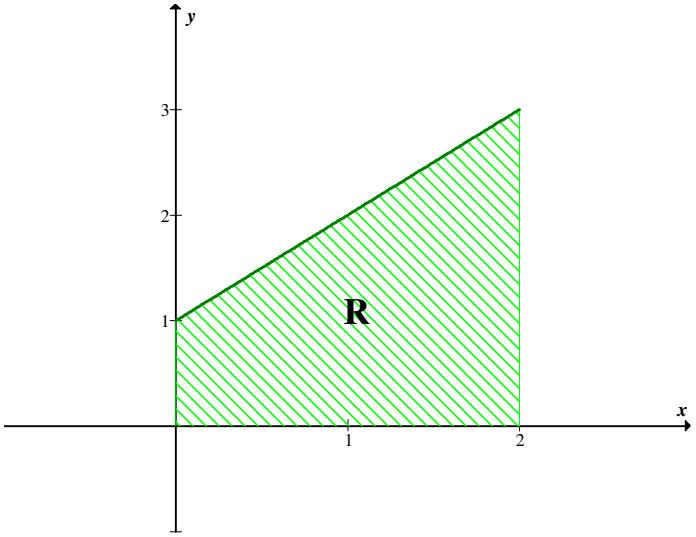
$$= k^2 \,.\, 3\pi$$

$$= 3\pi \; k^2 u.\, a.$$

8.7 – EXERCÍCIOS – pg. 359

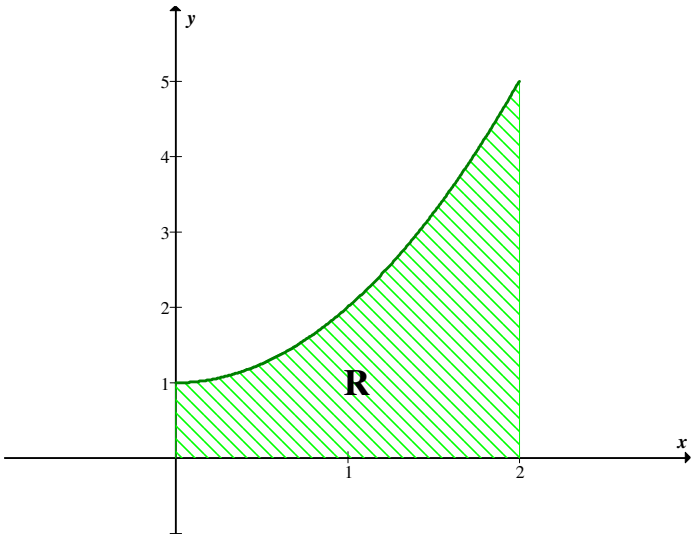
Nos exercícios de 1 a 5, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos *x*, da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas.

1. $y = x+1,\ x = 0,\ x = 2$ e $y = 0$



$$v = \pi\int_0^2 (x+1)^2 dx = \pi \,.\, \frac{(x+1)^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{\pi}{3}(27-1) = \frac{26\pi}{3} u.v.$$

2. $y = x^2+1,\ x = 0,\ x = 2$ e $y = 0$

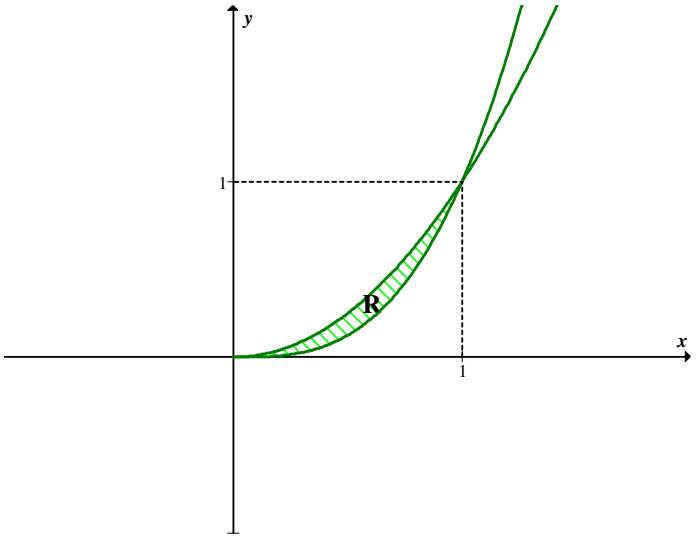


$$v = \pi\int_0^2 \left(x^2+1\right)^2 dx = \int_0^2 \left(x^4+2x^2+1\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \pi\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+2\right) = \frac{206\pi}{15}\,u.\,v.$$

3. $y = x^2$ e $y = x^3$

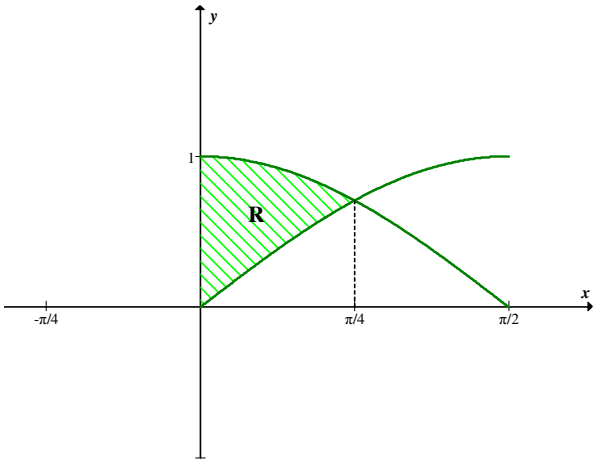


$$v = \pi\int_0^1 \left[\left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^1 \left(x^4 - x^6\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{35}\pi\,u.\,v.$$

4. $y = \cos x$, $y = sen\, x$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$



$$v = \pi \int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 x - sen^2 x\right) dx$$

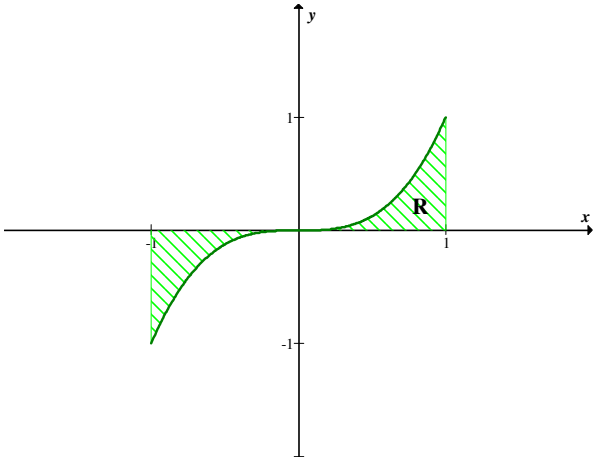
$$= \pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$$

$$= \pi \frac{1}{2} sen\, 2x \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(sen \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} u.v.$$

5. $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$



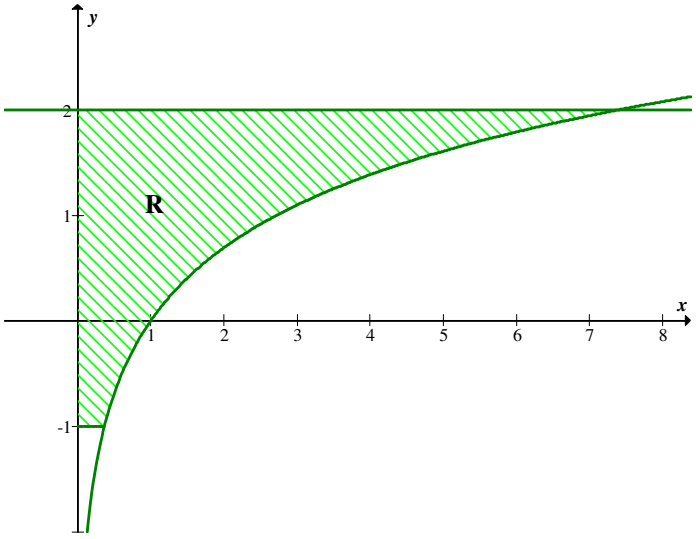
$$v = 2\pi \int_0^1 \left(x^3\right)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^6 dx$$

$$= 2\pi \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = 2\pi \frac{1}{7} = \frac{2}{7}\pi \; u.v.$$

Nos exercícios de 6 a 10 determinar o volume do solído gerado pela rotação, em torno do eixo dos y, da região R, delimitada pelos gráficos das equações dadas.

6. $y = \ln x$, $y = -1$, $y = 2$ e $x = 0$

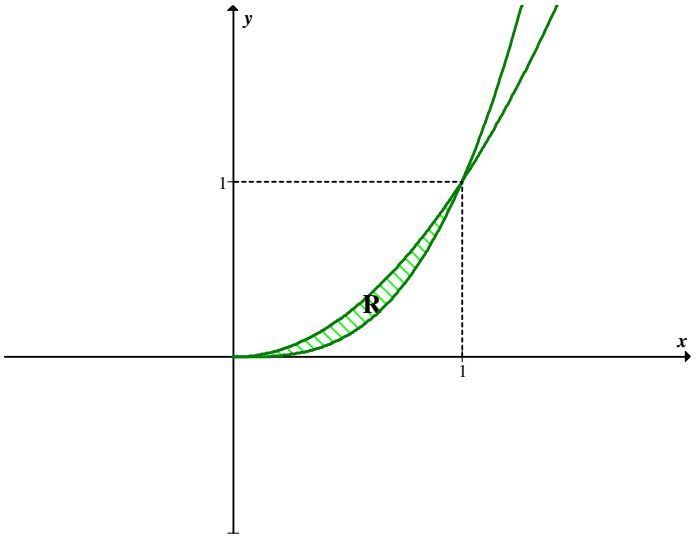


$$v = \pi \int_{-1}^{2} \left(e^y\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} e^{2y} dy = \pi \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^4 - e^{-2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^4 - \frac{1}{e^2}\right) u.v$$

7. $y = x^2$, $y = x^3$



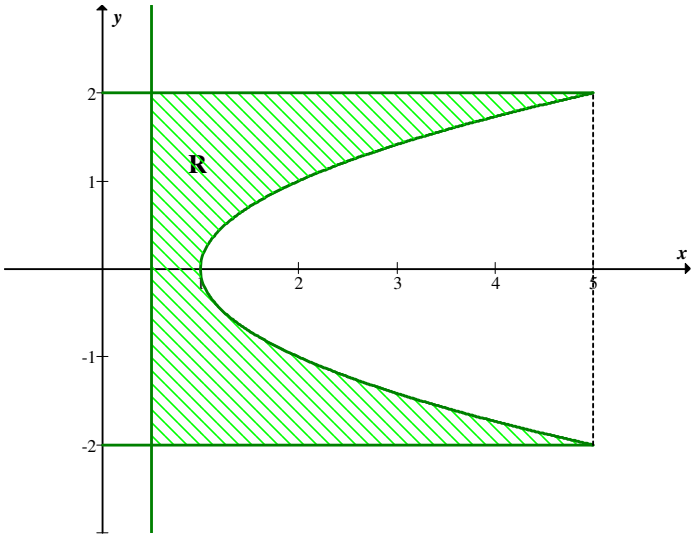
$$v = \pi\int_0^1 \left[\left(y^{1/3}\right)^2 - \left(y^{1/2}\right)^2\right] dy$$

$$= \pi\int_0^1 \left(y^{2/3} - y\right) dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^{5/3}}{5/3} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\,\frac{6-5}{10} = \frac{\pi}{10}\,u.v.$$

8. $x = y^2 + 1$, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -2$ e $y = 2$



$$v = 2\pi\int_0^2\left[\left(y^2+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]dy$$

$$= 2\pi\int_0^2\left(y^4+2y^2+1-\frac{1}{4}\right)dy$$

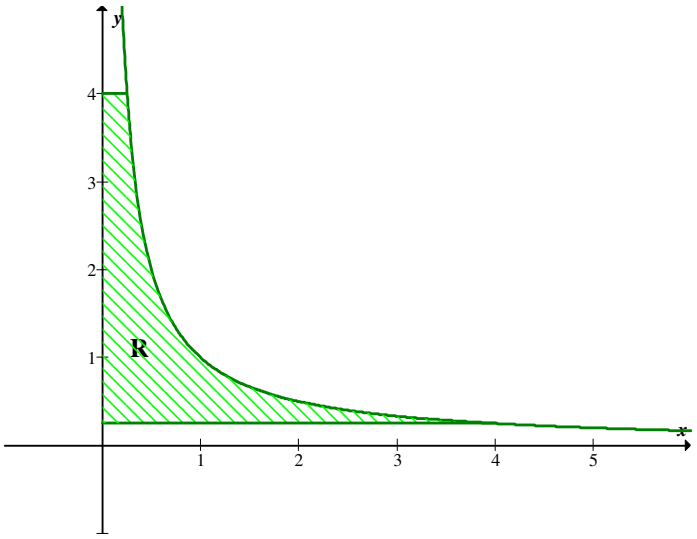
$$= 2\pi\int_0^2\left(y^4+2y^2+\frac{3}{4}\right)dy$$

$$= 2\pi\left(\frac{y^5}{5}+\frac{2}{3}y^3+\frac{3}{4}y\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 2\pi\left(\frac{32}{5}+\frac{2}{3}.8+\frac{3}{4}.2\right)$$

$$= \frac{397\pi}{15}\,u.v.$$

9. $y=\frac{1}{x}$, $x=0$, $y=\frac{1}{4}$ e $y=4$

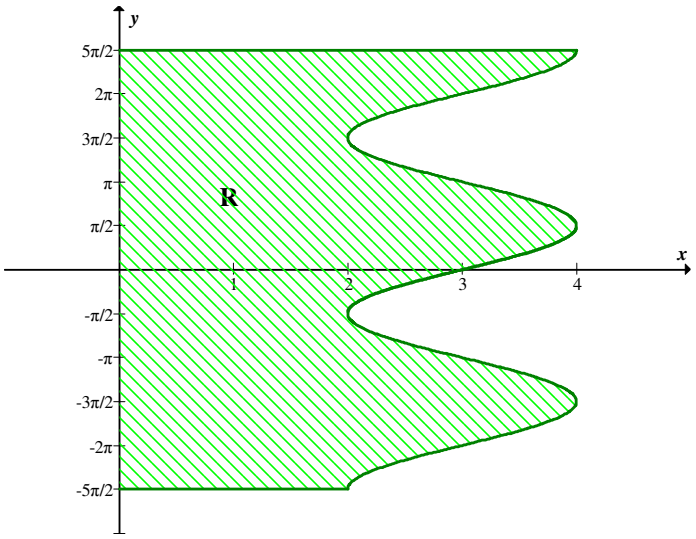


$$v = \pi\int_{1/4}^4\left(\frac{1}{y}\right)^2 dy$$

$$= \pi\int_{1/4}^4\frac{1}{y^2}dy = \pi\left.\frac{y^{-1}}{-1}\right|_{1/4}^4$$

$$= -\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1/4}\right) = -\pi\left(\frac{1}{4}-4\right) = \frac{15\pi}{4}\,u.v.$$

10. $x = 3 + sen\ y$, $x = 0$, $y = \dfrac{-5\pi}{2}$ e $y = \dfrac{5\pi}{2}$



$$v = \pi \int_{-5\pi/2}^{5\pi/2} (3 + sen\ y)^2\, dy$$

$$= \pi \int_{-5\pi/2}^{5\pi/2} (9 + 6\ sen\ y + sen^2 y)\, dy$$

$$= \pi \left(9y + 6(-\cos\ y) + \frac{1}{2}\ sen\ y \cos y + \frac{1}{2} y \right) \Bigg|_{-5\pi/2}^{5\pi/2}$$

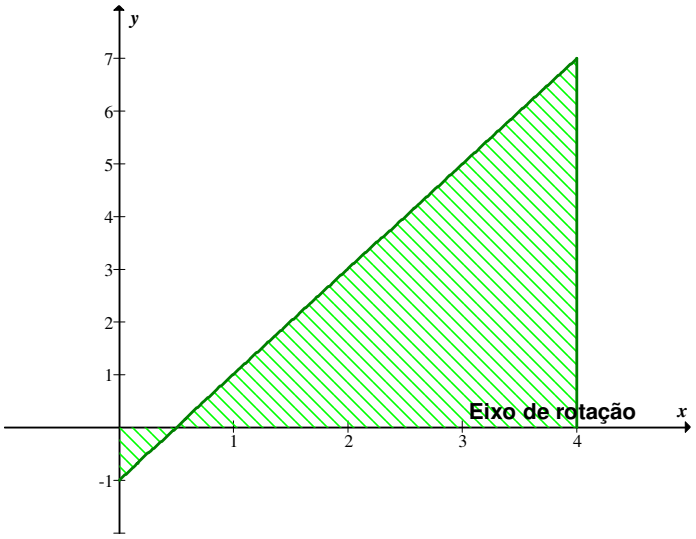
$$= \pi \left(9 . \frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2} . \frac{5\pi}{2} - 9 . \frac{-5\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{-5\pi}{2} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{90\pi}{2} + \frac{10\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{95\pi^2}{2} u.v$$

Nos exercícios de 11 a 16, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação das regiões indicadas ao redor dos eixos dados.

11. $y = 2x - 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$ ao redor do eixo dos x



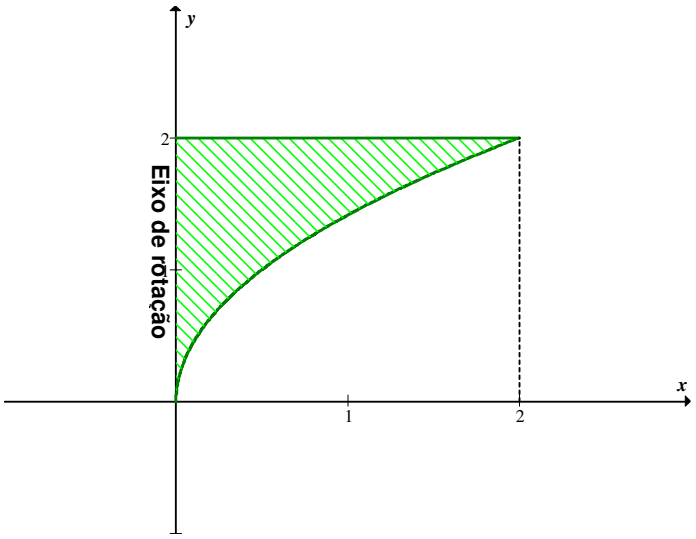
$$v = \pi \int_0^4 (2x-1)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \left(4x^2 - 4x + 1\right) dx$$

$$= \pi \left(4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x \right)\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{172}{3}\pi \, u.v$$

12. $y^2 = 2x$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$, ao redor do eixo dos y

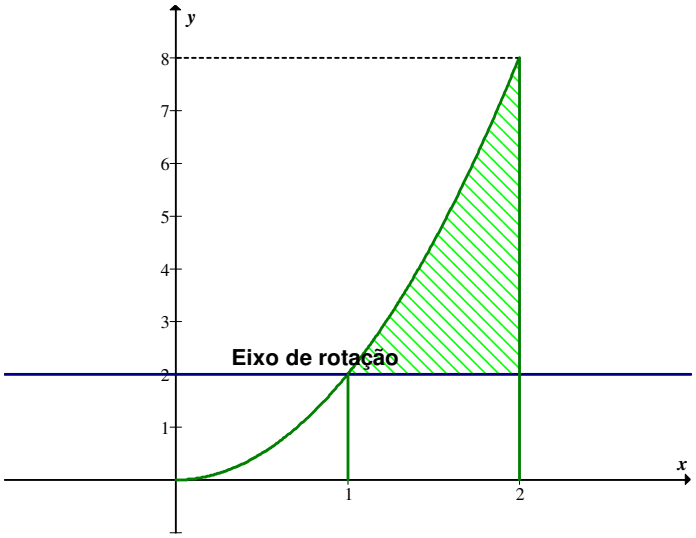


$$v = \pi\int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 dy$$

$$= \pi\int_0^2 \frac{y^4}{4} dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{y^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{5}\, u.\, c.$$

13. $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$, ao redor do eixo $y = 2$



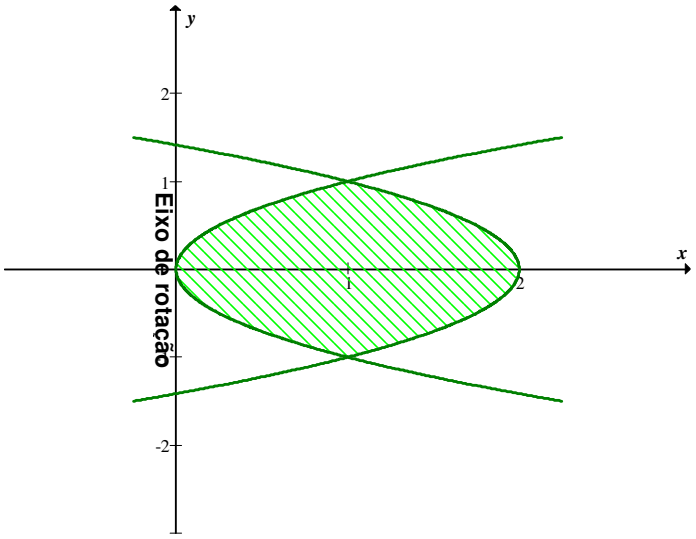
$$v = \pi\int_1^2 \left(2x^2 - 2\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_1^2 \left(4x^4 - 8x^2 + 4\right) dx$$

$$= \pi\left(4\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{152}{15}\pi\, u.\, c.$$

14. $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$; ao redor do eixo dos y



$$v = 2\pi\int_0^1 \left((2-y^2)-\left(y^2\right)^2\right)dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(4-4y^2+y^4-y^4\right)dy$$

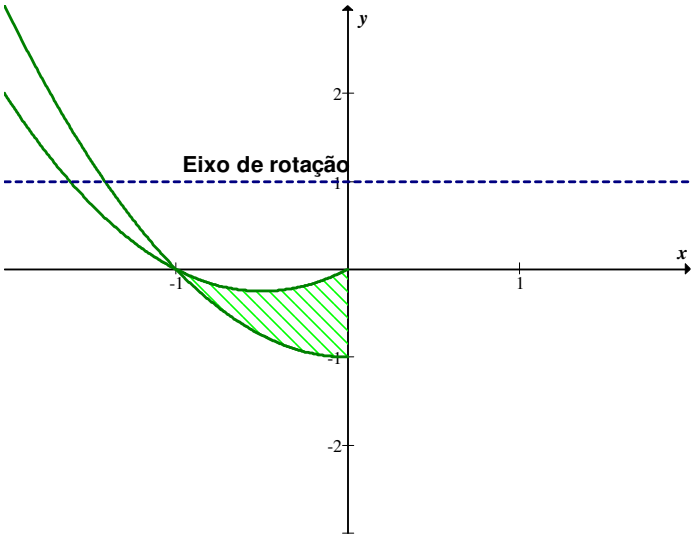
$$= 2\pi\int_0^1 \left(4-4y^2\right)dy$$

$$= 2\pi\left(4y-\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(4-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3}\pi\, u.\, v.$$

15. $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$ e $x = 0$; ao redor do eixo $y = 1$



$$V = +\pi\int_{-1}^{0}\left[\left(x^2-1-1\right)^2-\left(x^2+x-1\right)^2\right]dx$$

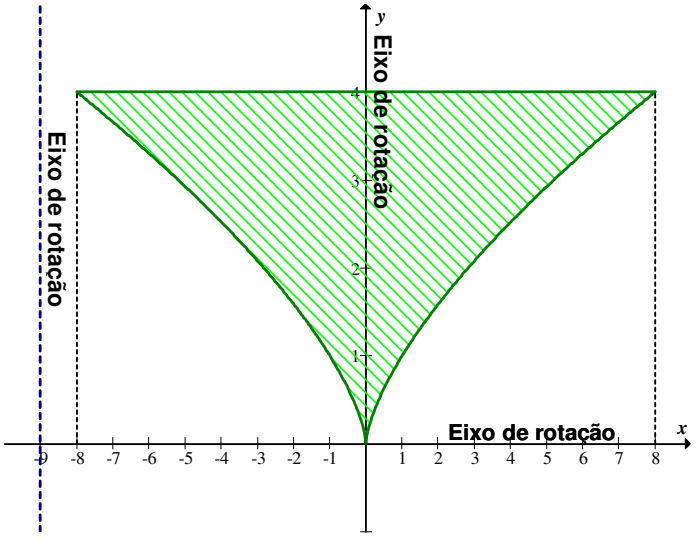
$$= +\pi\int_{-1}^{0}\left(-2x^3-3x^2+2x+3\right)dx$$

$$= +\pi\left[-2\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+3x\right]\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= -\pi\left(-\frac{1}{2}+1+1-3\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2}u.v.$$

16. $y = x^{2/3}$ e $y = 4$; ao redor dos eixos $x = -9$, $y = 0$ e $x = 0$



Eixo $x = -9$

$$V = \pi\int_0^4 \left[\left(y^{3/2}+9\right)^2 - \left(-y^{3/2}+9\right)^2\right] dy$$

$$= \pi\int_0^4 \left[\left(y^{3/2}\right)^2 + 18y^{3/2} + 81 - 81 + 18y^{3/2} - y^3\right] dy$$

$$= \pi\int_0^4 36y^{3/2}dy = \pi\, 36y^{5/2}.\frac{2}{5}\Bigg|_0^4 = \pi\,.\,\frac{72}{5}\,.\,32 = \frac{2304}{5}\pi\ u.\,v$$

Eixo $x = 0$

$$V = \pi\int_0^4 \left(y^{3/2}\right)^2\, dy$$

$$= \pi\int_0^4 y^3 dy = \pi\,\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^4 = \pi\,.\,64 = 64\,\pi\ u.\,v.$$

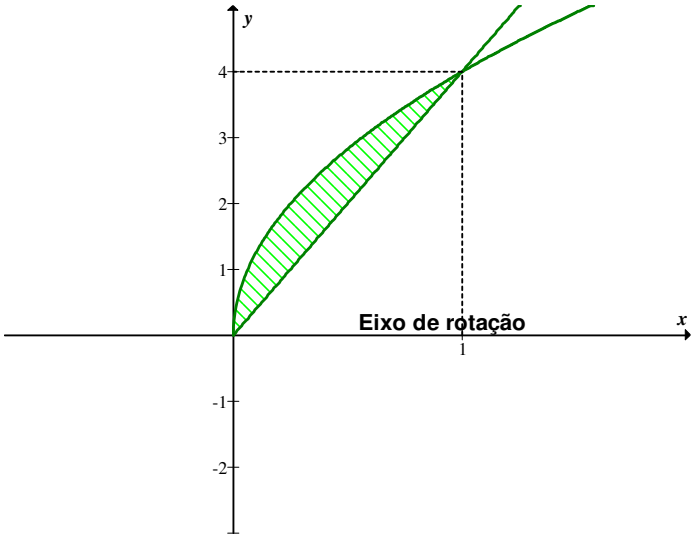
Eixo $y = 0$

$$V = 2\pi\int_0^8 \left(4^2 - x^{4/3}\right) dy$$

$$= 2\pi\left(16x - \frac{x^{7/3}}{7/3}\right)_0^8$$

$$= 2\pi\left(16\,.\,8 - \frac{3}{7}\,.\,128\right) = \frac{1024\,\pi}{7}\ u.\,v.$$

17. Encontra o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos *x*, da região limitada por $y^2 = 16x$ e $y = 4x$.



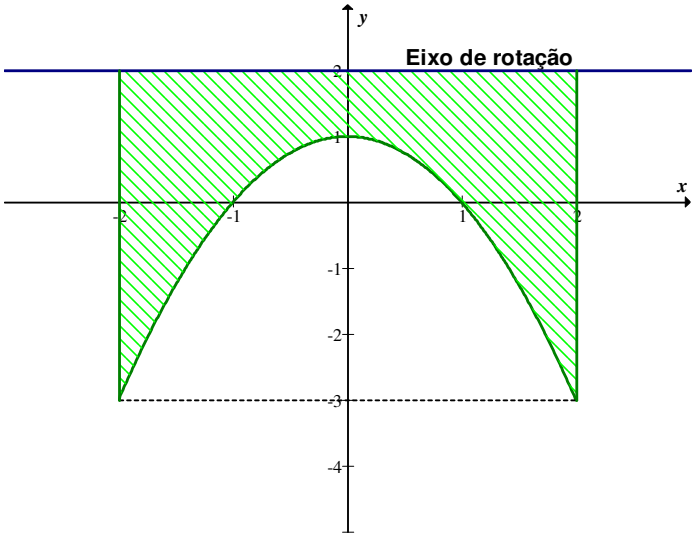
$$V = \pi\int_0^1 \left(16x - 16x^2\right) dx$$

$$= \pi\left(16\frac{x^2}{2} - 16\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left(8 - \frac{16}{3}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3}\, u.\, v.$$

18. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região limitada por $y = 1 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 2$.



$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(1-x^2-2\right)^2\,dx$$

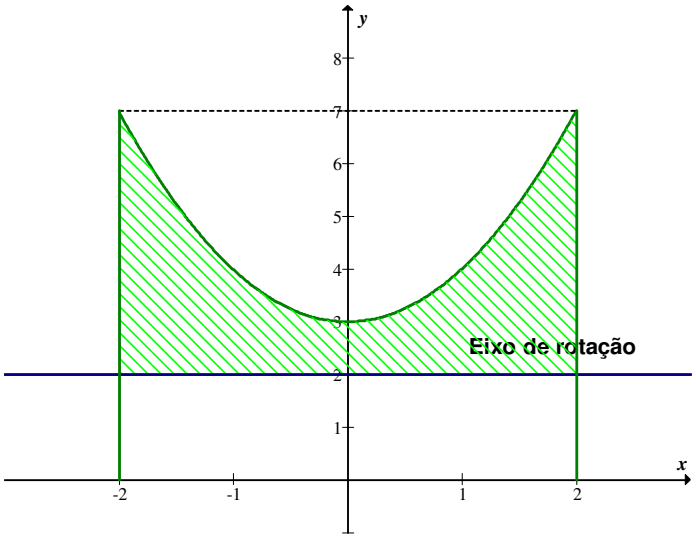
$$= \pi\int_{-2}^{2}\left(-1-x^2\right)^2\,dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(1+2x^2+x^4\right)dx$$

$$= \pi\left(x+2\,\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= 2\pi\left(2+\frac{2}{3}.8+\frac{32}{5}\right)$$

$$= \frac{412\pi}{15}\,u.v.$$

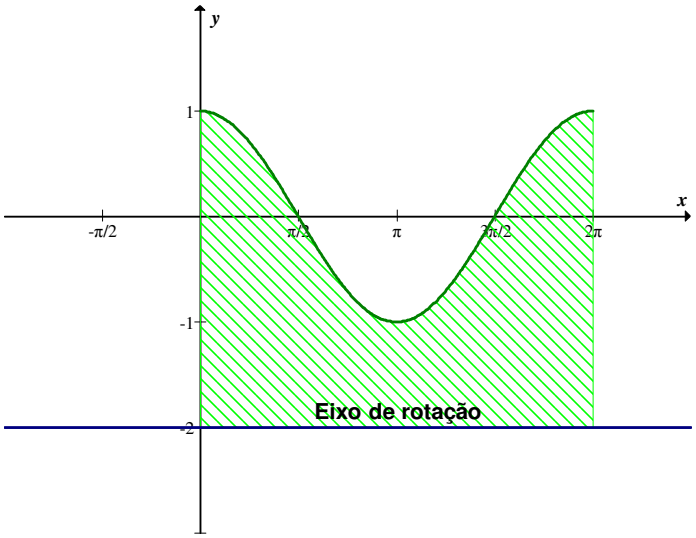
19. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região limitada por $y = 3+x^2$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 2$.



$$V = 2\pi\int_{0}^{2}\left(3+x^2-2\right)^2\,dx$$

$$= 2\pi\int_{0}^{2}\left(1+x^2\right)^2\,dx = \frac{412\pi}{15}\,u.v.$$

20. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -2$, da região limitada por $y = \cos x$, $y = -2$, $x = 0$ e $x = 2\pi$.



$$V = \pi \int_0^{2\pi} (\cos x + 2)^2 \, dx$$

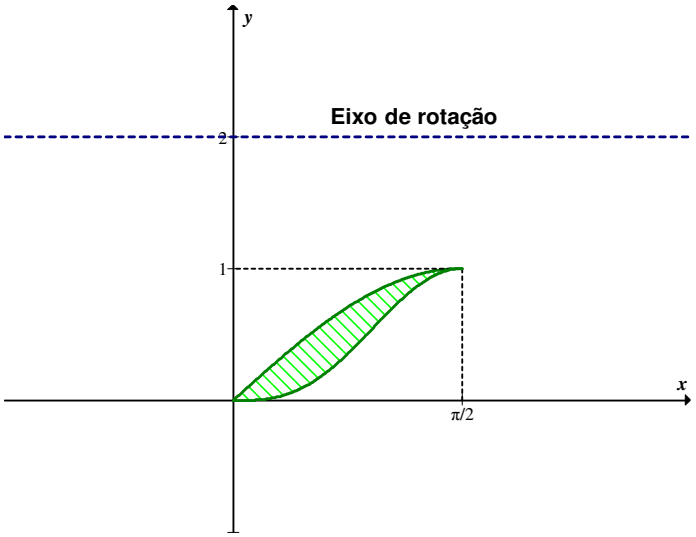
$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x + 2\cos x + 4\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} sen\, 2x + 2\, sen\, x + 4x \right) \Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} . 2\pi + 4 . 2\pi \right)$$

$$= \pi(\pi + 8\pi) = 9\pi^2 \; u.v.$$

21. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região entre os gráficos de $y = sen\, x$, $y = sen^3 x$ de $x = 0$ ate $x = \frac{\pi}{2}$.



$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \left[\left(sen^3\ x - 2 \right)^2 - \left(sen\ x - 2 \right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left(sen^6\ x - 4sen^3\ x - sen^2\ x + 4senx \right) dx$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \frac{3}{32}\pi^2\ u.v.$$

Nos exercícios de 22 a 27, calcular a área da superfície gerada pela rotação do arco de curva dado, em torno do eixo indicado.

22. $y = 2x^3$, $0 \le x \le 2$, eixo dos x

$$A = 2\pi \int_0^2 2x^3\ \sqrt{1 + 36x^4}\, dx$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{144} \left(1 + 36x^4 \right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^2$$

$$= \frac{\pi}{54} \left(577\ \sqrt{577} - 1 \right) u.a.$$

23. $x = \sqrt{y}$, $1 \le y \le 4$, eixo dos y

$$A = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\ \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\ \sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\ \frac{(1+4y)^{1/2}}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \pi \int_1^4 (1+4y)^{1/2}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{(1+4y)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_1^4$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \left(17^{3/2} - 5^{3/2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5} \right) u.a.$$

24. $y = x^2$, $-2 \le x \le 2$, eixo dos x

$$A = 2\pi \int_{2}^{2} x^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$\int x^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$u^2 = 4x^2$$
$$u = 2x$$
$$x = \frac{u}{2} \quad \therefore \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{u^2}{4} \sqrt{1+u^2} \cdot \frac{du}{2}$$

$$u = tg\ \theta$$
$$du = \sec^2 \theta\, d\theta$$
$$\sqrt{1+u^2} = \sec \theta$$

$$I = \frac{1}{8} \int tg^2 \theta \sec \theta . \sec^2 \theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{8} \int \sec^3 \theta\ tg^2 \theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{8} \int \left(\sec^2 \theta - 1\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{8} \int \left(\sec^5 \theta - \sec^3 \theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{32} \sec^3 \theta\ tg\ \theta - \frac{1}{32} \left(\frac{1}{2} \sec \theta\ tg\ \theta + \frac{1}{2} \ln \left| \sec \theta + tg\ \theta \right| \right) + C$$
$$= \frac{1}{32} \sqrt{1+u^2}^3 . u - \frac{1}{64} \sqrt{1+u^2} . u - \frac{1}{64} \ln \left| \sqrt{1+u^2} + u \right| + C$$
$$= \frac{1}{32} \sqrt{1+4x^2}^3 . 2x - \frac{1}{64} \sqrt{1+4x^2} . 2x - \frac{1}{64} \ln \left| \sqrt{1+4x^2} + 2x \right| + C$$

$$A = 2\pi\left(\frac{1}{32}\sqrt{1+4x^2}^{\,3}\,.\,2x - \frac{1}{64}\sqrt{1+4x^2}\,.\,2x - \frac{1}{64}\ln\left|\sqrt{1+4x^2}+2x\right|\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \pi\left(\frac{17\sqrt{17}}{2} - \frac{17}{4} + \frac{1}{32}\ln\left|\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}\right|\right)$$

$$\cong 53.226$$

25. $y = \frac{1}{2}x$, $0 \le x \le 4$, eixo dos x

$$A = 2\pi\int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx$$

$$= 2\pi\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 x\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{5}\,\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{\sqrt{5}\,\pi}{2}\cdot\frac{16}{2}$$

$$= 4\sqrt{5}\,\pi\ u.\,a.$$

26. $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 1$, eixo dos x

$$A = 2\pi\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 2\,dx$$

$$= 4\pi\,x\Big|_0^1$$

$$= 4\,\pi\ u.\,a.$$

27. $y = \sqrt{16-x^2}$, $-3 \le x \le 3$, eixo dos x

$$A = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{16 - x^2}\ . \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{16 - x^2}\ . \sqrt{\frac{16 - x^2 + x^2}{16 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{16 - x^2}\ . \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi\ .\ 4x\Big|_{-3}^{3}$$

$$= 48\pi\ u.\ a.$$

28. Calcular a área da superfície obtida pela revolução da parábola $y^2 = 8x$, $1 \le x \le 12$, ao redor do eixo dos x.

$$A = 2\pi \int_{1}^{12} \sqrt{8x}\ . \sqrt{1 + \frac{16}{8x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{1}^{12} \sqrt{8x}\ . \sqrt{\frac{8x + 16}{8x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{1}^{12} (8x + 16.)^{1/2}\ dx$$

$$= 2\pi\ .\ \frac{1}{8}\ .\ \frac{(8x + 16.)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{1}^{12}$$

$$= 2\pi\ .\ \frac{1}{8}\ .\ \frac{2}{3}\left(112^{3/2} - 24^{3/2}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left[28\sqrt{7} - 3\sqrt{6}\right]$$

29. Calcular a área da superfície do cone gerado pela revolução do segmento de reta $y = 4x$, $0 \le x \le 2$:

a) ao redor do eixo dos x

$$A = 2\pi \int_{0}^{2} 4x\ .\ \sqrt{1 + 16}\, dx$$

$$= 2\pi\sqrt{17}\ .\ 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}$$

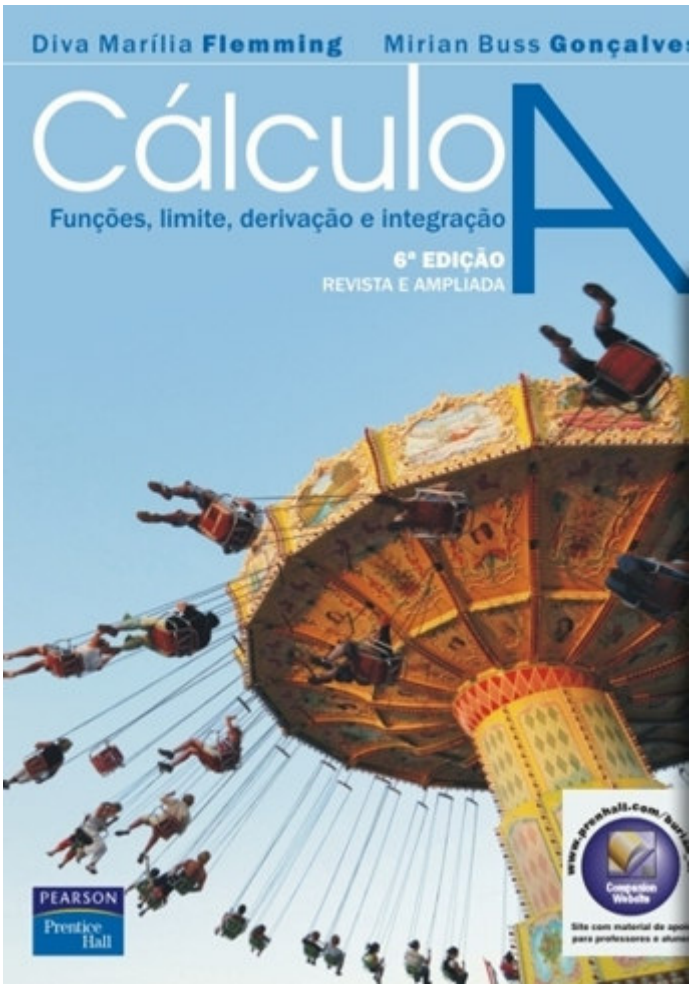
$$= 16\ \sqrt{17}\ \pi\ u.\ a.$$

b) ao redor do eixo dos y

$$A = 2\pi \int_0^8 \frac{y}{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{16}} dy$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{17}{16}} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^8$$

$$= 4\sqrt{17}\ \pi\ u.\ a.$$



RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO I

Seguem as sugestões de solução dos exercícios da lista 1.6. Observamos que em alguns exemplos existem mais de um caminho ou maneira para chegar à solução. Apresentamos somente uma opção.

SEÇÃO 1.6 – p. 10

1. Determinar todos os intervalos de números que satisfazem as desigualdades abaixo. Fazer a representação gráfica.

   a) $3 - x < 5 + 3x$

$-x - 3x < 5 - 3$

$-4x < 2$

$4x > -2$

$x > -2/4$

$x > -1/2$

$(-1/2, +\infty)$

   b) $2x - 5 < \frac{1}{3} + \frac{3}{4}x + \frac{1-x}{3}$

$2x - \frac{3}{4}x - \frac{1-x}{3} < \frac{1}{3} + 5$

$\frac{24x - 9x - 4(1-x)}{12} < \frac{1+15}{3}$

$\frac{24x - 9x - 4 + 4x}{12} < \frac{16}{3}$

$\frac{19x - 4}{12} < \frac{16}{3}$

$$\frac{19x}{12} < \frac{16}{3} + \frac{4}{12}$$

$$\frac{19x}{12} < \frac{17}{3}$$

$$57x < 204$$

$$x < \frac{204}{57}$$

$$x < \frac{68}{19}$$

$(-\infty, 68/19)$

c) $2 > -3 - 3x \geq -7$

$$2 + 3 > -3x \geq -7 + 3$$

$$5 > -3x \geq -4$$

$$\frac{5}{-3} < x \leq \frac{4}{3}$$

$(-5/3, 4/3]$

d) $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$

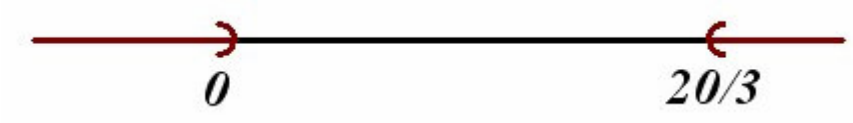
1° caso: $x > 0 \quad \Rightarrow \quad 20 < 3x \quad \therefore \quad x > 20/3$

Solução 1° caso: $(0, +\infty) \cap (20/3, +\infty) = (20/3, +\infty)$

2° caso: $x < 0 \quad \Rightarrow \quad 20 > 3x \quad \therefore \quad x < 20/3$

Solução 2° caso: $\left(-\infty, 0\right] \cap \left(-\infty, 20/3\right) = \left(-\infty, 0\right)$

Solução final: $\left(-\infty, 0\right) \cap \left(20/3, +\infty\right)$ ou $x \notin \left[0, 20/3\right]$



e) $x^2 \leq 9$

$x^2 - 9 \leq 0$

$(x-3)(x+3) \leq 0$

1° caso:

$x - 3 \geq 0$ e $x + 3 \leq 0$

$x \geq 3$ $x \leq -3$

Solução 1° caso: $\left(-\infty, -3\right] \cap \left[3 + \infty\right) = \phi$

2° caso:

$x - 3 \leq 0$ e $x + 3 \geq 0$

$x \leq 3$ $x \geq -3$

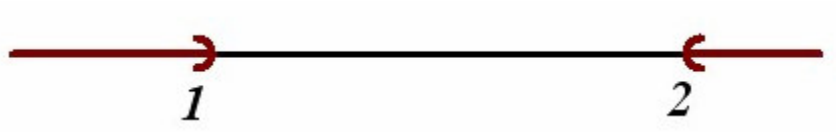
Solução 2° caso: $\left(-\infty, 3\right] \cap \left[-3 + \infty\right) = \left[-3, 3\right]$

Solução final: $\left[-3, 3\right]$

f) $x^2 - 3x + 2 > 0$

$(x-1)(x-2) > 0$

$x \notin \left[1, 2\right]$



g) $1 - x - 2x^2 \geq 0$

$2x^2 + x - 1 \leq 0$
$(x+1)(2x-1) \leq 0$
$x \in [-1, 1/2]$

h) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$

1° caso:

$2 - x > 0$ e $3 + x > 0$
$x < 2$ $x > -3$

$(-\infty, 2) \cap (-3, +\infty) = (-3, 2)$

$(x+1)(3+x) < x(2-x)$
$3x + x^2 + 3 + x < 2x - x^2$
$2x^2 + 2x + 3 < 0 \Rightarrow$ *não existe x que satisfaz*

2° caso:

$2 - x > 0$ e $3 + x < 0$
$x < 2$ $x < -3$

$(-\infty, 2) \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$

$(x+1)(3+x) > x(2-x)$
$2x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \Rightarrow x \in IR$

Solução 2° caso: $(-\infty, +\infty) \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$

3° caso:

$2 - x < 0$ e $3 + x > 0$

$x > 2$ $\qquad$ $x > -3$

$(-3, +\infty) \cap (2, +\infty) = (2, +\infty)$

$2x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \Rightarrow x \in IR$

$(-\infty, +\infty) \cap (2, +\infty) = (2, +\infty)$

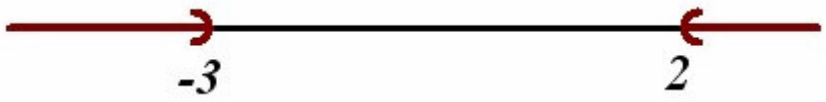
4° caso:

$2 - x < 0$ e $3 + x < 0$

$x > 2$ $\qquad$ $x < -3$

$(2, +\infty) \cap (-\infty, -3) = \emptyset$

Solução final: $\emptyset \cup (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \cup \emptyset \quad \Rightarrow \quad x \notin [-3, 2]$



i) $x^3 + 1 > x^2 + x$

$x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

$(x-1)^2 (x+1) > 0$

Portanto,

$x + 1 > 0$ ou $x > 1$.

j) $(x^2 - 1)(x + 4) \leq 0$

$(x-1)(x+1)(x+4) \leq 0$

1° caso:

$x-1\le 0$, $x+1\le 0$ e $x+4\le 0$

$x\le 1$, $x\le -1$ e $x\le -4$

Solução: $(-\infty,-4]$

2° caso:

$x-1\ge 0$, $x+1\ge 0$ e $x+4\ge 0$

$x\ge 1$, $x\ge -1$ e $x\ge -4$

Solução: $\emptyset$

3° caso:

$x-1\le 0$, $x+1\ge 0$ e $x+4\ge 0$

$x\le 1$, $x\ge -1$ e $x\ge -4$

Solução: $[-1,1]$

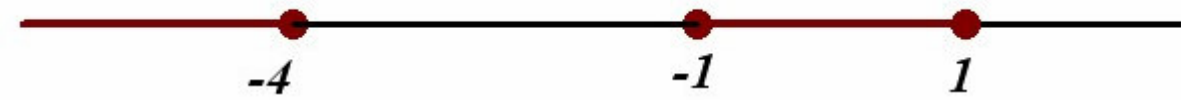
4° caso:

$x-1\ge 0$, $x+1\ge 0$ e $x+4\ge 0$

$x\ge 1$, $x\ge -1$ e $x\le -4$

Solução: $\emptyset$

Solução final: $(-\infty,-4]\cup\emptyset\cup[-1,1]\cup\emptyset=(-\infty,-4]\cup[-1,1]$



k) $\frac{2}{x-2}\le\frac{x+2}{x-2}\le 1$

1° caso: $x-2>0 \Rightarrow x>2$

$2\le x+2\le(x-2)$

$2-2\le x\le x-2-2$

$0\le x\le x-4$

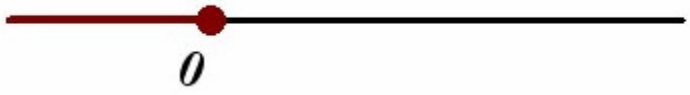
$\emptyset$

2 caso: $x-2<0 \Rightarrow x<2$

$2 \geq x+2 \geq x-2$

$0 \geq x \geq x-4 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0$

Solução: $(-\infty, 0] \cap (-\infty, 2) = (-\infty, 0]$



l) $x^4 \geq x^2$

$x^4 - x^2 \geq 0$

$x^2(x-1)(x+1) \geq 0$

1° caso:

$x-1 \geq 0$ e $x+1 \geq 0$

$x \geq 1$ e $x \geq -1$

Solução 1° caso: $[1, +\infty)$

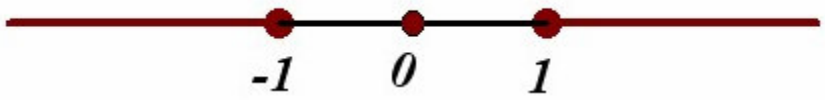
2° caso:

$x-1 \leq 0$ e $x+1 \leq 0$

$x \leq 1$ e $x \leq -1$

Solução: $(-\infty, -1]$

Solução final: $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$



m) $\dfrac{x}{x-3} < 4$

1° caso: $x-3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3$

$x < 4(x-3)$
$x < 4x - 12$
$x - 4x < -12$
$-3x < -12$
$3x < 12$
$x < 4$

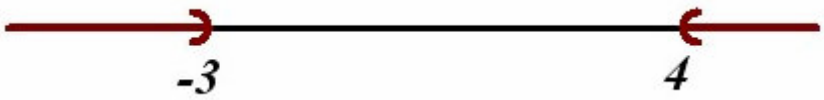
Solução 1° caso: $(4, +\infty)$

2° caso: $x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 3$

$x > 4(x-3)$
$x > 4x - 12$
$x - 4x > -12$
$-3x > -12$
$3x > 12$
$x > 4$

Solução 2° caso: $(-\infty, 3)$

Solução final: $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$
$x \notin [3, 4]$



n) $\dfrac{1/2\,x - 3}{4 + x} > 1$

1° caso: $4 + x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -4$

$\dfrac{1}{2}x - 3 > 4 + x$
$\dfrac{1}{2}x - x > 4 + 3$
$-\dfrac{1}{2}x > 7$
$x < -14$

Solução 1° caso: $\emptyset$

2° caso: $4 + x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -4$

$\frac{1}{2}x - 3 < 4 + x$

$\frac{1}{2}x - x < 4 + 3$

$\frac{1}{2}x > -7$

$x > -14$

Solução 2° caso: $(-14, -4)$

Solução final: $(-14, -4)$

o) $\frac{3}{x-5} \leq 2$

1° caso: $x - 5 > 0 \Rightarrow \quad x > 5$

$3 \leq 2(x - 5)$

$3 \leq 2x - 10$

$-2x \leq -13$

$2x \geq 13$

$x \geq 13/2$

Solução 1° caso: $[13/2, +\infty]$

2° caso: $x - 5 < 0 \Rightarrow \quad x < 5$

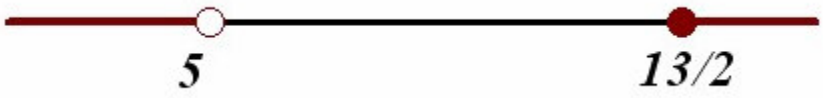
$3 \geq 2(x - 5)$

$x \leq 13/2$

Solução 2° caso: $(-\infty, 5)$

Solução final: $(-\infty, 5) \cup [13/2, +\infty)$

$x \notin [5, 13/2)$



p) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

$(x-2)(x^2 + x + 1) > 0$
$x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2$

q) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

$(x^2 - 2x + 1)(x + 2) \leq 0$
$(x-1)^2 (x+2) \leq 0$
$x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$
Solução Final: $(-\infty, -2] \cup \{1\}$

r) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$

1° caso:

$x + 1 > 0$ e $x - 2 > 0$ ou $(2, +\infty)$
$x > -1$ $x > 2$

$x - 2 \geq 3(x + 1)$
$x - 2 \geq 3x + 3$
$x - 3x \geq 3 + 2$
$-2x \geq 5$
$x \leq -5/2$

Solução 1° caso: $\emptyset$

2° caso:

$x + 1 < 0$ e $x - 2 < 0$ ou $(-\infty, -1)$
$x < -1$ $x < 2$

$x - 2 \geq 3(x + 1)$
$x \leq -5/2$

Solução 2° caso: $(-\infty, -5/2]$

3° caso:

$x + 1 > 0$ e $x - 2 < 0$ ou $(-1, 2)$
$x > -1$ $x < 2$

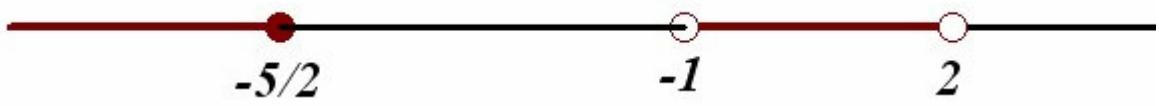
$x - 2 \leq 3(x + 1)$
$x \geq -5/2$

Solução 3° caso: $(-1, 2)$

° caso:

$x + 1 < 0$ e $x - 2 > 0$ ou $\emptyset$
$x < -1$ $x > 2$

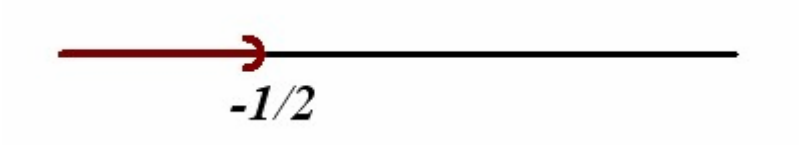
Solução final: $(-\infty, -5/2] \cup (-1, 2)$



s) $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 < 0$

$(2x-1)^2(2x+1) < 0$

$2x + 1 < 0$
$2x < -1$
$x < -1/2$



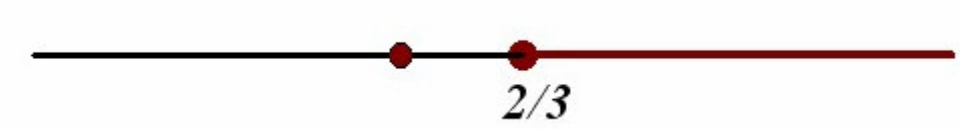
t)

$12x^3 - 20x^2 \geq -11x + 2$
$12x^3 - 20x^2 + 11x - 2 \geq 0$

$(2x-1)^2(3x-2) \geq 0$

$3x - 2 \geq 0$
$3x \geq 2$
$x \geq 2/3$

Solução Final: $[2/3, +\infty) \cup \{1/2\}$



2. Resolva as equações em *IR*

a) $|5x - 3| = 12$

$5x - 3 = 12$ ou $5x - 3 = -12$
$5x = 12 + 3$ $5x = -12 + 3$
$5x = 15$ $5x = -9$
$x = 15/5$ $x = -9/5$
$x = 3$

Solução: $\{-9/5, 3\}$

b) $|-4+12x| = 7$

$-4+12x=7$	ou	$-4+12x=-7$
$12x=7+4$		$12x=-7+4$
$12x=11$		$12x=-3$
$x=11/12$		$x=-3/12$
		$x=1/4$

Solução: $\{-1/4, 11/12\}$

c) $|2x-3| = |7x-5|$

$2x-3=7x-5$	ou	$-(2x-3)=7x-5$
$2x-7x=-5+3$		$-2x+3=7x-5$
$-5x=-2$		$-2x-7x=-5-3$
$5x=2$		$-9x=-8$
$x=2/5$		$x=8/9$

Solução: $\{2/5, 8/9\}$

d) $\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| = 5$

$\dfrac{x+2}{x-2}=5 \quad , x\neq 2$	ou	$\dfrac{x+2}{x-2}=-5, x\neq 2$
$x+2=5(x-2)$		$x+2=-5(x-2)$
$x+2=5x-10$		$x+2=-5x+10$
$x-5x=-10-2$		$x+5x=10-2$
$-4x=-12$		$6x=8$
$x=12/4$		$x=8/6$
$x=3$		$x=4/3$

Solução: $\{4/3, 3\}$

e) $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

$\frac{3x+8}{2x-3} = 4 \qquad x \neq 3/2 \qquad$ ou $\qquad \frac{3x+8}{2x-3} = -4 \qquad x \neq 3/2$

$3x+8 = 4(2x-3)$ $\qquad$ $3x+8 = -4(2x-3)$

$3x+8 = 8x-12$ $\qquad$ $3x+8 = -8x+12$

$3x-8x = -12-8$ $\qquad$ $3x+8x = 12-8$

$-5x = -20$ $\qquad$ $11x = 4$

$x = 20/5$ $\qquad$ $x = 4/11$

$x = 4$

Solução: $\{4/11, 4\}$

f) $|3x+2| = 5-x$

$3x+2 = 5-x \qquad$ ou $\qquad 3x+2 = -(5-x)$

$3x+x = 5-2$ $\qquad$ $3x+2 = -5+x$

$4x = 3$ $\qquad$ $3x-x = -5-2$

$x = 3/4$ $\qquad$ $2x = -7$

$x = -7/2$

Solução: $\{-7/2, 3/4\}$

g) $|9x| - 11 = x$

$x > 0$		$x < 0$
$9x - 11 = x$	ou	$-9x - 11 = x$
$9x - x = 11$		$-9x - x = 11$
$8x = 11$		$-10x = 11$
$x = 11/8$		$x = -11/10$

Solução: $\{-11/10, 11/8\}$

h) $2x - 7 = |x| + 1$

$x > 0$	ou	$x < 0$
$2x - 7 = x + 1$		$2x - 7 = -x + 1$
$2x - x = 1 + 7$		$2x + x = 1 + 7$
$x = 8$		$3x = 8$
		$x = 8/3$ não satisfaz a condição de $x < 0$

Solução: $\{8\}$

3. Resolva as inequações em IR

a) $|x + 12| < 7$

$-7 < x + 12 < 7$
$-7 - 12 < x < 7 - 12$
$-19 < x < -5$

$x \in (-19, -5)$

b) $|3x - 4| \leq 2$

$-2 \le 3x - 4 \le 2$

$-2 + 4 \le 3x \le 2 + 4$

$2 \le 3x \le 6$

$\frac{2}{3} \le x \le 2$

$x \in [2/3, 2]$

c) $|5 - 6x| \ge 9$

$5 - 6x \ge 9$	ou	$5 - 6x \le -9$
$-6x \ge 9 - 5$		$-6x \le -9 - 5$
$-6x \ge 4$		$-6x \le -14$
$-x \ge 4/6$		$6x \ge 14$
$x \le -2/3$		$x \ge 14/6$
		$x \ge 7/3$

$x \in (-\infty, -2/3]$ ou $x \in [7/3, +\infty)$ ou, de forma equivalente, $x \notin (-2/3, 7/3)$

d) $|2x - 5| > 3$

$2x - 5 > 3$	ou	$2x - 5 < -3$
$2x > 3 + 5$		$2x < -3 + 5$
$2x > 8$		$2x < 2$
$x > 4$		$x < 1$

Solução: $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ ou $x \notin [1, 4]$

e) $|6 + 2x| < |4 - x|$

$|6+2x|^2 < |4-x|^2$

$36+24x+4x^2 < 16-8x+x^2$

$3x^2+32x+20<0$

$(3x+2)(x+10)<0$

$3(x+2/3)(x+10)<0$

$x \in (-10, -2/3)$

f) $|x+4| \leq |2x-6|$

$x^2+8x+16 \leq 4x^2-24x+36$

$-3x^2+32x-20 \leq 0$

$3x^2-32x+20 \geq 0$

$(x-10)(3x-2) \geq 0$

$3(x-10)(x-2/3) \geq 0$

Solução: $(-\infty, 2/3] \cup [10, +\infty]$ ou $x \notin (2/3, 10)$

g) $|3x| > |5-2x|$

$9x^2 > 25-20x+4x^2$

$5x^2+20x-25>0$

$(x-1)(x+5)>0$

$x \notin [-5, 1]$

h) $\left|\frac{7-2x}{5+3x}\right| \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{7-2x}{5+3x} \le \frac{1}{2}$$

$$2|7-2x| \le |5+3x|$$

$$4\left(49-28x+4x^2\right) \le 25+30x+9x^2$$

$$196-112x+16x^2 \le 25+30x+9x^2$$

$$7x^2-142x+171 \le 0$$

$$(x-19)(7x-9) \le 0$$

$$7(x-19)(x-9/7) \le 0$$

Solução: $x \in [9/7, 19]$

i) $|x-1|+|x+2| \ge 4$

1° caso: $\begin{matrix} x-1 \ge 0 \\ x \ge 1 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} x+2 \ge 0 \\ x \ge -2 \end{matrix}$ isto é $x \ge 1$

$$x-1+x+2 \ge 4$$

$$2x+1 \ge 4$$

$$2x \ge 3$$

$$x \ge 3/2$$

2° caso: $\begin{matrix} x-1 < 0 \\ x < 1 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} x+2 < 0 \\ x < -2 \end{matrix}$ isto é $x < -2$

$$-x+1-x-2 \ge 4$$

$$-2x-1 \ge 4$$

$$-2x \ge 5$$

$$x \le -5/2$$

3° caso: $-2 \le x < 1$

$$-x+1+x+2 \ge 4$$

$$3 \ge 4$$

Solução : $\emptyset$

Resultado Final: $[3/2, +\infty) \cup (-\infty, -5/2]$ ou $x \notin (-5/2, 3/2)$

j) $1 < |x+2| < 4$

1° caso: $x + 2 \geq 0 \qquad x \geq -2$

$1 < x + 2 < 4$
$-1 < x < 2$

$x \in (-1, 2)$

2° caso: $x + 2 < 0 \qquad x < -2$
$1 < -x - 2 < 4$
$3 < -x < 6$

$-6 < x < -3$

$x \in (-6, -3)$

Solução final: $(-6, -3) \cup (-1, 2)$

k) $\left|\frac{2+x}{3-x}\right| > 4$

$\frac{|2+x|}{|3-x|} > 4 \quad , x \neq 3$
$|2+x| > 4|3-x|$
$4 + 4x + x^2 > 16(9 - 6x + x^2)$
$4 + 4x + x^2 > 144 - 96x + 16x^2$
$-15x^2 + 100x - 140 > 0$
$(x-2)(3x-14) < 0$
$3(x-2)(x-14/3) < 0$
Solução: $x \in (2, 14/3) - \{3\}$

l) $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$

$$\frac{5}{|2x-1|} \geq \frac{1}{|x-2|}$$

$$5|x-2| \geq |2x-1|$$

$$25(x^2 - 4x + 4) \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$25x^2 - 100x + 100 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$21x^2 - 96x + 99 \geq 0$$

$$(x-3)(7x-11) \geq 0$$

$x \notin (11/7, 3)$ e $x \neq \frac{1}{2}$

m) $|x| + 1 < x$

1° caso: $x \geq 0$

$x + 1 < x$

$x - x < -1$

$0 < -1$

Solução: $\emptyset$

2 caso: $x < 0$

$-x + 1 < x$

$-x - x < -1$

$-2x < -1$

$2x > 1$

$x > 1/2$

Solução: $\emptyset$

Solução Final: $\emptyset$

n) $3|x-1| + |x| < 1$

1° caso:

$x-1 \geq 0$ e $x \geq 0$ ou seja $x > 1$

$x \geq 1$

$3(x-1)+x<1$

$3x-3+x<1$

$4x<1+3$

$4x<4$

$x<1$

Solução: $\emptyset$

2° caso:

$x-1<0$ e $x<0$

$x<1$

$3(-x+1)+(-x)<1$

$-3x+3-x<1$

$-4x<-2$

$4x>2$

$x>\frac{1}{2}$

Solução: $\emptyset$

3° caso:

$x-1 \geq 0$ e $x<0$

$x \geq 1$

Solução: $\emptyset$

4° caso:

$x-1<0$ e $x \geq 0$

$x<1$

$3(-x+1)+x<1$

$-3x+3+x<1$

$-2x<-2$

$2x>2$

$x>1$

Solução : $\emptyset$
Solução Final: $\emptyset$

o) $\left|2x^2+3x+3\right| \leq 3$

1° caso:

$2x^2+3x+3 \geq 0$

$x \in IR$

2° caso:

$2x^2+3x+3<0$

$\emptyset$

$2x^2+3x+3 \leq 3$

$2x^2+3x \leq 0$

$x(2x+3) \leq 0$

Solução Final: $x \in [-3/2, 0]$

p) $|x-1|+|x-3|<|4x|$

1° caso: $x \geq 3$

$x-1+x-3<4x$

$2x-4x-4<0$

$-2x<4$

$2x>-4$

$x>-2$

Solução: $x \geq 3$ ou $x \in [3,+\infty)$

2° caso: $1 \le x < 3$

$x + 1 - x - 3 < 4x$

$2 < 4x$

$x > 1/2$

Solução: $1 \le x < 3$ ou $x \in [1,3)$

3° caso: $0 \le x < 1$

$-x + 1 - x + 3 < 4x$

$-2x + 4 < 4x$

$4 < 6x$

$x > 2/3$

Solução: $x \in \left(\frac{2}{3},1\right)$

4° caso: $x < 0$

$-x + 1 - x + 3 < -4x$

$-2x + 4x < -4$

$2x < -4$

$x < -2$

Solução: $x \in (-\infty,-2)$

$[1, 3)$

Solução Final: $(-\infty, -2) \cup (2/3, +\infty)$

q) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \ge \frac{1}{5}$

$5 \ge |x+1||x-3|$

1° caso: $x > 3$

$x + 1 > 0$ e $x - 3 > 0$

$x > -1$ $x > 3$

$5 \geq (x+1)(x-3)$

$5 \geq x^2 - 3x + x - 3$

$x^2 - 2x - 8 \leq 0$

$(x-4)(x+2) \leq 0$

$x \in [-2, 4]$

Solução: $x \in (3, 4]$

2° caso: $x \in (-1, 3)$

$5 \geq (x+1)(-x+3)$

$5 \geq -x^2 + 3x - x + 3$

$x^2 - 2x + 2 \geq 0$

$x \in IR$

Solução: $x \in (-1, 3)$

3° caso: $x < -1$

$5 \geq (-x-1)(-x+3)$

$5 \geq x^2 - 3x + x - 3$

$x^2 - 2x - 8 \leq 0$

$x \in [-2, 4]$

Solução: $x \in [-2, -1)$

Solução Final: $[-2, 4] - \{-1, 3\}$

r) $\left|\frac{x - 1/2}{x + 1/2}\right| < 1$

$|x - 1/2| < |x + 1/2| \quad , x \neq -1/2$

$x^2 - x + \frac{1}{4} < x^2 + 1\,x + \frac{1}{4}$

$-2x < 0$

$2x > 0$

$x > 0$

Solução Final: $(0,+\infty)$

s) $\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$

$|3-2x| \leq 4|1+x| \quad , \quad x \neq -1$

$9-12x+4x^2 \leq 16\left(1+2x+x^2\right)$

$9-12x+4x^2 \leq 16+32x+16\,x^2$

$-12x^2-44x-7 \leq 0$

$12x^2+44x+7 \geq 0$

$(6x+1)(2x+7) \geq 0$

Solução: $x \notin (-7/2, -1/6)$

4. Demonstre:

a) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a^2 = b^2$ se e somente se $a = b$.

(i) $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ (é obvia)

(ii) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$

Se $a^2 = b^2$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Rightarrow |a| = |b|$

Como $a \geq 0$ $|a| = a$

Como $b \geq 0$ $|b| = b$

Logo $a = b$.

b) Se $x < y$,então $x < \frac{1}{2}(x+y) < y$

$x < y$	$x < y$
$x + x < y + x$	$x + y < y + y$
$2x < x + y$	$x + y < 2y$
$x < \frac{1}{2}(x+y)$	$\frac{1}{2}(x+y) < y$

Logo, $x < \frac{1}{2}(x+y) < y$

c) $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$

(i) $| x |> a, a > 0 \Rightarrow x > a$ ou $x < -a$
Se $x > 0$, $| x |= x$ e, portanto, $x > a$.
Se $x < 0$, $| x |= -x$. Temos, então: $-x > a$ e dessa forma $x < -a$.

(ii) $x > a$ ou $x < -a$, $a > 0 \Rightarrow | x |> a$
$x > a$, $a > 0 \Rightarrow x > 0$. Então $| x |> a$.
$x < -a$, $a > 0 \Rightarrow x < 0$. Portanto, $| x |= -x > a$, pois $x < -a$.

d) Se $0 < a < b$, então $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$

$\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 > 0$
$b - 2\sqrt{ab} + a > 0$
$a + b > 2\sqrt{ab}$
ou $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

CAPÍTULO 2

SEÇÃO 2.10 – página 20

1. Se $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$, achar:

a) $f(0)=\dfrac{0^2-4}{0-1}=\dfrac{-4}{-1}=4$.

b) $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-4}{(-2)-1}=\dfrac{4-4}{-3}=0$.

c) $f(1/t)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{t}\right)^2-4}{\dfrac{1}{t}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{t^2}-4}{\dfrac{1-t}{t}}=\dfrac{1-4t^2}{t^2}\cdot\dfrac{t}{1-t}=\dfrac{1-4t^2}{t-t^2}$.

d) $f(x-2)=\dfrac{(x-2)^2-4}{x-2-1}=\dfrac{x^2-4x+4-4}{x-3}=\dfrac{x^2-4x}{x-3}$.

e) $f(1/2)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-4}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{4}-4}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{1-16}{4}\cdot\dfrac{2}{1-2}=\dfrac{-15}{-2}=\dfrac{15}{2}$.

f) $f(t^2)=\dfrac{(t^2)^2-4}{t^2-1}=\dfrac{t^4-4}{t^2-1}$.

2. Se $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-7}$, determine:

a) $\dfrac{5\,f(-1)-2\,f(0)+3\,f(5)}{7}$

$f(-1)=\dfrac{3(-1)-1}{-1-7}=\dfrac{-3-1}{-8}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$

$f(0)=\dfrac{3\times 0-1}{0-7}=\dfrac{-1}{-7}=\dfrac{1}{7}$

$$f(5)=\frac{3(5)-1}{5-7}=\frac{15-1}{-2}=\frac{14}{-2}=-7$$

Portanto,

$$\frac{5\,f(-1)-2\,f(0)+3\,f(5)}{7}=$$

$$=\frac{5\,\frac{1}{2}-2\,\frac{1}{7}+3\,(-7)}{7}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}-\frac{2}{7}-21}{7}$$

$$=\frac{35-4-294}{14}\cdot\frac{1}{7}$$

$$=\frac{-263}{14}\cdot\frac{1}{7}=\frac{-263}{98}$$

b)

$$[f(-1/2)]^2=\left(\frac{3\frac{-1}{2}-1}{-\frac{1}{2}-7}\right)^2$$

$$\left(\frac{\frac{-3-2}{2}}{\frac{-1-14}{2}}\right)^2=\left(\frac{-5}{2}\cdot\frac{2}{-15}\right)^2=\frac{1}{9}$$

c) $f(3x-2)=\frac{3(3x-2)-1}{3x-2-7}=\frac{9x-7}{3x-9}.$

d) $f(t)+f(4/t)=$

$$=\frac{3t-1}{t-7}+\frac{3\left(\frac{4}{t}\right)-1}{\frac{4}{t}-7}=\frac{3t-1}{t-7}+\frac{12-t}{t}\cdot\frac{t}{4-7t}$$

$$=\frac{(3t-1)(4-7t)+(12-t)(t-7)}{4t-7t^2-28+49}=\frac{12t-21t^2-4+7t+12t-84-t^2+7t}{-7t^2+53t-28}$$

$$=\frac{-22t^2+38t-88}{-7t^2+53t-28}.$$

e) $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=$

$$=\left(\frac{3h-1}{h-7}-\frac{3\cdot 0-1}{0-7}\right)\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\left(\frac{3h-1}{h-7}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\frac{21h-7-1(h-7)}{7(h-7)}\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\frac{20h}{7(h-7)}\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\frac{20}{7(h-7)}$$

f) $f[f(5)]$

$$f(5)=\frac{3\cdot 5-1}{5-7}=\frac{14}{-2}=-7$$

$$f[f(5)]=f(-7)=\frac{3(-7)-1}{(-7)-7}=\frac{-21-1}{-14}=\frac{-22}{-14}=\frac{11}{7}.$$

3. Dada a função $f(x)=|x|-2x$, calcular. $f(-1)$, $f(1/2)$ e $f(-2/3)$. Mostrar que $f(|a|)=-|a|$.

$$f(-1)=|-1|-2(-1)=1+2=3$$
$$f(1/2)=|1/2|-2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1=\frac{1-2}{2}=\frac{-1}{2}.$$
$$f(-2/3)=|-2/3|-2\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

$$f(|a|)=\|a\|-2|a|$$
$$=|a|-2|a|$$
$$=-|a|$$

4. Se $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ e $d=-a$, mostre que $f(f(x))=x$

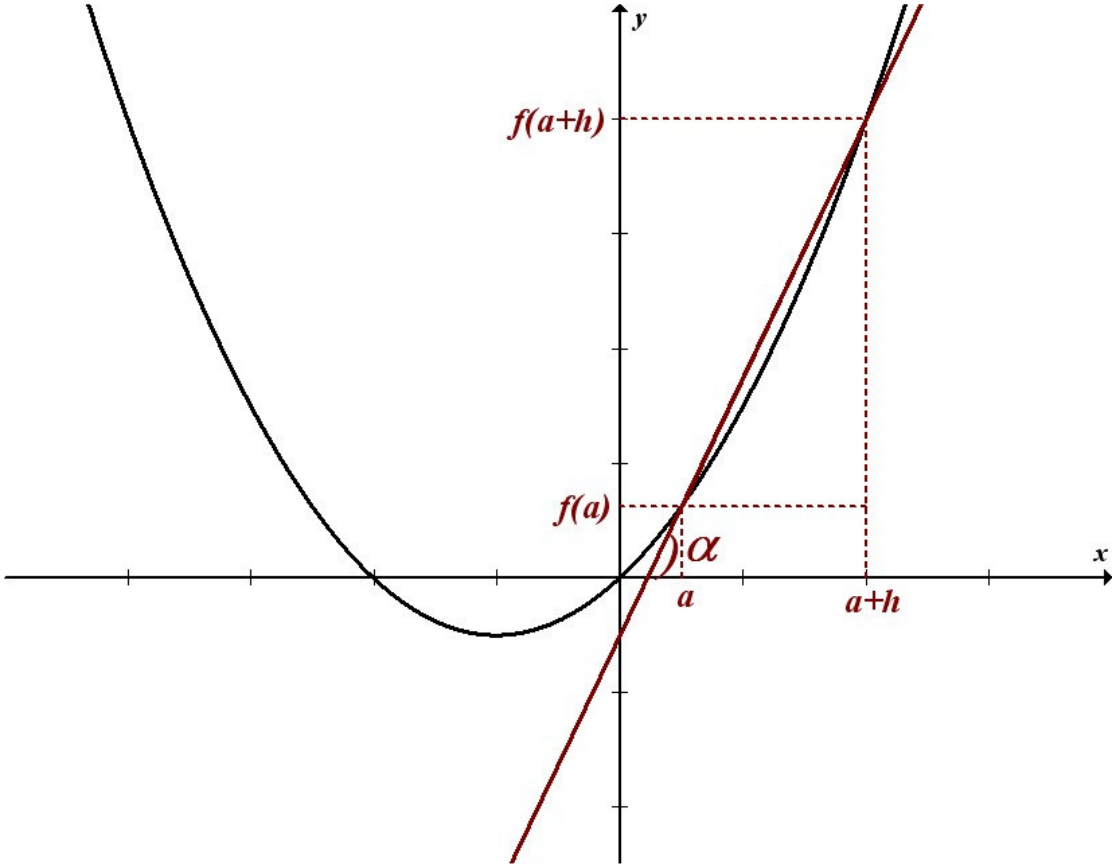
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$$

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) \\
&= \frac{a\cdot\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+b}{c\cdot\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+(-a)} \\
&= \frac{\frac{a(ax+b)}{cx-a}+b}{\frac{c(ax+b)}{cx-a}-a} \\
&= \frac{a(ax+b)+b(cx-a)}{cx-a}\cdot\frac{cx-a}{c(ax+b)-a(cx-a)} \\
&= \frac{a^2x+ab+bcx-ab}{cax+cb-acx+a^2} \\
&= \frac{a^2x+bcx}{cb+a^2}=\frac{x(a^2+bc)}{a^2+bc}=x
\end{aligned}$$

5. Se $f(x)=x^2+2x$, achar $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $h\neq 0$ e interpretar o resultado geometricamente.

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2+2(a+h)-(a^2+2a)}{h} \\
&= \frac{a^2+2ah+h^2+2a+2h-a^2-2a}{h}=\frac{h(2a+h+2)}{h} \\
&= 2a+2+h
\end{aligned}$$

A Figura que segue mostra a interpretação geométrica. Nesta figura, α é o ângulo formado pela reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$ e o eixo positivo dos x. O quociente obtido representa a tangente do ângulo α.



6. Dada $\Phi(x)=\dfrac{x-1}{2x+7}$. Forme as expressões $\Phi(1/x)$ e $1/\Phi(x)$.

$$\Phi(1/x)=\frac{1/x-1}{2\cdot\dfrac{1}{x}+7}=\frac{\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{2+7x}{x}}=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{x}{2+7x}=\frac{1-x}{2+7x}.$$

$$\frac{1}{\Phi(x)}=\frac{1}{\dfrac{x-1}{2x+7}}=\frac{2x+7}{x-1}.$$

7. Dada a função $f(x)=x^2+1$, mostrar que para $a\neq 0$ $f(1/a)=f(a)/a^2$.

$$f(1/a)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+1=\frac{1}{a^2}+1=\frac{1+a^2}{a^2}=\frac{f(a)}{a^2},\ \text{para } a\neq 0.$$

8. Dada a função $f(x)=\dfrac{1}{x}$, mostrar que $f(1+h)-f(1)=-\dfrac{h}{1+h}$. Calcular.

$f(a+h)-f(a)$.

$$f(1+h)-f(1)=\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}=\frac{1-1-h}{1+h}=\frac{-h}{1+h}$$

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=\frac{a-a-h}{a(a+h)}=\frac{-h}{a(a+h)}$$

9. Seja $f(n)$ a soma dos n termos de uma progressão aritmética. Demonstrar que $f(n+3)-3\,f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0$.

$$f(n)=a_1+a_1+r+a_1+2r+\cdots+a_1+(n-1)r$$
$$=na_1+(1+2+3+\cdots+(n-1))r$$

$$f(n+3)=(n+3)a_1+[1+2+\cdots+(n+2)]\,r$$
$$f(n+2)=(n+2)a_1+[1+2+\cdots+(n+1)]\,r$$
$$f(n+1)=(n+1)a_1+[1+2+\cdots+n]\,r$$

$$(n+3)a_1+[1+2+\cdots+(n+2)]r-3(n+2)a_1-3\,[1+2+\cdots+(n+1)]r+3(n+1)a_1+3[1+2+\cdots+n]r-$$
$$-na_1-[1+2+\cdots+(n-1)]r$$

$$=na_1+3a_1-3\,na_1-6a_1+3\,na_1+3a_1-na_1+[1+2+\cdots+(n+2)]r-3[1+2+\cdots+(n+1)]r+$$
$$+3[1+2+\cdots+n]r-[1+2+\cdots+(n+1)]\,r$$
$$=-3\,[1+2+\cdots+n]r-3(n+1)r+3[1+2+\cdots+n]r+[1+2+\cdots+n]r+$$
$$(n+1)r+(n+2)r-[1+2+\cdots+(n+1)]r$$
$$=-3(n+1)r+[1+2+\cdots+(n+1)]r+nr+(n+1)r+(n+2)r-[1+2+\cdots+(n+1)]r$$
$$=-3(n+1)r+nr+(n+1)r+(n+2)r$$
$$=-3nr-3r+nr+nr+r+nr+2r$$
$$=0$$

10. Exprimir como a função de x

a) A área de uma esfera de raio x

$A=4\pi x^2$.

b) A área de um cubo de aresta x

$A_{\,face}=x^2$

$A_{total} = 6 \cdot A_{face} = 6x^2$

$f(x) = 6x^2$

c) A área total de uma caixa de volume dado V, sabendo que a base é um quadrado de lado x.

$V = x^2 \times h$ sendo h a altura

$A_t = 4 \cdot (x \quad \cdot h) + 2x^2$

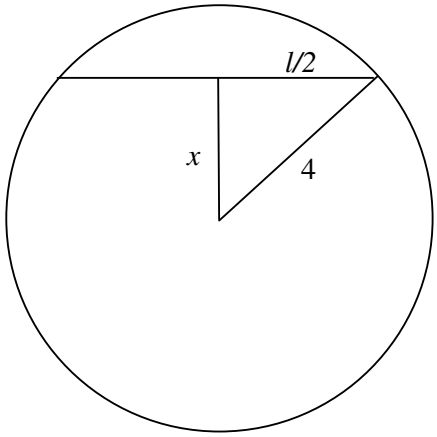
$A_t = 4 \cdot \left(x \quad \cdot \frac{V}{x^2} \right) + 2x^2$

$A_t = \frac{4V}{x} + 2x^2$

$f(x) = \frac{4V}{x} + 2x^2$

11. Exprimir o comprimento l de uma corda de um círculo de raio $4cm$ como uma função de sua distância $x\ cm$ ao centro do círculo.

A figura que segue mostra o círculo com os dados do problema, com o triângulo retângulo assinalado.



$16 = \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + x^2$

$\frac{\ell^2}{4} = 16 - x^2$

$\ell^2 = 4(16 - x^2)$

$\ell = \sqrt{4(16 - x^2)}$

$\ell = 2\sqrt{16 - x^2}$

12. Seja $f(x)=(x-2)(8-x)$ para $2 \le x \le 8$

a) Determine $f(5)$, $f(-1/2)$ e $f(1/2)$

$f(5)=(5-2)(8-5)=3\cdot 3=9$
$f(-1/2)=\nexists$
$f(1/2)=\nexists$

b) Qual o domínio da função $f(x)$?
$D(f)=[2,8]$

c) Determine $f(1-2t)$ e indique o domínio.

$$f(1-2t)=(1-2t-2)(8-1+2t)$$
$$=(-2t-1)(7+2t)=-4t^2-16t-7$$

O domínio é obtido como segue:

$2 \le x \le 8$
$2 \le 1-2t \le 8$
$1 \le -2t \le 7$
$-1 \ge 2t \ge -7$
$\frac{-7}{2} \le t \le \frac{-1}{2}$

Portanto, o domínio de $f(1-2t)$ é:

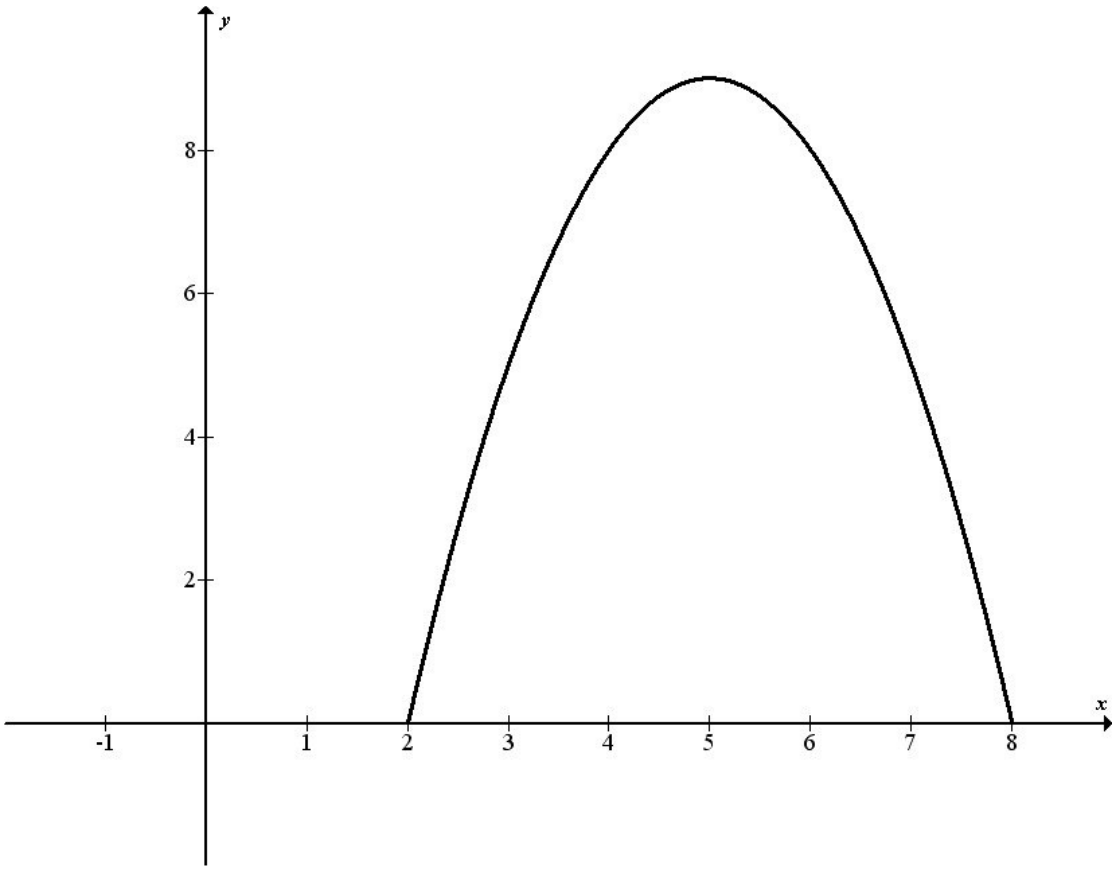
$$\left[\frac{-7}{2}, \frac{-1}{2}\right]$$

d) Determine $f[f(3)]$ e $f[f(5)]$

$f(3)=(3-2)(8-3)=1\cdot 5=5$
$f[f(3)]=f(5)=(5-2)(8-5)=3\cdot 3=9$

$f(5)=(5-2)(8-5)=3\cdot 3=9$
$f[f(5)]=f(9)=\nexists$

e) Trace o gráfico de $f(x)$



13. Determinar o domínio das seguintes funções:

a) $y = x^2$ $\quad IR$

b) $y = \sqrt{4 - x}^{\,2}$ $\quad 4 - x^2 \geq 0$ $\quad (2 - x)(2 + x) \geq 0$ $\quad [-2, 2]$

c) $y = \dfrac{1}{x - 4}$ $\quad IR - \{4\}$

d) $y = \sqrt{x - 2}$ $\quad x - 2 \geq 0$ $\quad x \geq 2$ $\quad [2, +\infty]$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4x} + 3$ $\quad x^2 - 4x + 3 \geq 0$ $\quad (x - 3)(x - 1) \geq 0$ $\quad (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

f) $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$ $\quad 3 + x \geq 0$ $\quad x \geq -3$ $\quad$ e $\quad 7 - x \geq 0$ $\quad x \leq 7$ $\quad [-3, 7]$

g) $y = \sqrt[3]{x+7} - \sqrt[5]{x+8}$ $\quad IR$

h) $y = \dfrac{x+a}{x-a}$ $\quad IR - \{a\}$

i) $y = |x+2| + 4$ $\quad -5 \le x \le 2$ $\quad [-5, 2]$

j) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

1º. Caso:

$$\begin{matrix} x+1>0 \\ x>-1 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} x \ge 0 \\ x \ge 0 \end{matrix} \qquad \text{Solução Parcial: } [0,+\infty)$$

2º. Caso:

$$\begin{matrix} x+1<0 \\ x<-1 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} x \le 0 \\ x \le 0 \end{matrix} \qquad \text{Solução Parcial: } (-\infty,-1)$$

Portanto, o domínio é $[0,+\infty) \cup (-\infty,-1)$.

k) $y = x - \dfrac{1}{x}$ $\quad IR - \{0\}$

l) $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $\quad x \ge 0$ e $1+\sqrt{x} \ne 0$

Como $1+\sqrt{x} \ne 0, \forall x$, o domínio é $[0,+\infty)$.

14. Usando uma ferramenta gráfica, traçar as curvas definidas pelas equações dadas, identificando as que representam o gráfico de uma função $y = f(x)$. Neste caso, determine a função, o domínio e o conjunto imagem.

Temos:

(a) $y = 3x - 1$, IR, IR

(b) $y = x^2$, IR, IR_+

(c) Não é função $y = f(x)$

(d) $y = -\sqrt{4-x^2}$, $[-2, 2]$, $[-2, 0]$

(e) Não é função

(f) $y = \frac{1}{x}, IR - \{0\}, \ IR - \{0\}$

(g) $y = x^2 + 11, IR, [11, +\infty)$

Seguem os gráficos

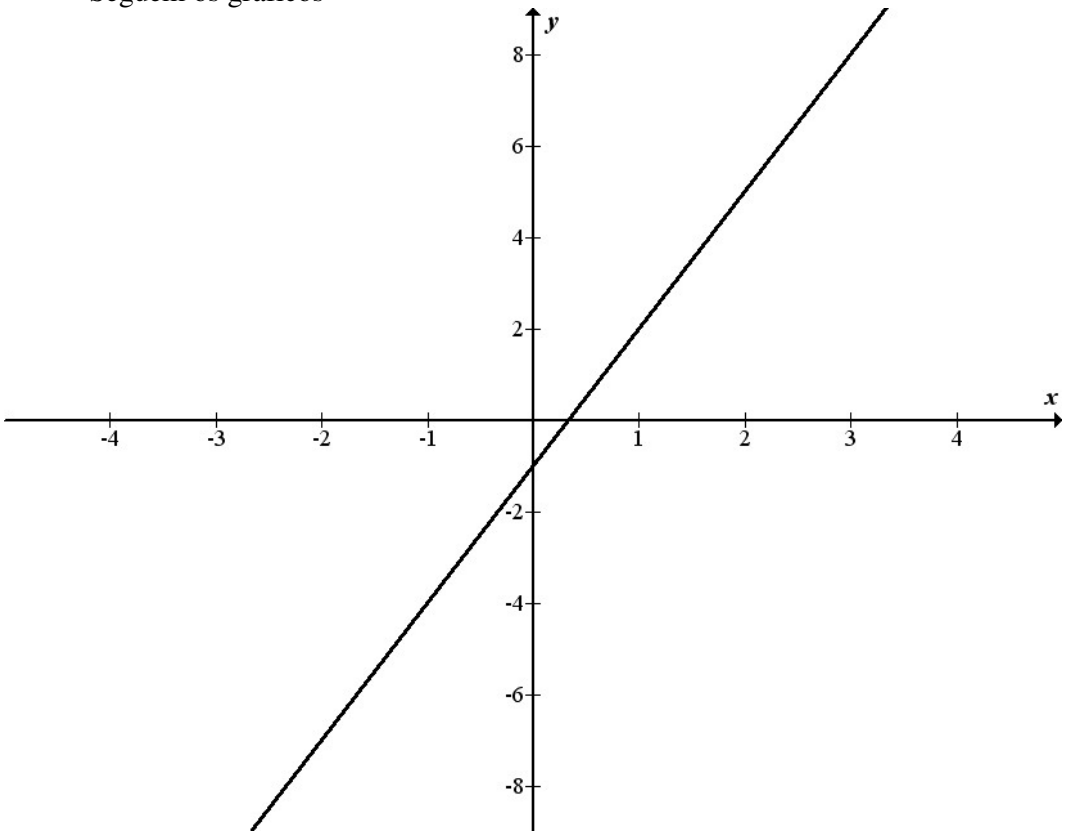


Gráfico da função do item (a)

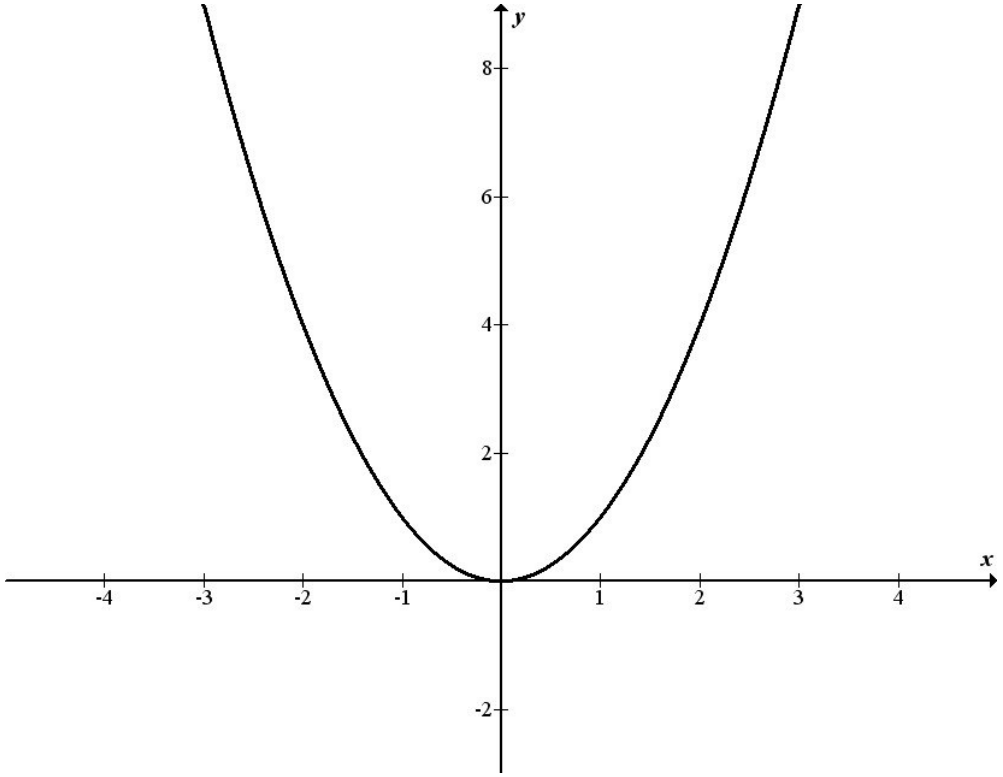


Gráfico da função do item (b)

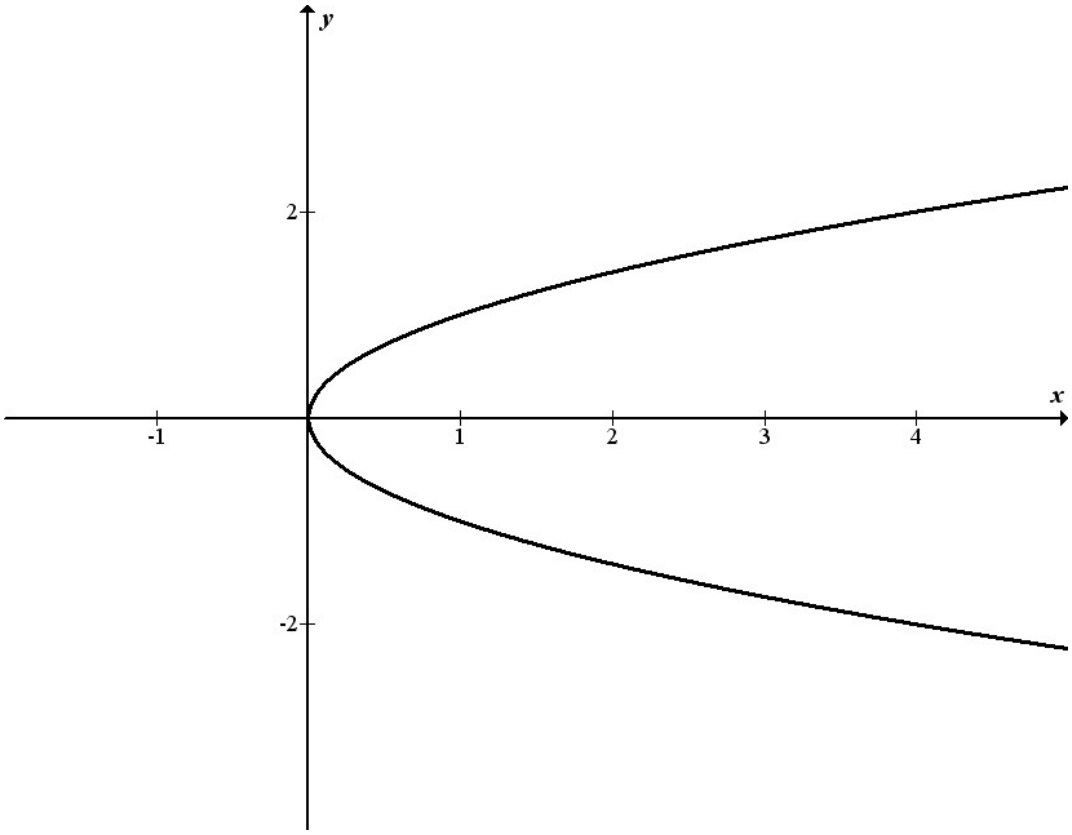


Gráfico da curva do item (c)

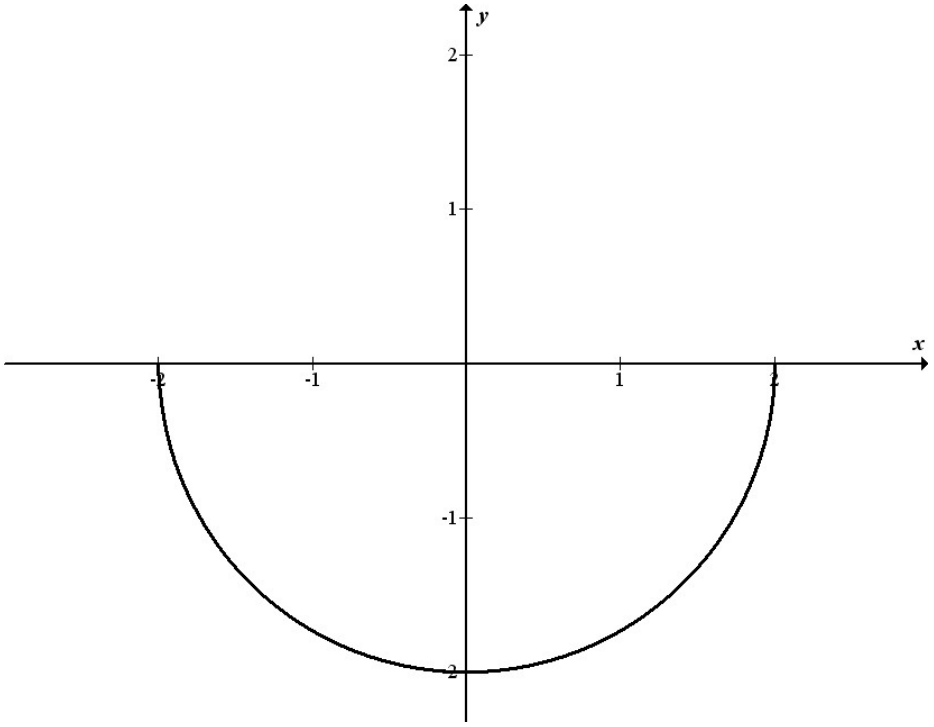


Gráfico da função do item (d)

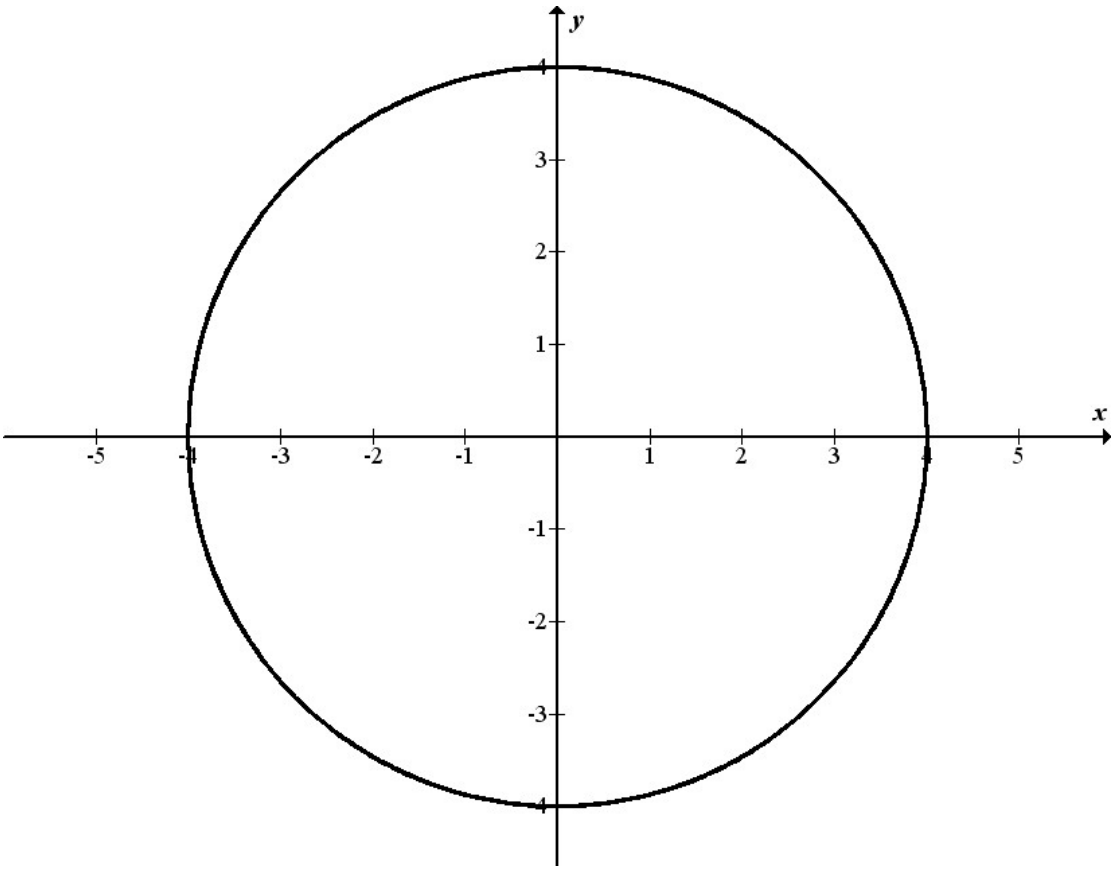


Gráfico da curva do item (e)

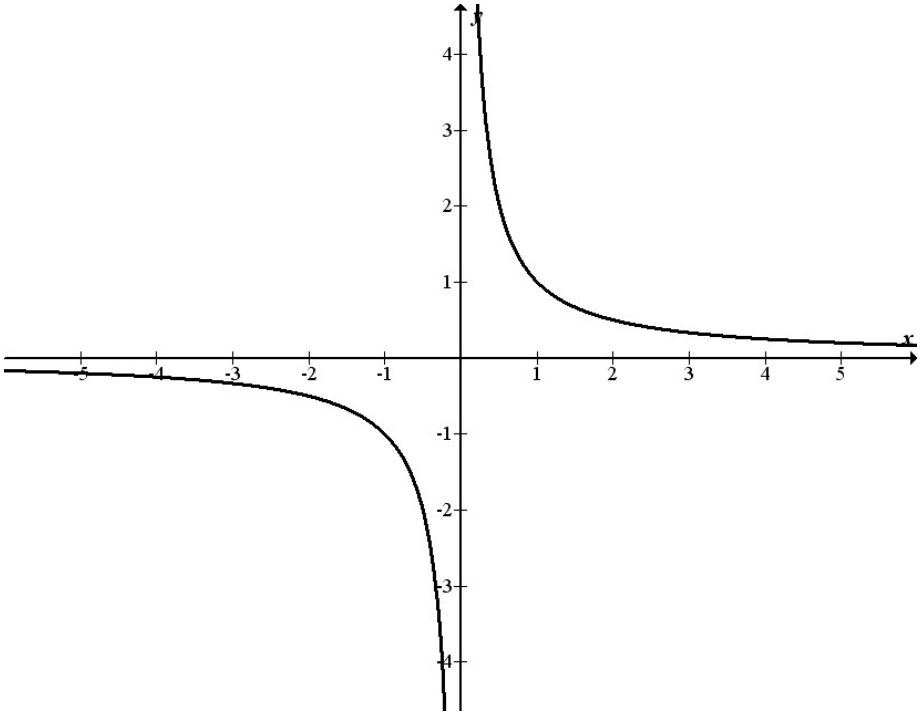


Gráfico da função do item (f)

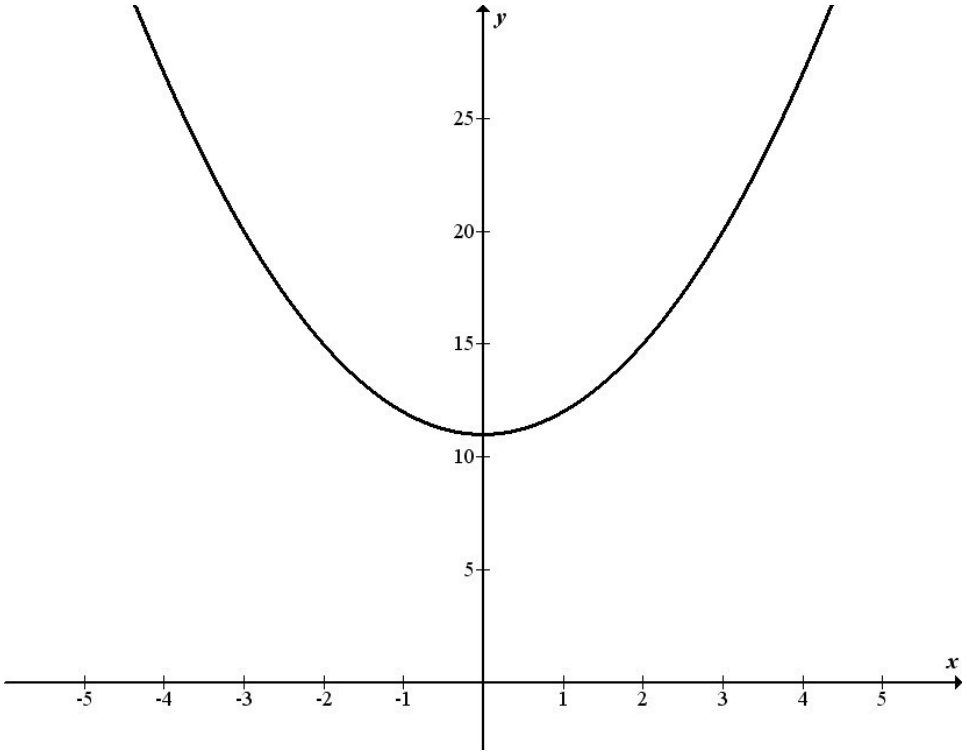
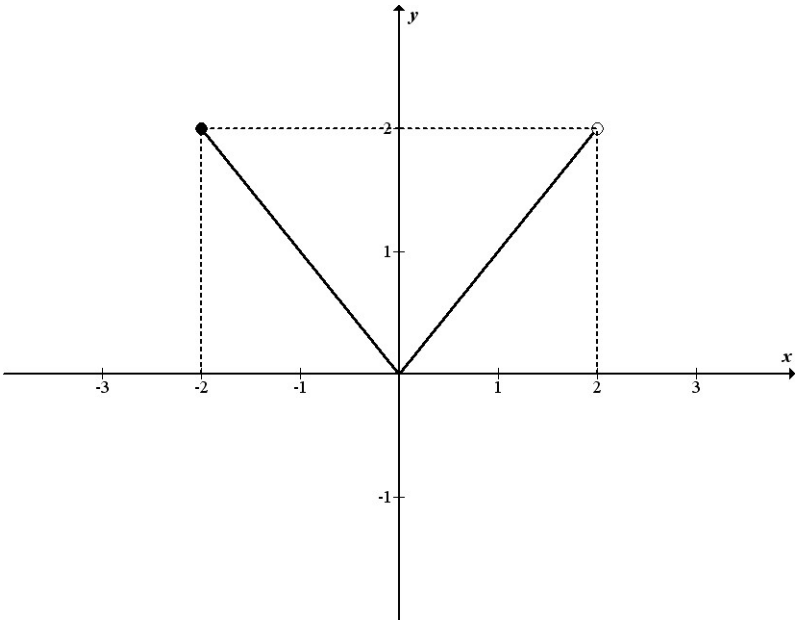


Gráfico da função do item (g)

15. Construir o gráfico, determinar o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

(a) $f(x)=\begin{cases}-x, -2\le x\le 0\\ x, 0<x<2\end{cases}$

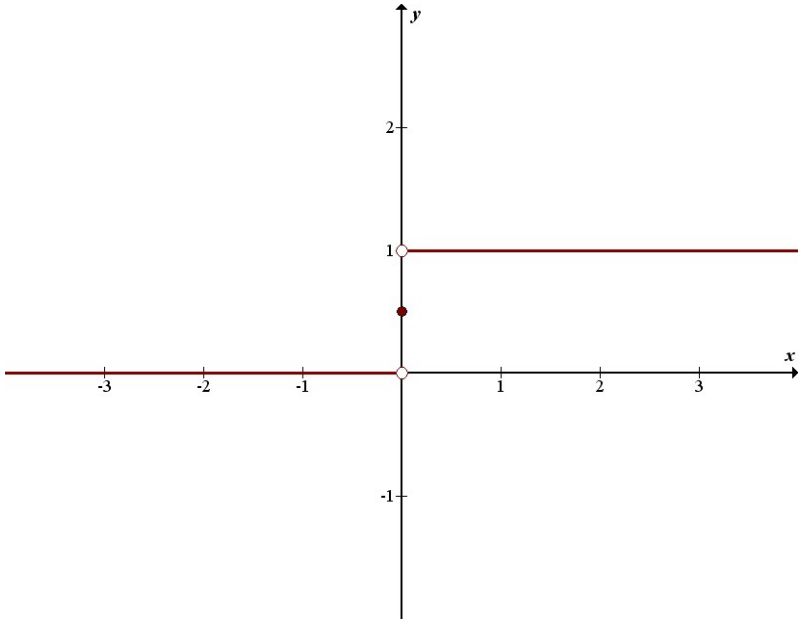
Respostas do domínio e imagens: (a) $[-2, 2), [0, 2]$



(b)

$$f(x)=\begin{cases}0, & se \quad x<0\\ 1/2, & se \quad x=0\\ 1, & se \quad x>0\end{cases}$$

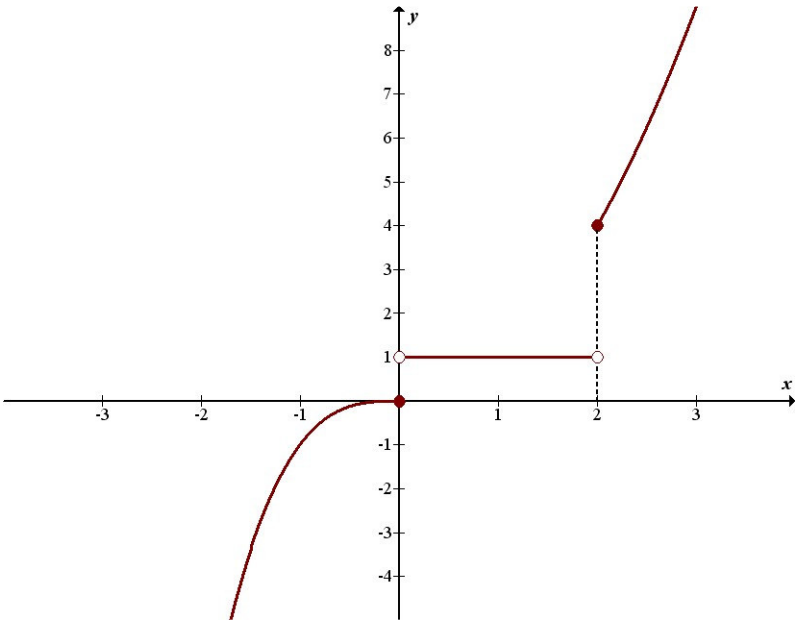
Resposta do Domínio e conjunto Imagem: $IR, \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$



(c)

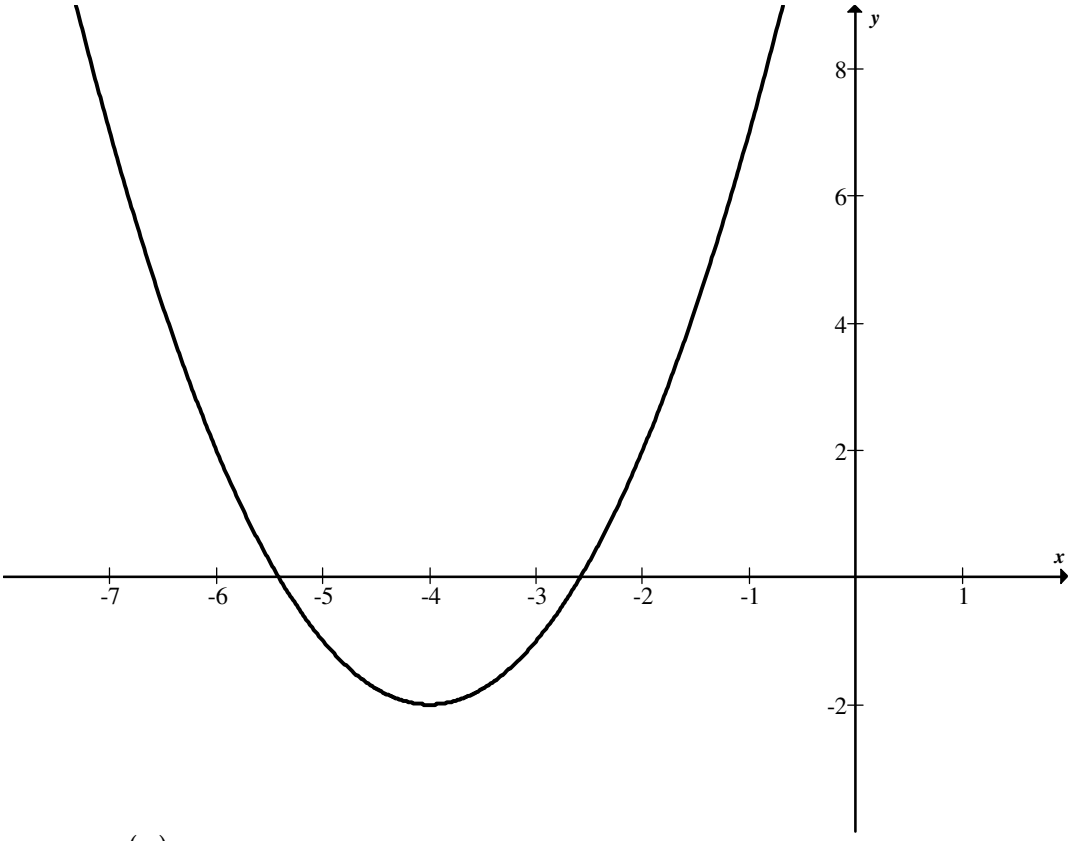
$$f(x)=\begin{cases} x^3, & se \quad x \le 0 \\ 1, & se \quad 0 < x < 2 \\ x^2, & se \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Resposta do domínio e conjunto imagem: $IR, (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [4, +\infty)$



16. Identificar as propriedades e características das seguintes funções a partir das suas representações gráficas (domínio, conjunto imagem, raízes, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento).

a) $f(x) = x^2 + 8x + 14$



$D(f) = IR$

Conjunto Imagem : $[-2, +\infty)$

Raízes: $-\sqrt{2} - 4$ e $\sqrt{2} - 4$

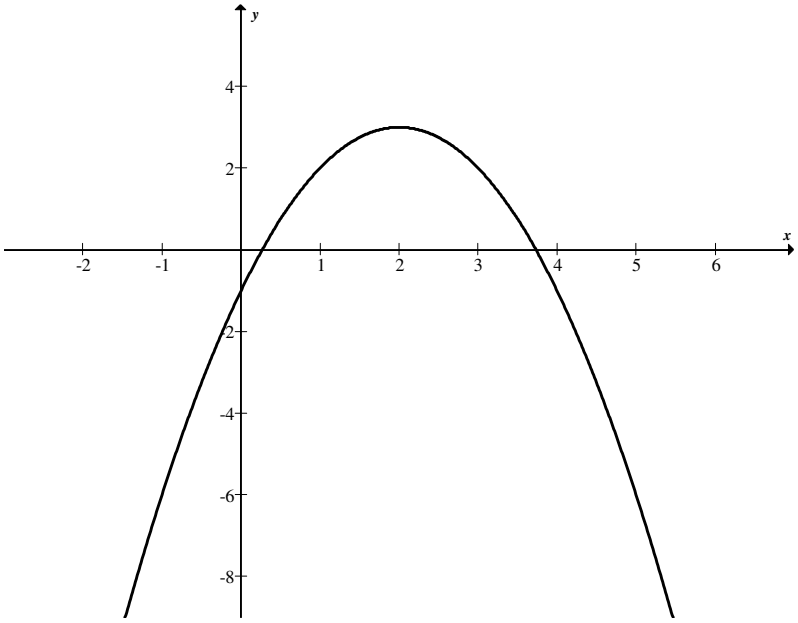
Ponto de mínimo em $x = -4$

Valor mínimo: -2

Intervalo de crescimento: $[-4, +\infty)$

Intervalo de decrescimento: $(-\infty, -4]$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$



$D = IR$

Conjunto Imagem: $(-\infty, 3]$

Raízes: $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$

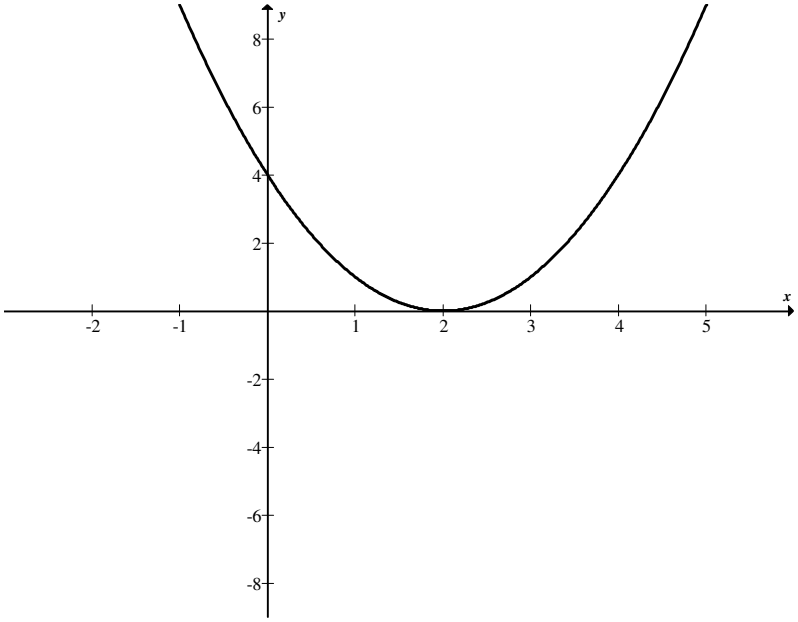
Ponto de máximo em $x = 2$

Valor máximo: 3

Intervalo de crescimento: $(-\infty, 2]$

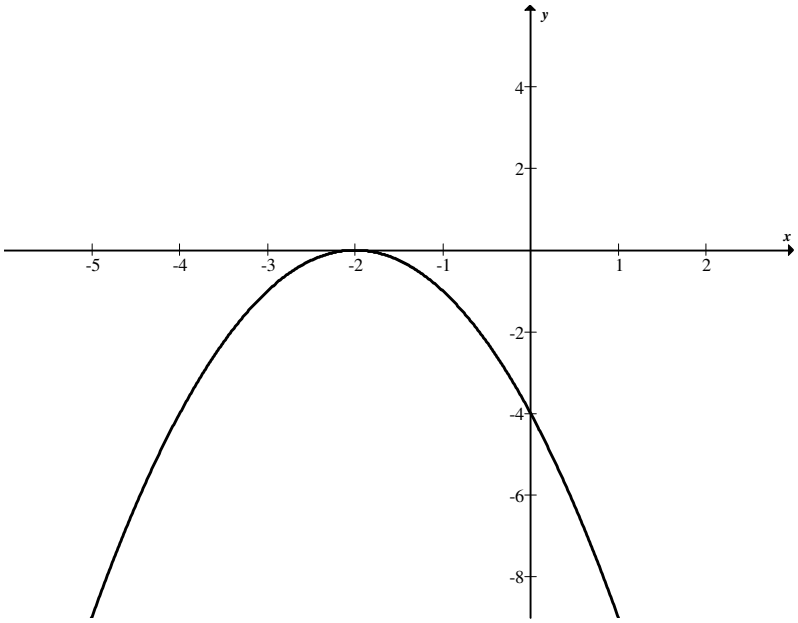
Intervalo de decrescimento: $[2, +\infty)$

c) $y = (x-2)^2$



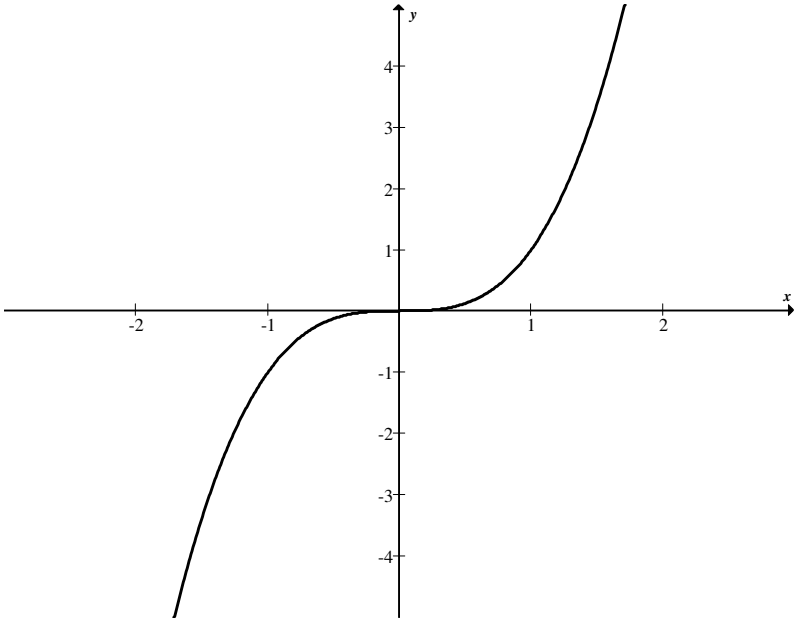
$D = IR$
Conjunto imagem: $[0, +\infty)$
Raíz: 2
Ponto de mínimo em $x = 2$
Valor mínimo: 0
Intervalo de crescimento: $[2, +\infty)$
Intervalo de decrescimento: $(-\infty, 2]$

d) $y = -(x+2)^2$



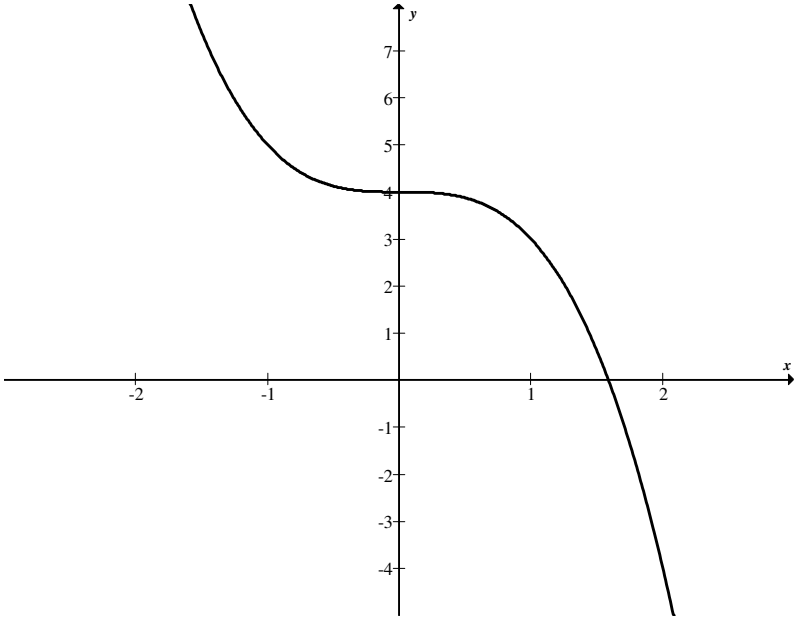
$D = IR$
Conjunto imagem: $(-\infty, 0]$
Raíz: -2
Ponto de máximo em $x = -2$
Valor máximo: 0
Intervalo de crescimento: $(-\infty, -2]$
Intervalo de decrescimento: $[-2, +\infty)$

e) $y = x^3$



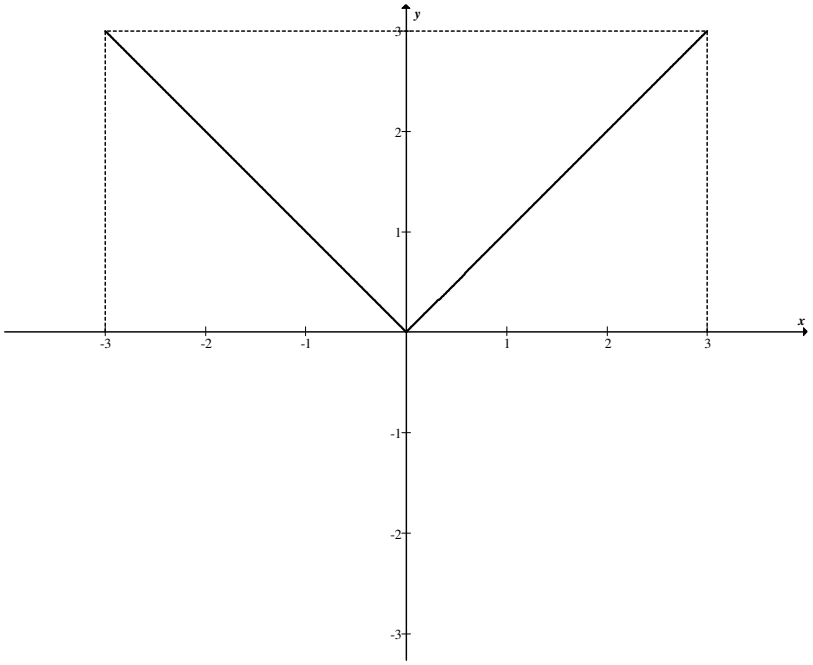
$D = IR$
Conjunto Imagem: IR
Raiz: 0
Intervalo de Crescimento: $(-\infty, +\infty)$

f) $y = 4 - x^3$



$D = IR$
Conjunto Imagem: IR
Raízes: Uma raiz real com valor aproximado de 1,59
Intervalo de decrescimento: $(-\infty, +\infty)$

g) $f(x) = |x|,\ -3 \le x \le 3$



$D = [-3, 3]$

Conjunto Imagem: $[0, 3]$

Raiz: 0

Ponto de mínimo em $x = 0$

Valor mínimo: 0

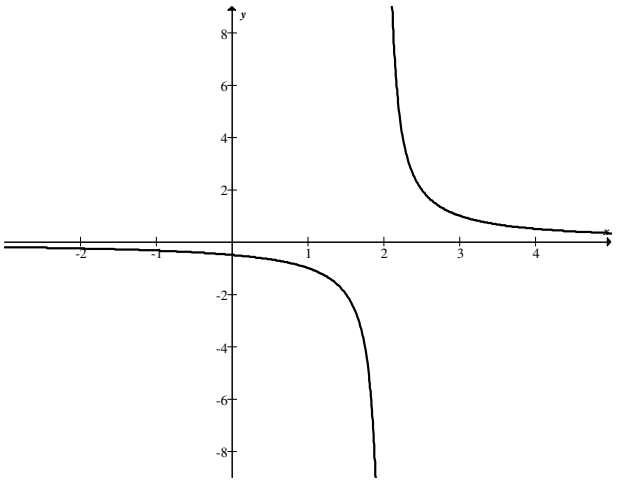
Pontos de máximo em -3 e 3

Valor máximo: 3

Intervalo de crescimento: $[0, 3]$

Intervalo de decrescimento: $[-3, 0]$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

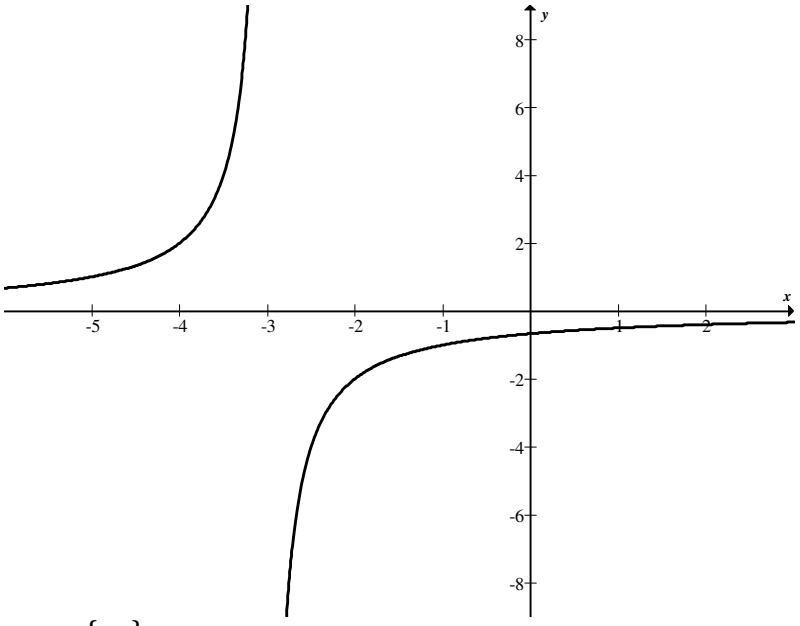


$D = IR - \{2\}$

Conjunto Imagem: $IR - \{0\}$

Intervalos de decrescimento: $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$

i) $f(x) = \dfrac{-2}{x+3}$

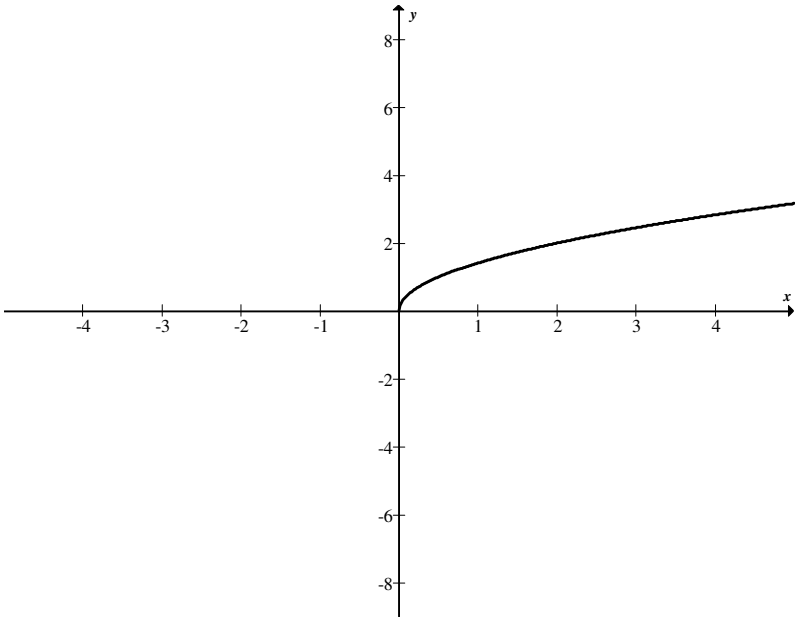


$D = IR - \{-3\}$

Conjunto Imagem: $IR - \{0\}$

Intervalo de crescimento: $(-\infty, -3)$ e $(-3, +\infty)$

j) $f(x) = \sqrt{2x}$



$D = [0, +\infty)$
Conjunto Imagem: $[0, +\infty)$
Raiz: $x = 0$
Ponto de mínimo em $x = 0$
Valor mínimo: 0
Intervalo de crescimento: $[0, +\infty)$

17. Para cada uma das seguintes funções $f(x)$ esboce primeiro o gráfico de $y = f(x)$, depois o gráfico de $y = |f(x)|$ e finalmente o gráfico de $y = \frac{f(x)}{2} + \frac{|f(x)|}{2}$.

a) $f(x) = (x-2)(x+1)$
Solução:

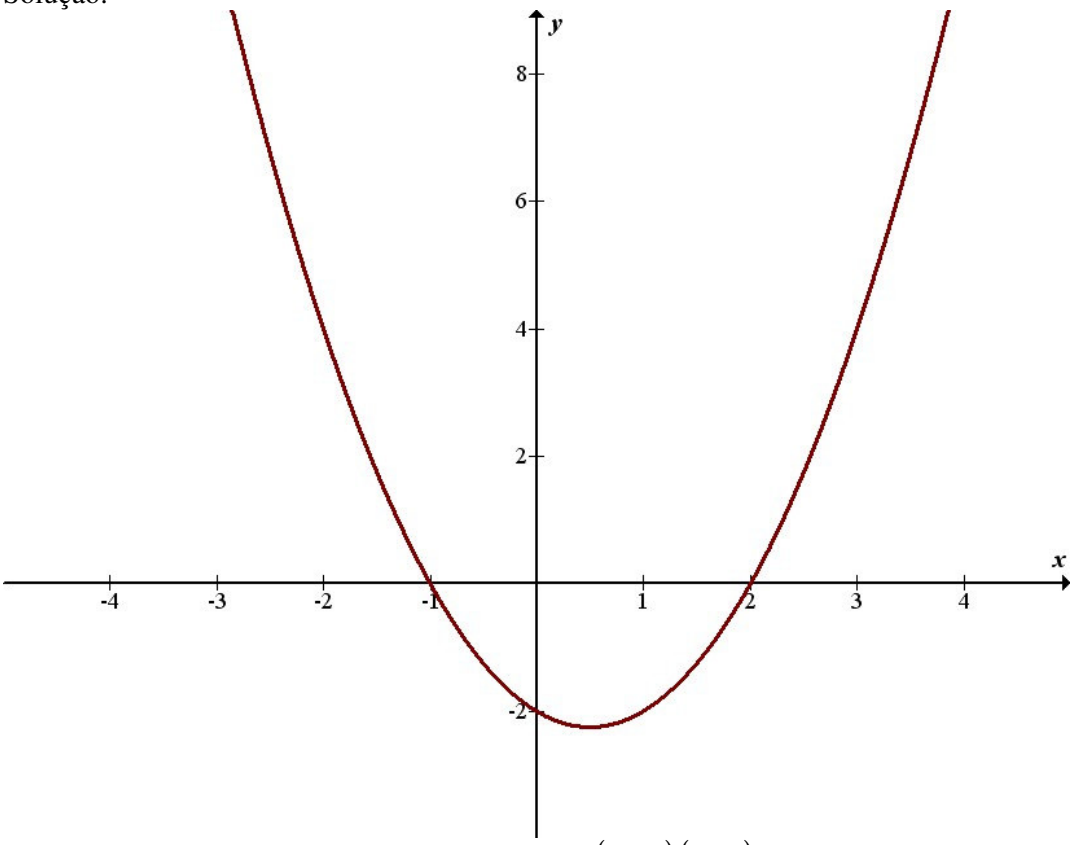


Gráfico da função $y = (x-2)(x+1)$

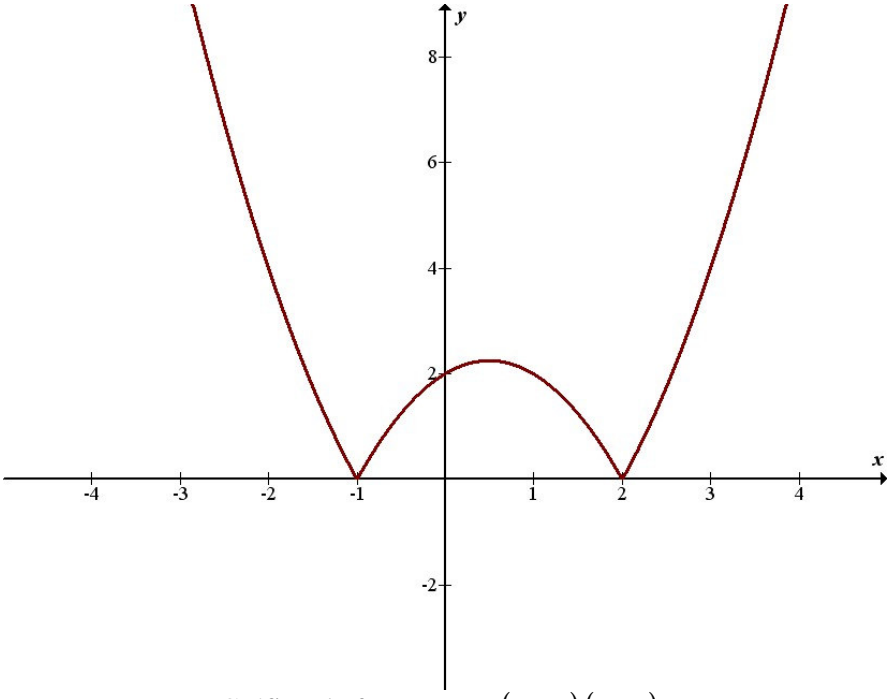


Gráfico da função $y = |(x-2)(x+1)|$

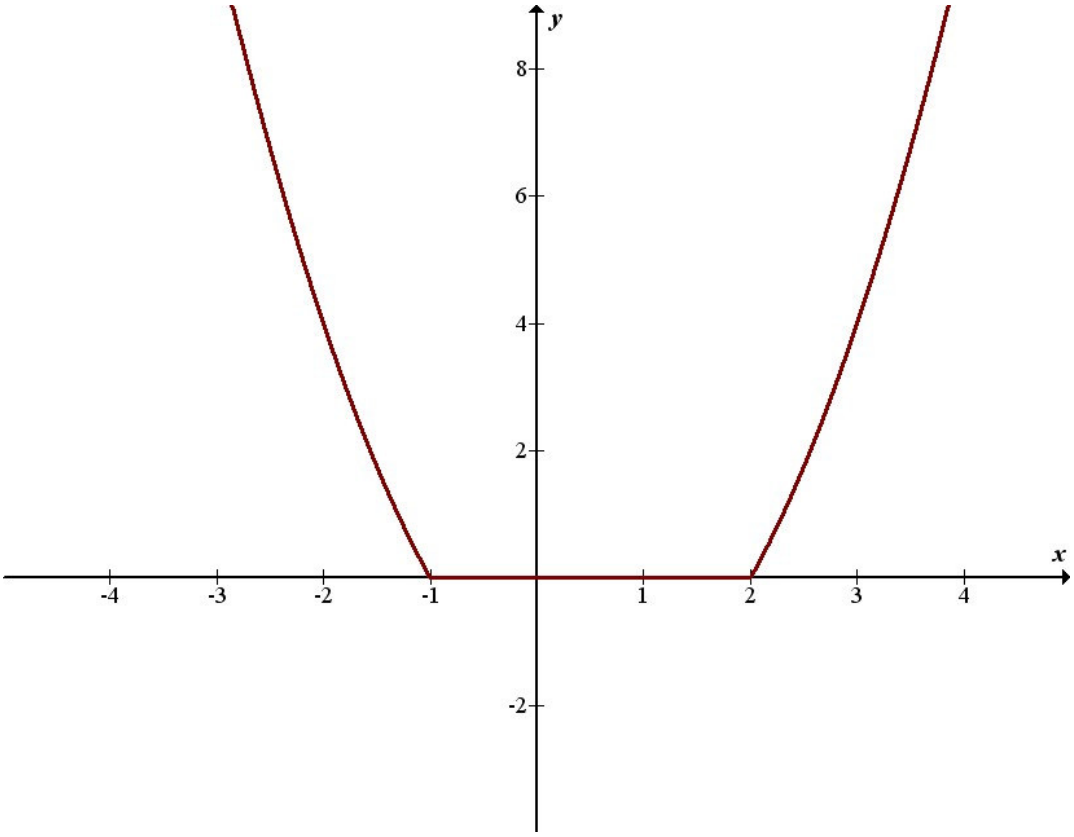
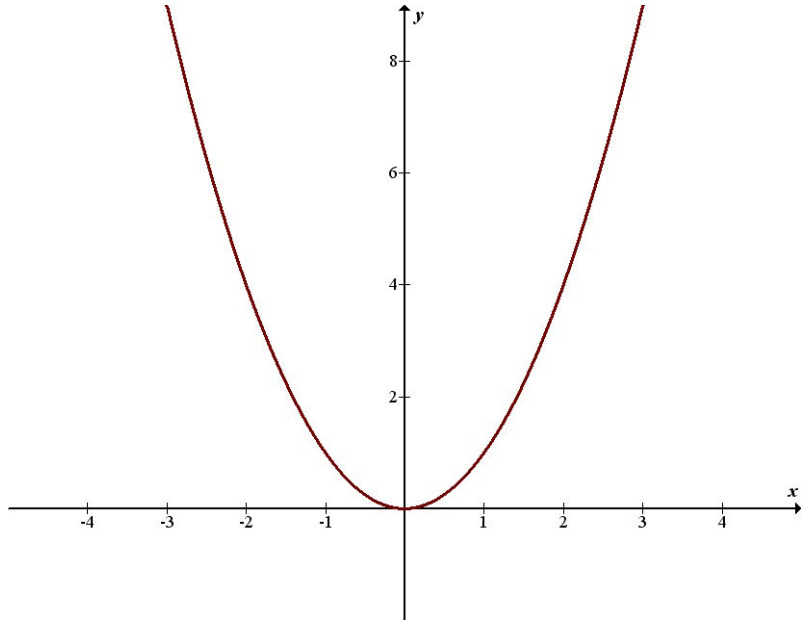


Gráfico de $y = \frac{(x-2)(x+1)}{2} + \frac{|(x-2)(x+1)|}{2}$

b) $f(x) = x^2$

Solução:

Observe que para este item os gráficos são todos iguais.



c) $f(x) = -x^2$

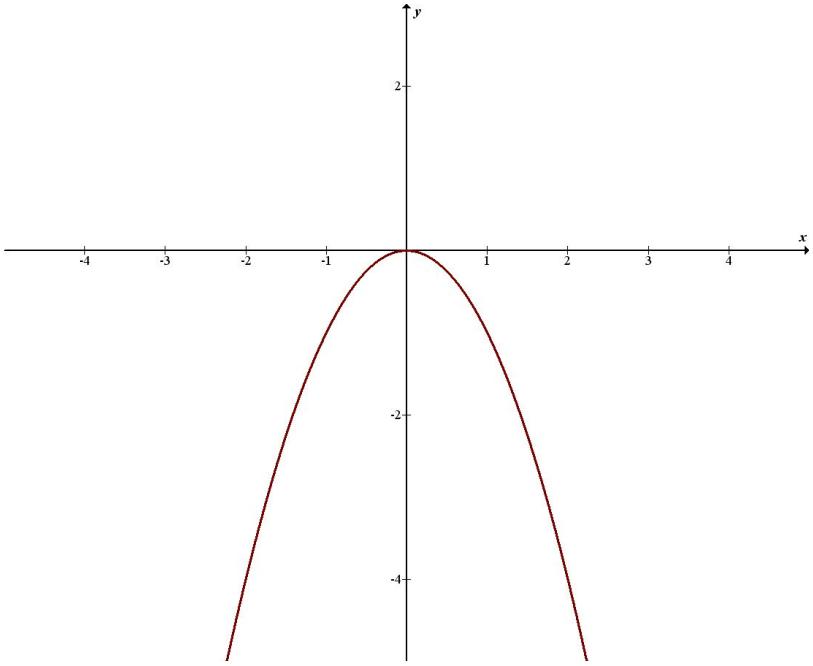


Gráfico da função $f(x) = -x^2$

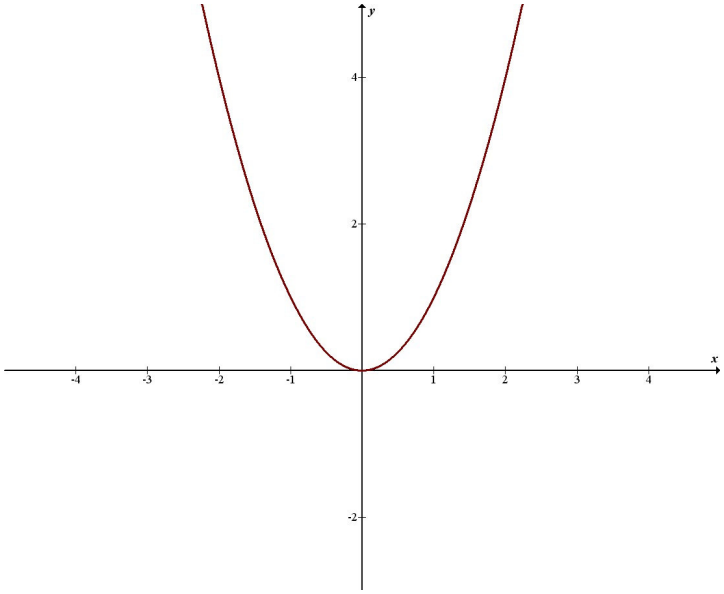


Gráfico da função $f(x)=|-x^2|$

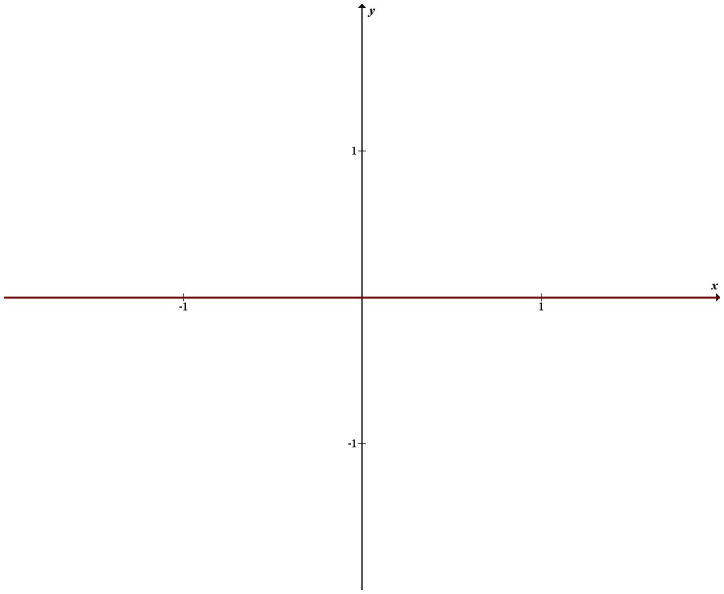


Gráfico da função $f(x)=\frac{-x^2}{2}+\frac{|-x^2|}{2}$

d) $f(x)=4-x^2$

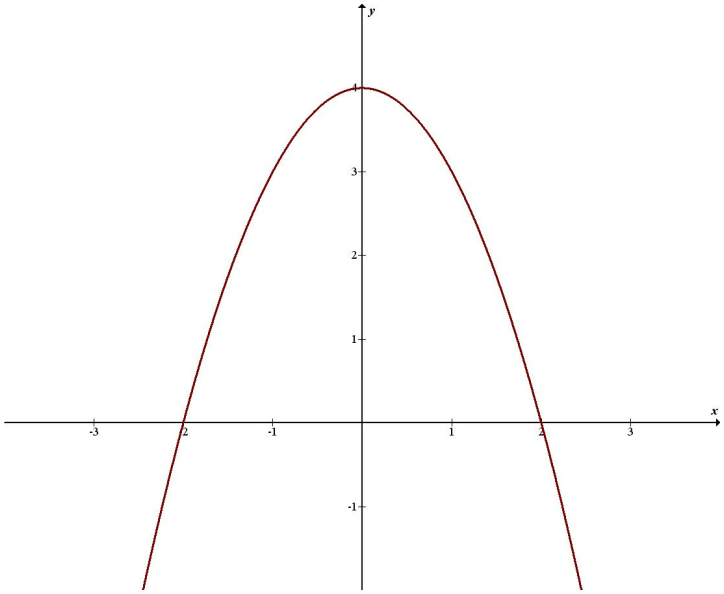


Gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$

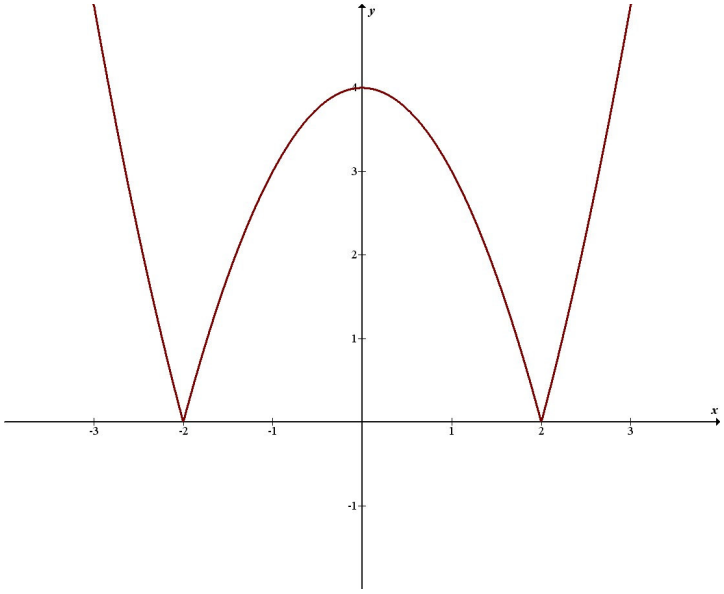


Gráfico da função $f(x) = |4 - x^2|$

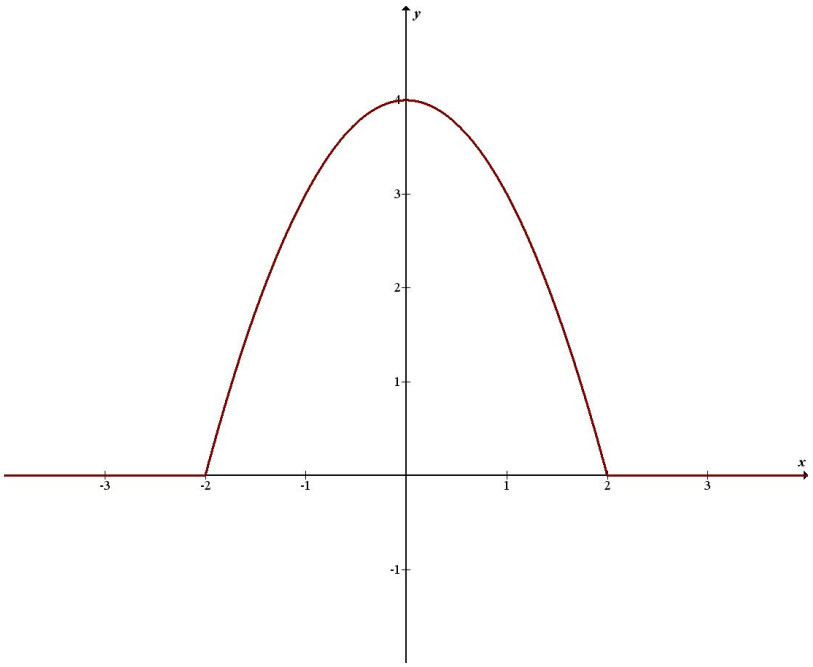


Gráfico da função $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2}+\dfrac{|4-x^2|}{2}$

18. Seja $g(x)=x-3$ e seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3}, x\neq -3\\ k, x=-3\end{cases}$

Calcule k tal que $f(x)=g(x)$ para todo x.

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)}=x-3,\ x\neq -3$

$f(-3)=g(-3)=-3-3=-6$

Assim, $k=-6$.

19. Para cada item calcular $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g, $f\ o\ g$, $g\ o\ f$, $k\cdot f$ onde k é uma constante.

a) $f(x)=2x$, $g(x)=x^2+1$

$(f+g)(x)=2x+x^2+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$(f-g)(x)=2x-x^2-1=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$

$(f\cdot g)(x)=2x(x^2-1)=2x^3+2x$

$(f/g)(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

$(f\ o\ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2+1] = 2(x^2+1) = 2x^2+2$
$(g\ o\ f)(x) = g[2x] = (2x)^2+1 = 4x^2+1$
$kf = k\cdot 2x = 2kx$

b) $f(x) = 3x-2,\ g(x) = |x|$

$(f+g)(x) = 3x+|x|-2$
$(f-g)(x) = 3x-2-|x|$
$(f\cdot g)(x) = (3x-2)|x| = 3x|x|-2|x|$
$(f/g)(x) = \dfrac{3x-2}{|x|}$
$(f\ o\ g)(x) = f[|x|] = 3|x|-2$
$(g\ o\ f)(x) = g[3x-2] = |3x-2|$
$kf = 3kx-2k = k(3x-2)$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2},\ g(x) = 1/x$

$(f+g)(x) = \dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1+x^2}{x(1+x^2)} = \dfrac{2x^2+1}{x^3+x}$
$(f-g)(x) = \dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2-(1+x^2)}{x(1+x^2)} = \dfrac{-1}{x^3+x}$
$(f\cdot g)(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+x^2},\ x\neq 0$
$(f/g)(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\cdot\dfrac{x}{1} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
$(f\ o\ g)(x) = f[1/x] = \dfrac{1/x}{1+(1/x)^2} = \dfrac{1/x}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{x}{x^2+1},\ x\neq 0$
$(g\ o\ f)(x) = g\left[\dfrac{x}{1+x^2}\right] = \dfrac{1}{\frac{x}{1+x^2}} = \dfrac{1+x^2}{x}$
$kf(x) = \dfrac{kx}{1+x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = x-2$

$(f+g)(x) = \sqrt{x+1}+x-2$

$(f-g)(x)=\sqrt{x+1}-x+2$
$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x+1}\,(x-2)=x\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}$
$(f/g)(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$
$(f\ o\ g)(x)=f[x-2]=\sqrt{x-2+1}=\sqrt{x-1}$
$(g\ o\ f)(x)=g\left[\sqrt{x+1}\right]=\sqrt{x+1}-2$
$kf(x)=k\sqrt{x+1}$

e) $f(x)=\sqrt{x-2}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$

$(f+g)(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}$
$(f-g)(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}$
$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}$
$(f/g)(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$
$(f\ o\ g)(x)=f\left[\sqrt{x-3}\right]=\sqrt{\sqrt{x-3}-2}$
$(g\ o\ f)(x)=g\left[\sqrt{x-2}\right]=\sqrt{\sqrt{x-2}-3}$
$kf(x)=k\sqrt{x-2}$

f) $f(x)=x^3$, $g(x)=1/\sqrt[3]{x}$

$(f+g)(x)=x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
$(f-g)(x)=x^3-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
$(f\cdot g)(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x}}=x^{8/3}$
$(f/g)(x)=\dfrac{x^3}{1/\sqrt[3]{x}}=x^3\cdot\sqrt[3]{x}=x^{10/3},x\neq 0$
$(f\ o\ g)(x)=f\left[1/\sqrt[3]{x}\right]=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{x}$
$(g\ o\ f)(x)=g\left[x^3\right]=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3}}=\dfrac{1}{x}$
$kf(x)=kx^3$

20. Seja h definida por $h(x)=2x-7$ calcular $h\ o\ h$, h^2, $h+h$.

$$(h\ o\ h)(x) = h[2x-7] = 2(2x-7)-7$$
$$= 4x-14-7$$
$$= 4x-21$$

$$h^2 = h(x)\cdot h(x) = (2x-7)(2x-7) = 4x^2 - 28x + 49$$

$$(h+h)(x) = (2x-7)+(2x-7) = 4x-14$$

21. Sabendo que $f = g\ o\ h$, nos itens (a), (c) e (d), encontre a função h e no item (b) a função g.

a) $f(x) = x^2+1,\ g(x) = x+1$

$$f = g\ o\ h$$
$$x^2+1 = g[h(x)]$$
$$x^2+1 = h(x)+1$$
$$h(x) = x^2$$

b) $f(x) = \sqrt{x+2},\ h(x) = x+2$

$$f = g\ o\ h$$
$$\sqrt{x+2} = g[x+2]$$

Logo, $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = a+bx,\ g(x) = x+a$

$$a+bx = g[h(x)]$$
$$a+bx = h(x)+a$$
$$h(x) = bx$$

d) $f(x) = |x^2-3x+5|,\ g(x) = |x|$

$$|x^2-3x+5| = g[h(x)]$$
$$|x^2-3x+5| = |h(x)|$$

Duas soluções são obtidas naturalmente, quais sejam:
$h(x) = x^2-3x+5$ ou $h(x) = -x^2+3x-5$.
No entanto, existem infinitas outras soluções. Por exemplo, a função dada por
$h(x) = \begin{cases} x^2-3x+5, x \geq 0 \\ -x^2+3x-5, x < 0 \end{cases}$ é uma das infinitas soluções.

22. Sendo $f(x)=ax+b$, para que valores de a e b se tem $(f\ o\ f)(x)=4x-9$?

$$\begin{aligned}(f\ o\ f)(x)=f[f(x)]&=f[ax+b]\\&=a(ax+b)+b\\&=a^2x+ab+b\end{aligned}$$

$$a^2x+ab+b=4x-9$$

$$\begin{cases}a^2=4\\ab+b=-9\end{cases}$$

Da primeira equação temos que $a=\pm 2$ e da segunda equação temos que:

$$b(a+1)=-9$$

$$b=\frac{-9}{a+1}$$

$$b_1=\frac{-9}{2+1}=\frac{-9}{3}=-3$$

$$b_2=\frac{-9}{-2+1}=\frac{-9}{-1}=9$$

Solução: $a=2, b=-3$ ou $a=-2, b=9$.

23. Seja $f(x)=\sqrt{x-4}$ e $g(x)=\frac{1}{2}x+1$, $x\geq 3$. Calcule $f\ o\ g$, Dê o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$, $g(x)$ e $(f\ o\ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f\ o\ g)(x)&=f\left[\frac{1}{2}x+1\right]\\&=\sqrt{\frac{1}{2}x+1-4}\\&=\sqrt{\frac{1}{2}x-3}\end{aligned}$$

$D(f)=[4,+\infty)$ $\quad$ $\text{Im}\,(f)=[0,+\infty)$

$D(g)=[3,+\infty)$ $\quad$ $\text{Im}\,(g)=[5/2,+\infty)$

$D(f\ o\ g)=\{x\in D(g)/\ g(x)\in D(f)\}$

Temos, então:

$$\frac{1}{2}x+1\geq 4$$

$$\frac{1}{2}x\geq 3$$

$$x\geq 6$$

Logo, $D(f\ o\ g)=[6,+\infty)$. $\quad$ $\text{Im}(f\ o\ g)=[0,+\infty)$.

24. Seja $f(x)=\begin{cases}5x,\ x\leq 0\\ -x,\ 0<x\leq 8\\ \sqrt{x},\ x>8\end{cases}$ e $g(x)=x^3$. Calcule $f\ o\ g$.

$$f\ o\ g=f[g(x)]=f\left[x^3\right]=\begin{cases}5x^3,\ x\leq 0\\ -x^3,\ 0<x\leq 2\\ \sqrt{x^3},\ x>2\end{cases}$$

25. Determinar algebricamente o domínio das funções $f(x)=\sqrt{x-2}$, .. $g(x)=\sqrt{x+2}$, $h(x)=f(x)+g(x)$, $p(x)=f(x)\cdot g(x)$ e $q(x)=(fog)(x)$
Faça o gráfico das funções e compare os resultados.

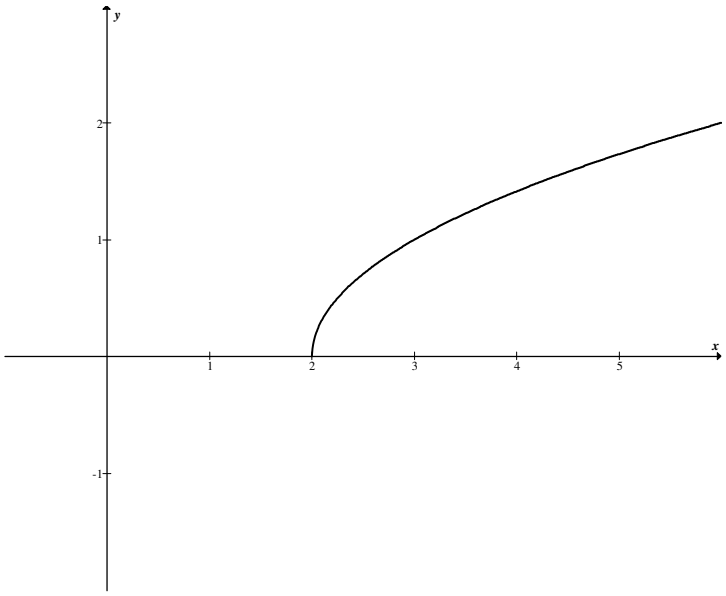
Para $f(x)=\sqrt{x-2}$ temos:

$x-2\geq 0$

$x\geq 2$

$D(f)=[2,+\infty)$.

Veja o gráfico a seguir



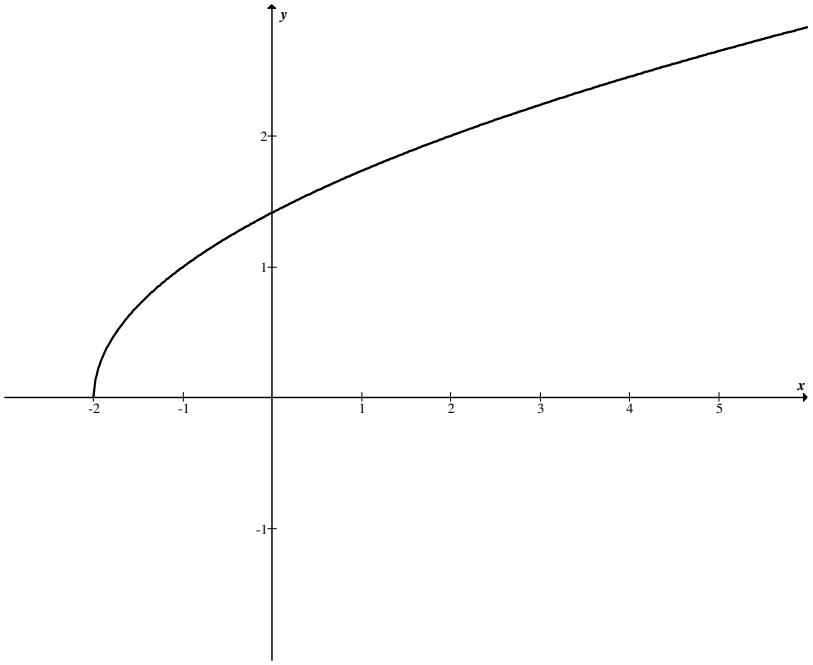
Para $g(x)=\sqrt{x+2}$ temos:

$x+2\geq 0$

$x\geq -2$

$D(f)=[-2,+\infty)$

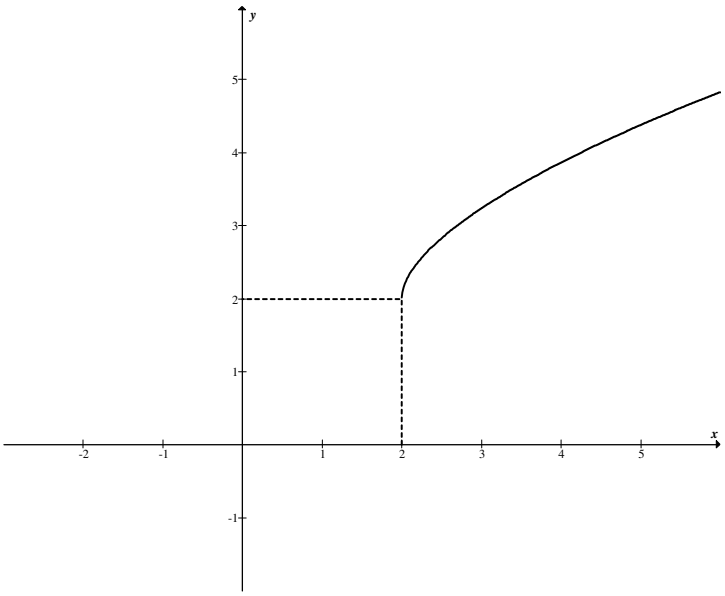
Veja o gráfico a seguir



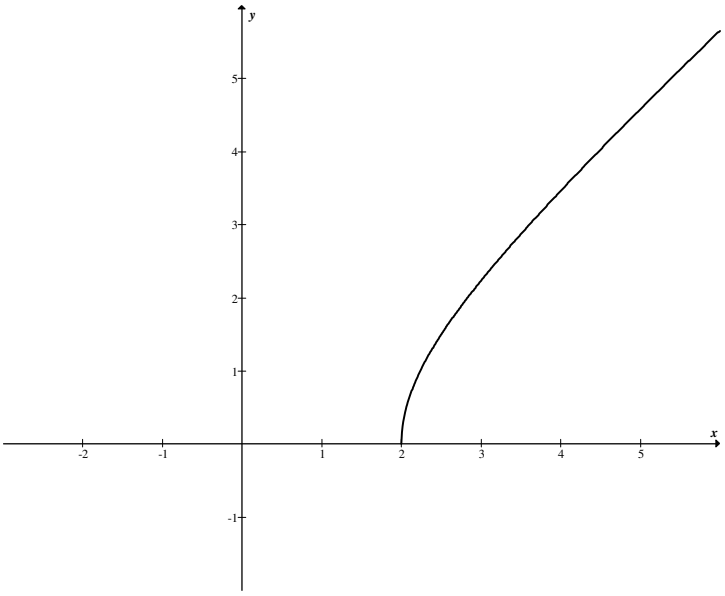
Para $h(x)=f(x)+g(x)$ temos:

$D(h)=D(f+g)=D(f)\cap D(g)=[2,+\infty)$

Veja o gráfico a seguir



Para $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ temos:
$D(p) = D(f \,.\, g) = D(f) \cap D(g) = [2, +\infty)$
Veja o gráfico a seguir

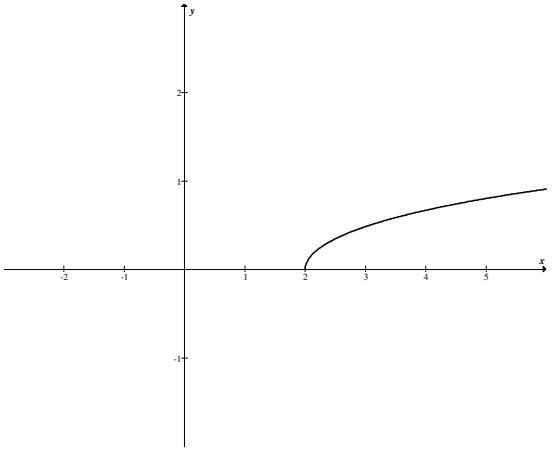


Para $q(x) = (fog)(x)$ temos:
$fog\,(x) = f\,(g(x)) = f\left(\sqrt{x+2}\right) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 2}$

$D(q) = D(fog) = \{x \in D(g) \mid \; g(x) \in D(f)\}$

Temos, então:

$\sqrt{x+2} \geq 2$
$x + 2 \geq 4$
$x \geq 2$
$D(fog) = [2, +\infty)$.



26. A função g é definida por $g(x)=x^2$. Defina uma função f tal que $(f\ o\ g)(x)=x$ para $x\geq 0$ e uma função h tal que $(h\ o\ g)(x)=x$ para $x<0$.

Temos:

a) $(f\ o\ g)(x)=f[g(x)]=f[x^2]=x, x\geq 0$

Logo $f(x)=+\sqrt{x}$

b) $(h\ o\ g)(x)=h[g(x)]=h[x^2]=x, x<0$

Logo $h(x)=-\sqrt{x}$.

27. Se $f(x)=x^2$, encontre duas funções g para as quais $(f\ o\ g)(x)=4x^2-12x+9$:

$$(f\ o\ g)(x)=f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2-12x+9$$
$$[g(x)]^2=(2x-3)^2$$
$$g(x)=\pm(2x-3)$$
$$g_1(x)=2x-3$$
$$g_2(x)=-2x+3.$$

28. Se $f(x)=x^2-2x+1$, encontre a função $g(x)$ tal que $(f/g)(x)=x-1$

$$(f/g)(x)=\frac{x^2-2x+1}{g(x)}=x-1$$
$$g(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\frac{(x-1)^2}{x-1}=x-1.$$

29. Dada as funções $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=2x-1$

a) Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

$D(f)=IR \qquad \text{Im}(f)=[-1,+\infty]$

b) Determine o domínio e o conjunto imagem de $g(x)$

$D(g)=IR \qquad \text{Im}(g)=IR$

c) Construa os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$

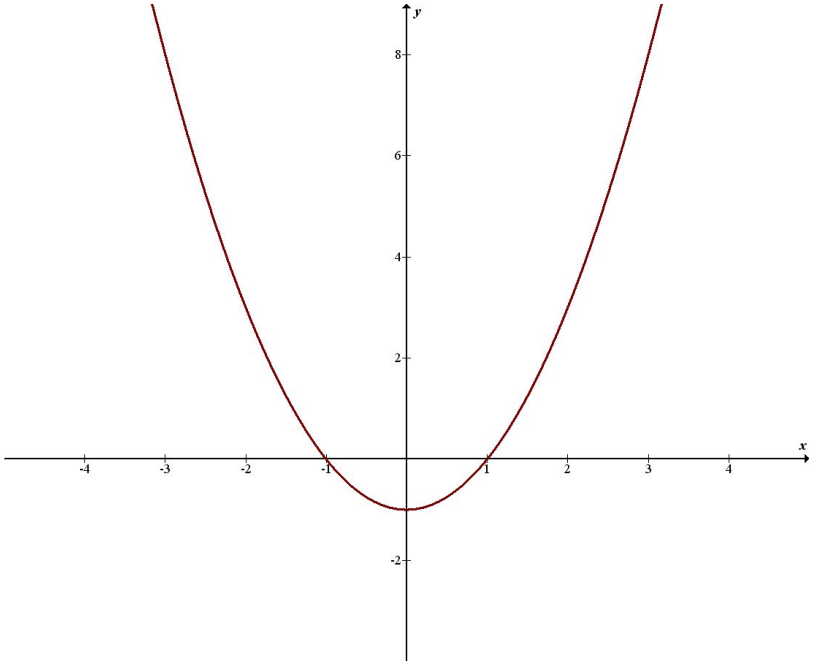


Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 1$

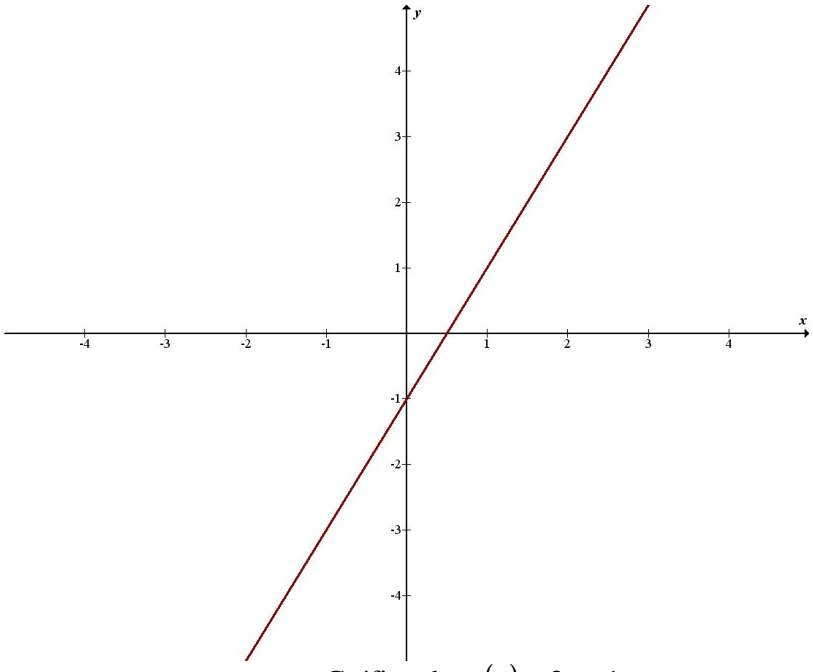


Gráfico de $g(x) = 2x - 1$

d) Calcule $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g, $f \; o \; g$, $g \; o \; f$

$(f + g)(x) = x^2 - 1 + 2x - 1 = x^2 + 2x - 2$

$(f - g)(x) = x^2 - 1 - 2x + 1 = x^2 - 2x$

$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 1)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

$(f/g)(x) = \dfrac{x^2-1}{2x-1}$

$(f\ o\ g)(x) = f[g(x)] = f[2x-1] = (2x-1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$

$(g\ o\ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2-1] = 2(x^2-1) - 1 = 2x^2 - 3$

e) Determine o domínio das funções calculadas no item (d).

$D(f) = IR$ $\qquad$ $D(g) = IR$

$D(f+g) = IR$ $\qquad$ $D(f/g) = IR - \{1/2\}$

$D(f-g) = IR$ $\qquad$ $D(f\ o\ g) = IR$

$D(f \cdot g) = IR$ $\qquad$ $D(g\ o\ f) = IR$

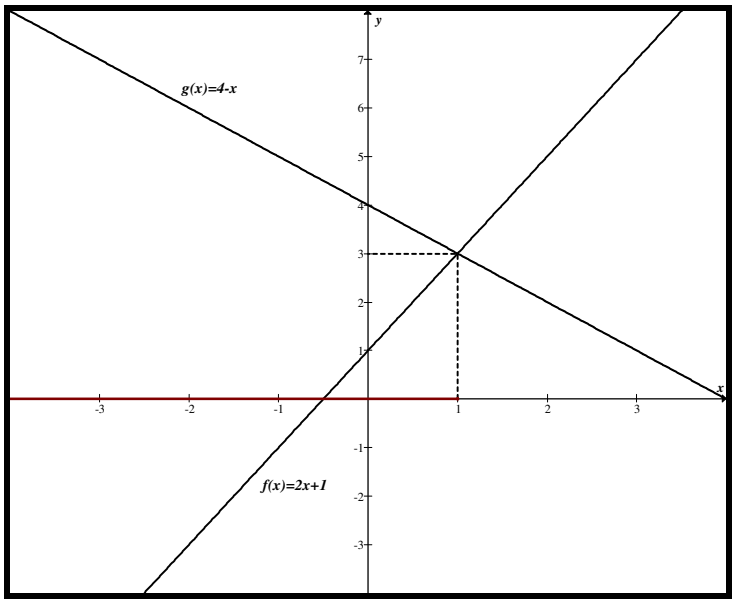
30. Determinar algebricamente os valores de x, tais que $f(x) < g(x)$, sendo $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = 4-x$. Usando uma ferramenta gráfica, traçar o gráfico das funções dadas e comparar os resultados.

$2x+1 < 4-x$

$2x+x < 4-1$

$3x < 3$

$x < 1$



Reposta em ambas as representações: $x < 1$.

31. Determinar algebricamente os valores de x, tais que o gráfico de $f(x)$ esteja abaixo do gráfico de $g(x)$, sendo $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=1-x^2$. Usando uma ferramenta gráfica, traçar o gráfico das funções dadas e comparar os resultados.

Algebricamente temos:

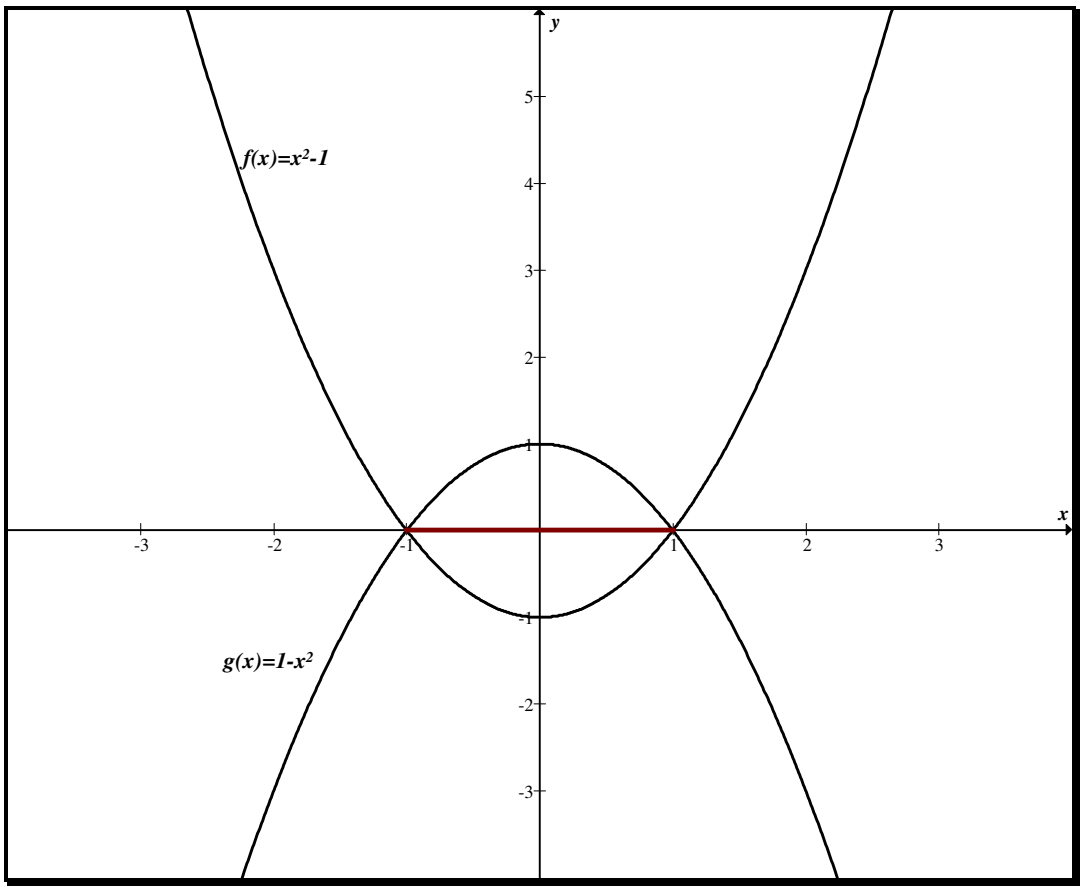
$x^2-1<1-x^2$

$2x^2<2$

$x^2<1 \quad \Rightarrow \quad -1<x<1$

ou $x\in(-1,1)$.

Graficamente observamos o mesmo resultado.



32. O gráfico da Figura 2.11 ilustra a propagação de uma epidemia numa cidade X. No eixo horizontal temos o tempo e no eixo vertical, o número de pessoas atingidas depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia).

(a) Em qual semana houve o maior número de pessoas infectadas?
Resposta: 2ª semana.

(b) Quando a epidemia foi totalmente controlada?
Resposta: 4ª semana.

(c) Como você descreveria a propagação da doença em linguagem coloquial?
Resposta: O número de pessoas infectadas cresce lentamente no início da epidemia. Em um momento seguinte esse número cresce rapidamente e depois volta a crescer lentamente até que a epidemia fique controlada

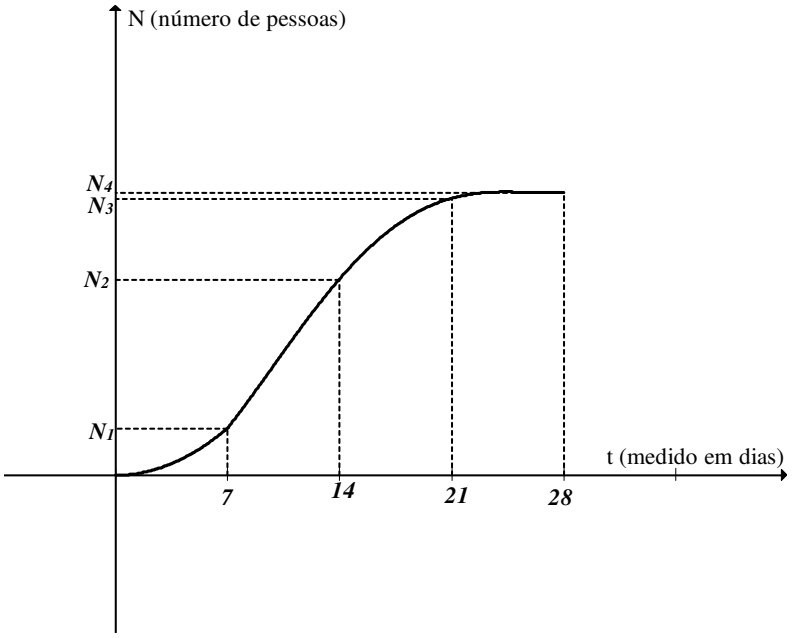


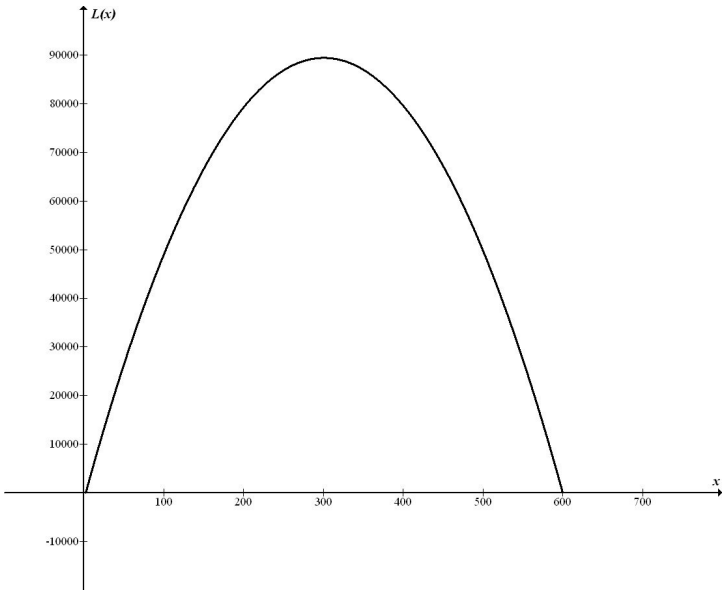
Figura 2.11 da pg. 23 do livro impresso

33. Um fabricante produz peças para computadores pelo preço de R$ 2,00 cada. Calcula-se que, se cada peça for vendida por x reais, os consumidores comprarão, por mês, $600 - x$ unidades. Expressar o lucro mensal do fabricante como função do preço. Construir um gráfico para estimar o preço ótimo de venda.

Vamos considerar:
L = Lucro
C = custo $\qquad C_{unit.} = 2{,}00$
R = receita
D = demanda

$$P_{venda} = x \quad \Rightarrow \quad D = 600 - x$$
$$R = (600 - x) \cdot x$$
$$C = (600 - x)\,2$$
$$L = R - C$$
$$= (600 - x)x - (600 - x)2$$
$$= 600x - x^2 - 1200 + 2x$$
$$L = -x^2 + 602x - 1200$$

O gráfico a seguir mostra a função encontrada.



O preço ótimo para a venda seria o vértice da parábola, que na figura nos mostra um valor próximo de 300. Fazendo-se o cálculo do vértice da parábola encontra-se o valor de 299. Assim, o valor de x que maximiza o lucro é $x = R\$\ 299,00$. Observa-se que este é um problema didático com dados fictícios.

34. Um grupo de amigos trabalham no período de férias vendendo salgadinhos nas praias. O trailler e todos os equipamentos necessários para a produção são alugados no valor de R$ 2000,00 por mês. O custo do material de cada salgadinho é de R$ 0,10. Expressar o custo total como uma função do número de salgadinhos elaborados.

Sejam
C_F = custo fixo mensal
C_V = custo variável por salgadinho
x = número de salgadinhos produzidos
C_T = custo total

$C_F = 2\,000,00$
$C_V = 0,10$
$C_T = C_F + C_V x$
$C_T = 2\,000 + 0,10x$

35. Em um laboratório, um determinado ser vivo apresenta um ciclo produtivo de 1 hora, sendo que a cada hora um par pronto para reprodução gera outro par reprodutor. Como expressar essa experiência populacional em função do número de horas, supondo que a população inicial é de 5 pares?

Ciclo produtivo = 1 hora
População Inicial = 5 pares
n = número de horas

$P_0 = 5$ $P_1 = 10$ $P_2 = 20$ $P_3 = 40$

$P_n = 5 \cdot 2^n$

36. Observar o problema que segue e verificar a possibilidade de resolvê-lo a partir do gráfico de uma função:
Um grupo de abelhas, cujo número era igual à raiz quadrada da metade de todo o enxame, pousou sobre uma rosa, tendo deixado para trás 8/9 do enxame; apenas uma abelha voava ao redor de um jasmim, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que caíra imprudentemente na armadilha da florzinha de doce fragrância. Quantas abelhas formavam o enxame?
(Adaptação de um problema histórico, originalmente escrito em versos).

Podemos formar 3 funções, considerando x = número de abelhas do enxame.
Denotamos:
y = grupo de abelhas pousadas na rosa
z = grupo que ficou para trás
h= número de abelhas extras
Temos:

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

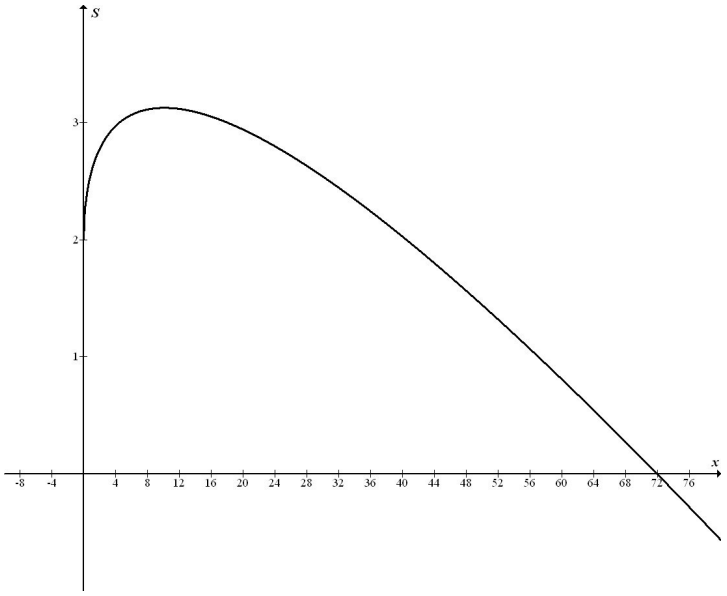
$$z = \frac{8}{9}x$$

$h = 2$

Com os dados do problema podemos escrever a equação:

$x = \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2$ cuja raiz é exatamente igual à raiz da função $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x - x + 2$.

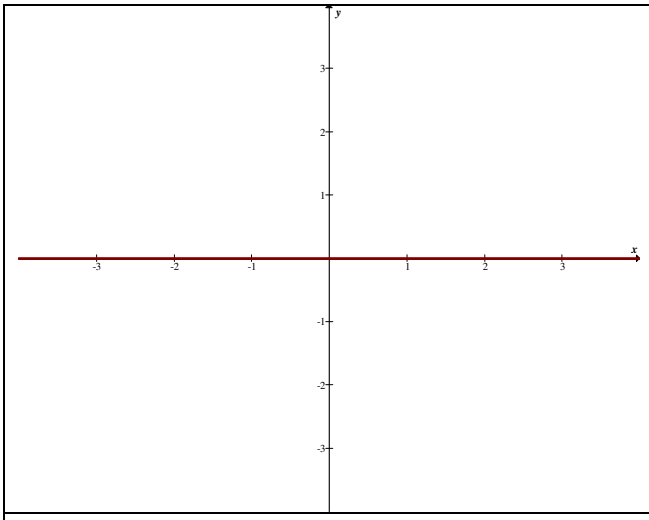
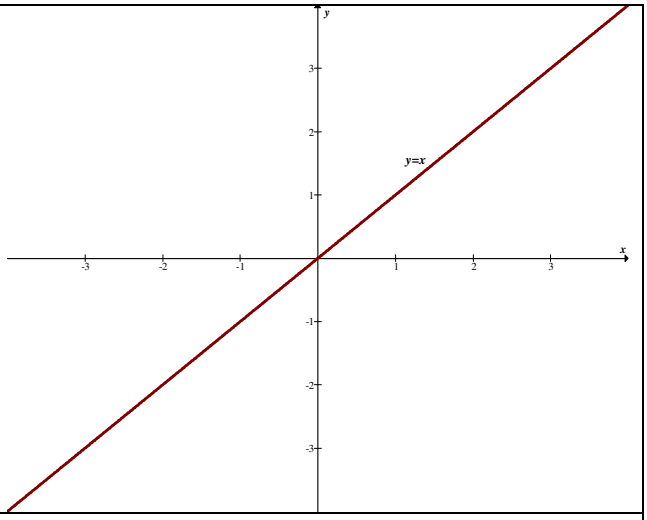
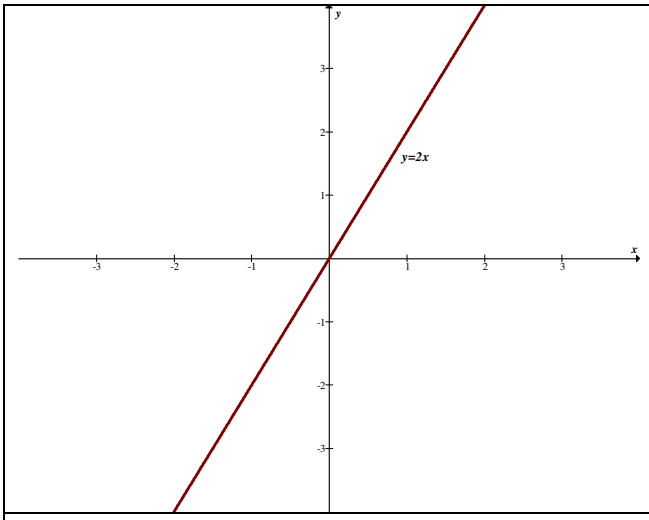
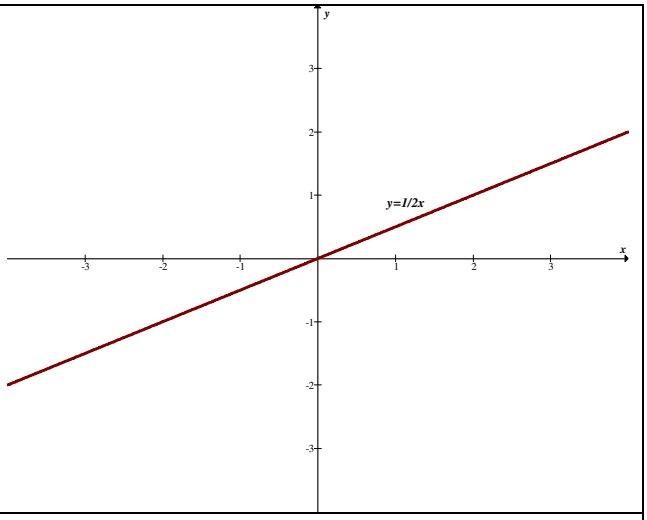
Fazendo o gráfico desta função podemos visualizar a raiz real em x= 72. Assim, o número de abelhas no enxame é igual a 72 abelhas.
Observamos que poderíamos ter resolvido algebricamente a equação obtida, obtendo o mesmo resultado.

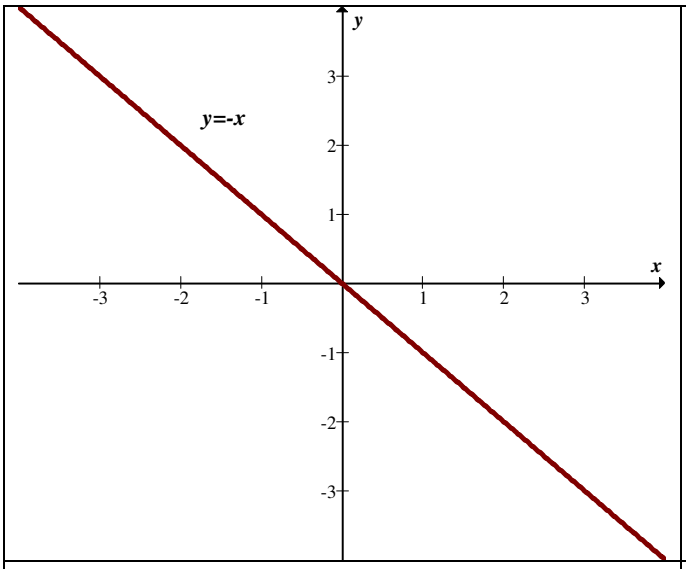


2.17 – EXERCÍCIO – pg. 53

1. Construir os gráficos das funções lineares. Dar o domínio e o conjunto imagem.

a) $y = kx$, se $k = 0, 1, 2, 1/2, -2$.

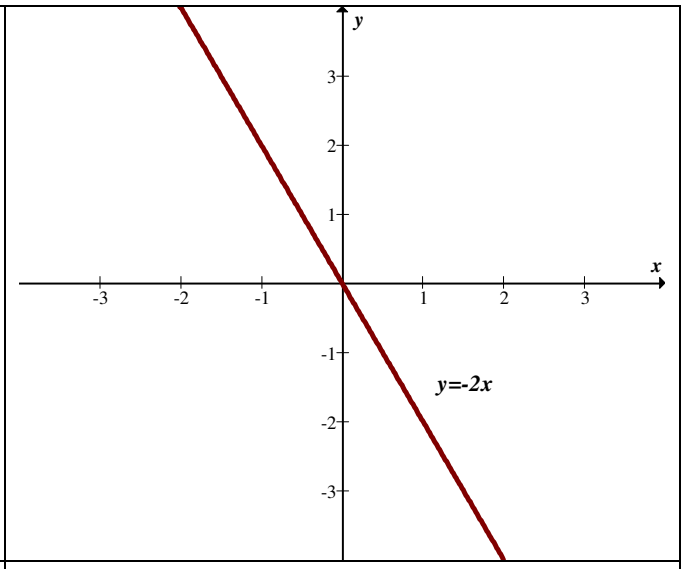
<table>
<tr>
<td>  </td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>k=0
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = \{0\}$</td>
<td>k=1
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = IR$</td>
</tr>
<tr>
<td> 
</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>k=2
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = IR$</td>
<td>k=1/2
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = IR$</td>
</tr>
</table>



k=-1

$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = IR$

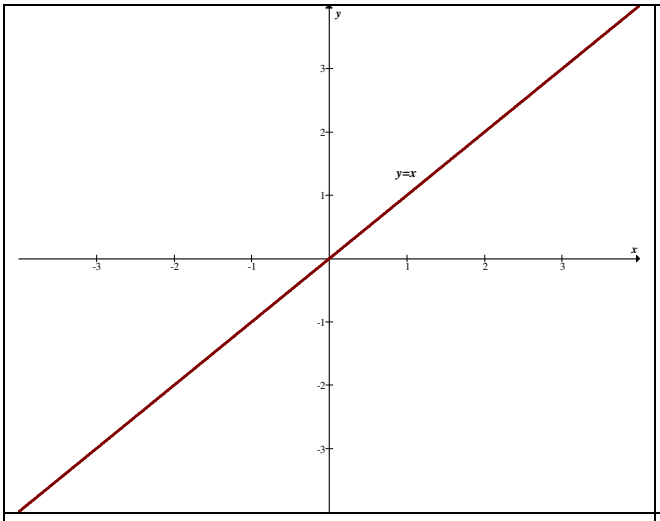


k=-2

$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = IR$

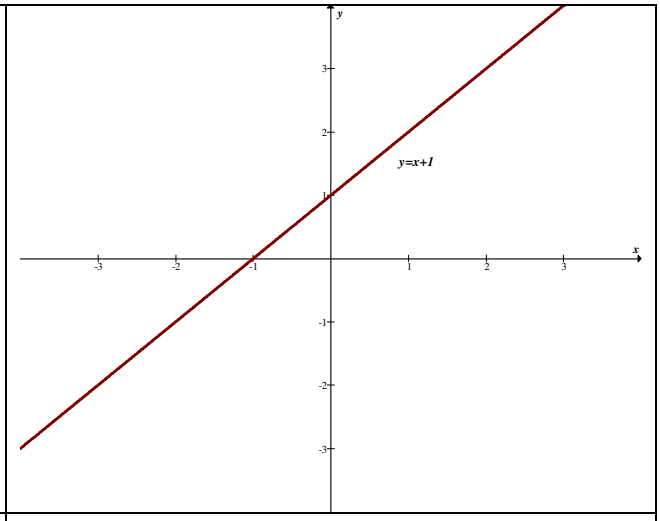
b) $y = x + b$, se $b = 0, 1, -1$.



b=0

$D(f) = IR$

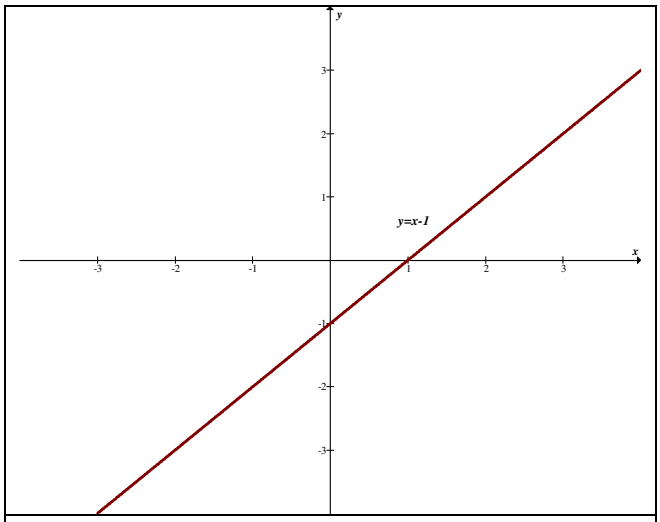
$\mathrm{Im}(f) = IR$



b=1

$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = IR$

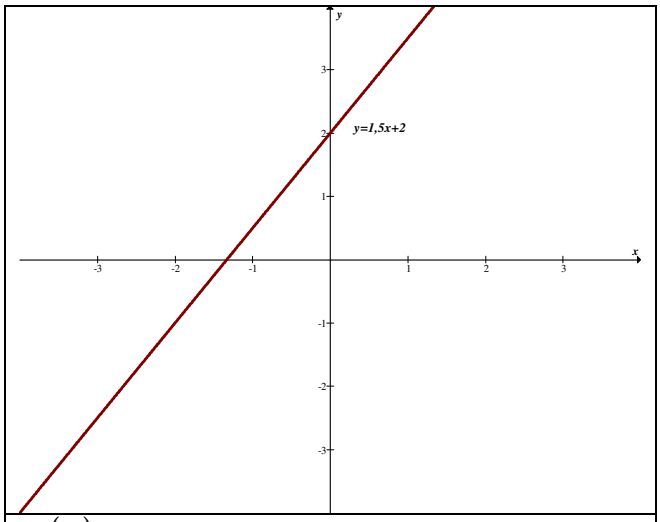


b=-1

$D(f) = IR$

$\text{Im}(f) = IR$

c) $y = 1{,}5x + 2$

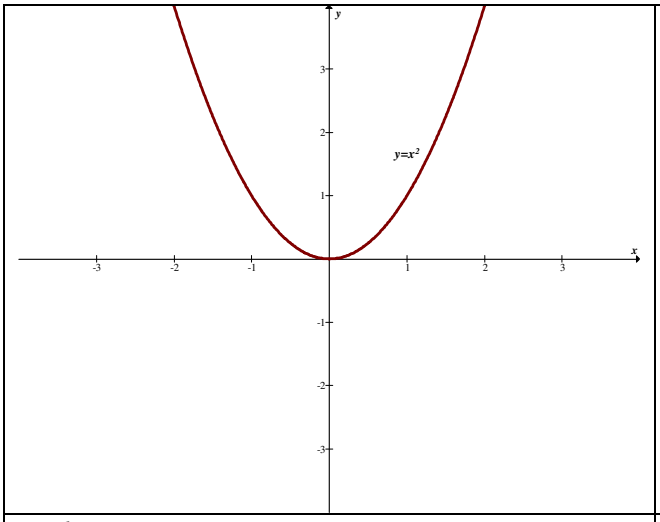


$D(f) = IR$

$\text{Im}(f) = IR$

2. Construir o gráfico das funções quadráticas. Dar o domínio e o conjunto imagem.

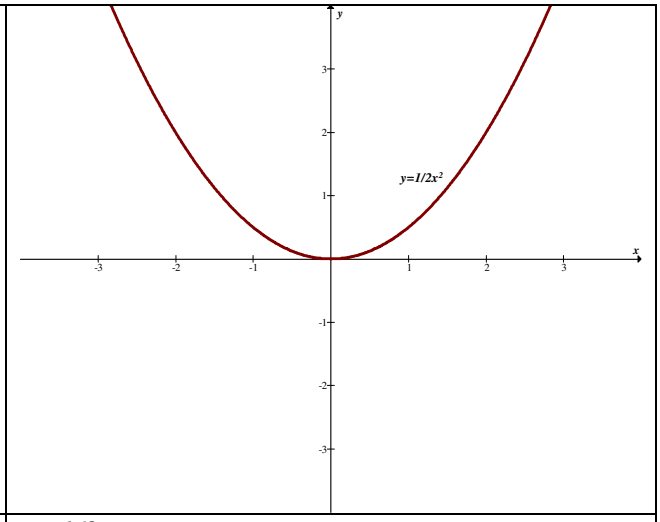
a) $y = ax^2$, se $a = 1, 1/2, -2$.



a=1

$D(f) = IR$

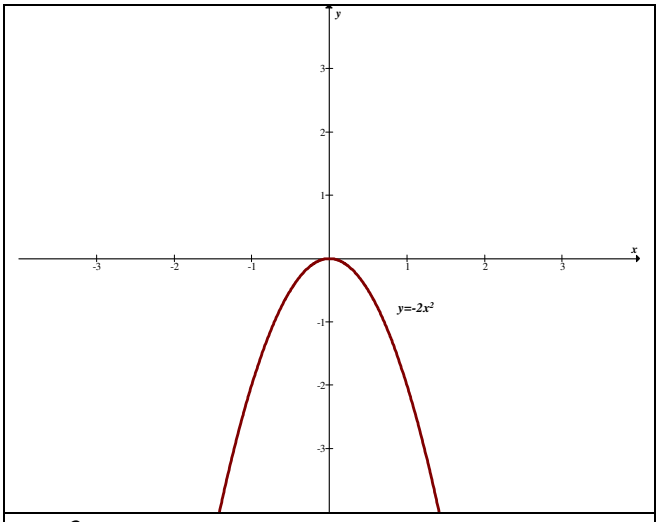
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$



a=1/2

$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

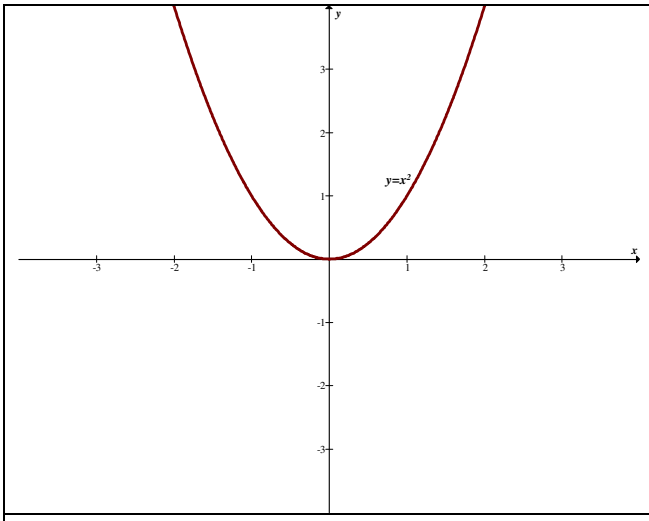


a=-2

$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$

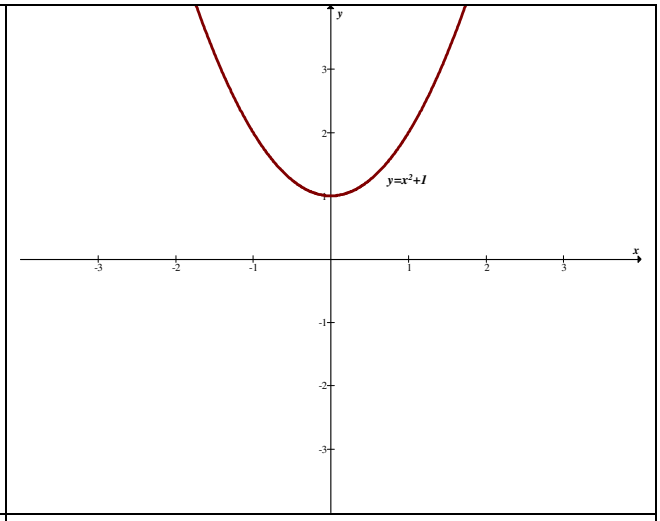
b) $y = x^2 + c$, se $c = 0, 1, 1/2, -3$



c=0

$D(f) = IR$

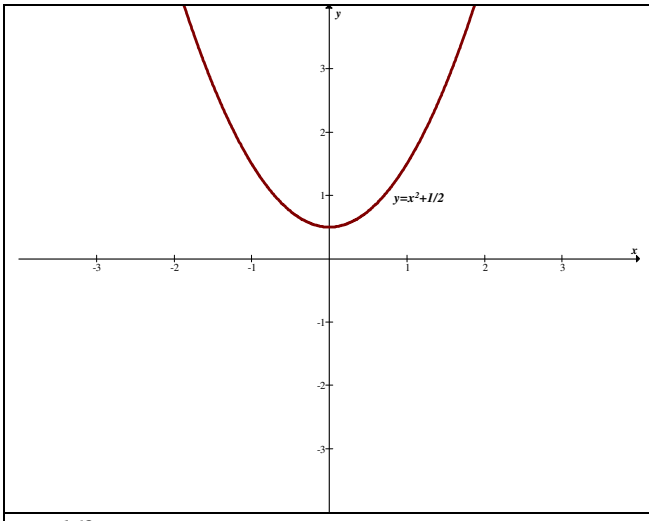
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$



c=1

$D(f) = IR$

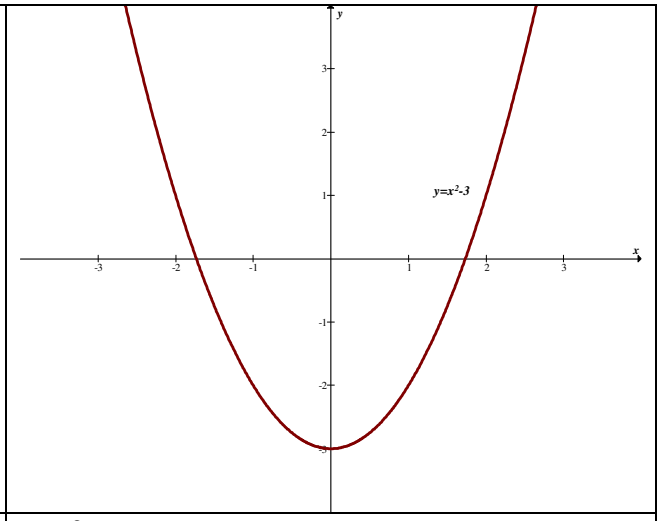
$\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty)$



c=1/2

$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = [1/2, +\infty)$

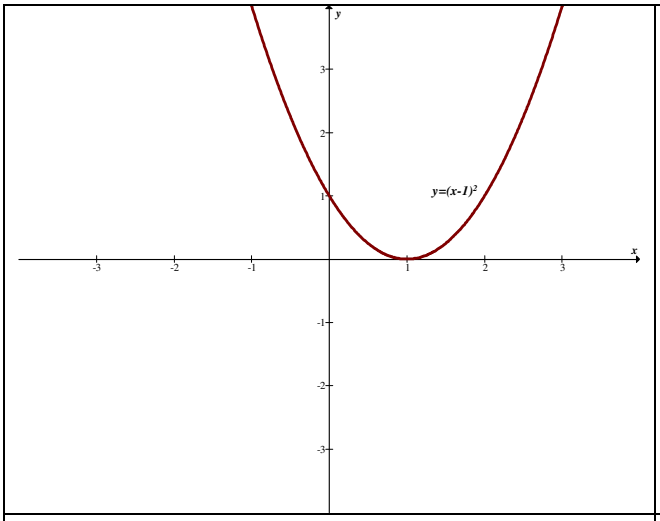


c=-3

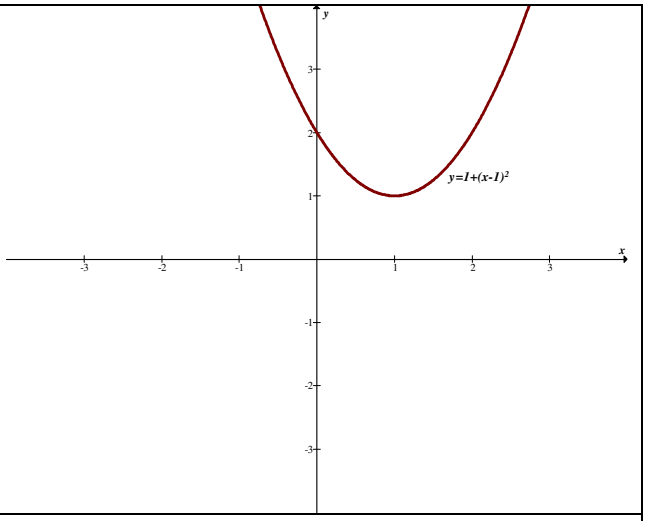
$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = [-3, +\infty)$

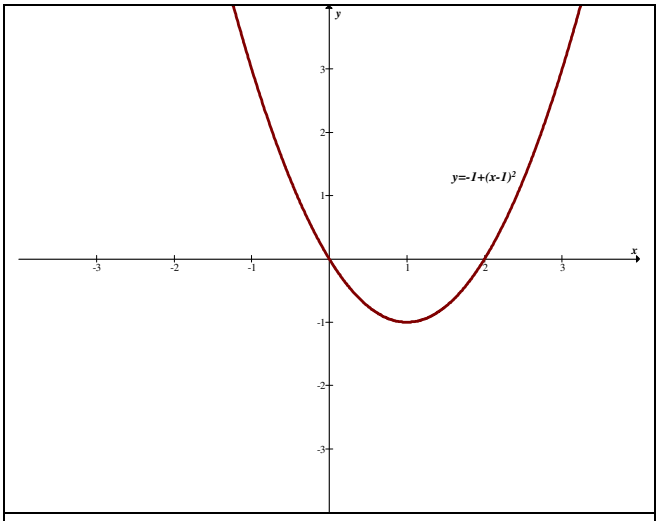
c) $y = y_o + (x-1)^2$, se $y_o = 0, 1, -1$



$y_o = 0$
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

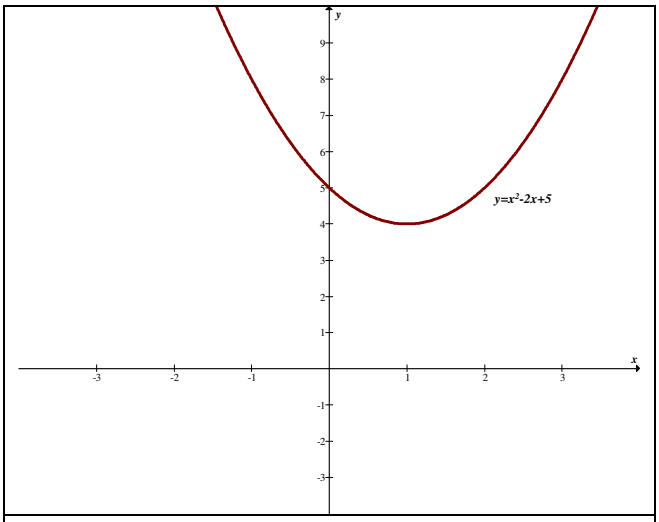


$y_o = 1$
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = [1, +\infty)$



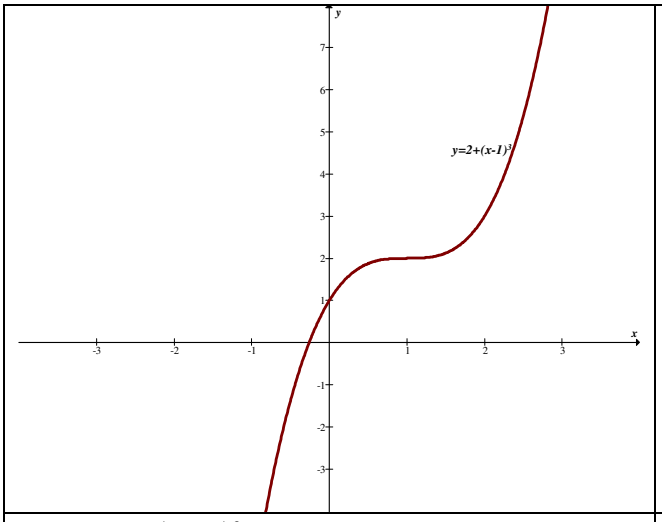
$y_o = -1$
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = [-1, +\infty)$

d) $y = ax^2 + bx + c$ se $a = 1, b = -2$ e $c = 5$

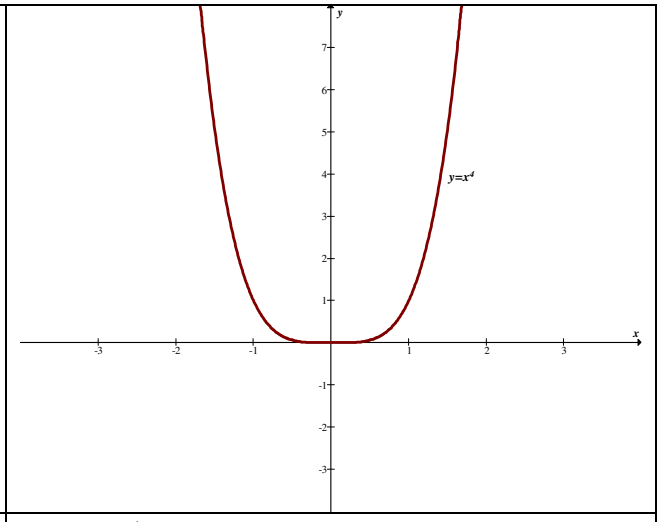


$y = x^2 - 2x + 5$
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = [4, +\infty)$

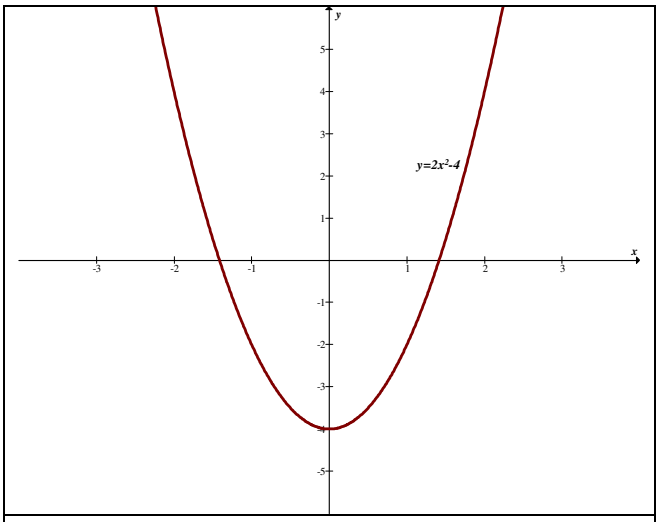
3. Construir os gráficos das funções polinomiais. Dar o domínio e o conjunto imagem.



a) $y = 2 + (x-1)^3$
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = \{IR\}$



b) $y = x^4$
$D(f) = IR$
$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

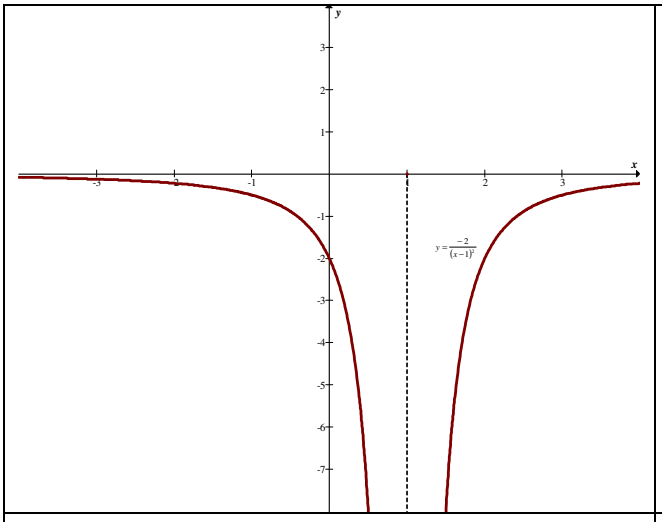


c) $y = 2x^2 - 4$

$D(f) = IR$

$\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

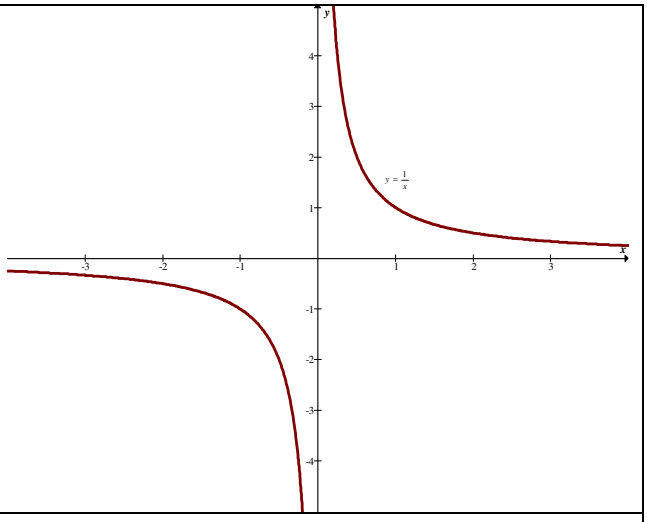
4. Construir os gráficos das funções racionais. Dar o domínio e o conjunto imagem.



a) $y = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$D(f) = IR - \{1\}$

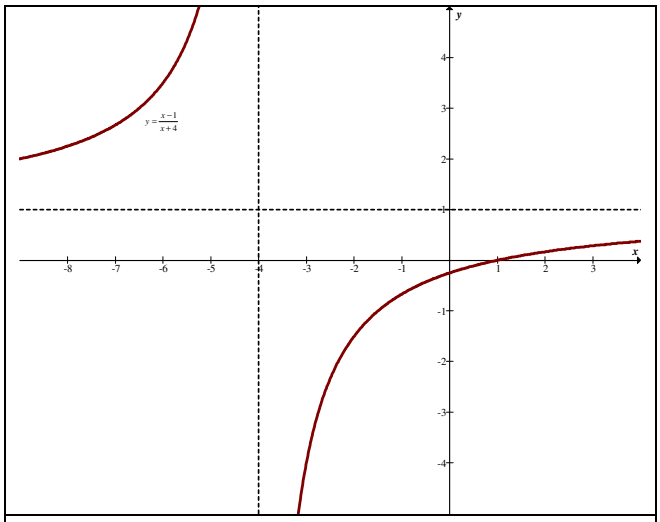
$\text{Im}(f) = (-\infty, 0)$



b) $y = \dfrac{1}{x}$

$D(f) = IR - \{0\}$

$\text{Im}(f) = IR - \{0\}$



c) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$

$D(f) = IR - \{-4\}$

$\text{Im}(f) = IR - \{1\}$

5. A função $f(x)$ é do 1° grau. Escreva a função se $f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$.

$f(x) = ax + b$

$f(-1) = a(-1) + b = 2$

$f(2) = a\,2 + b = 3$

$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ ou

$\begin{cases} -2a + 2b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$

$3b = 7 \therefore b = 7/3$

$a = b - 2$

$a = 7/3 - 2 = \dfrac{7-6}{3} = \dfrac{1}{3}$

Portanto $f(x) = 1/3\,x + 7/3$

6. Determinar quais das seguintes funções são pares ou ímpares.

a) Par

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$$
$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1$$
$$= 3x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$$

b) Ímpar

$$f(x) = 5x^3 - 2x$$
$$f(x) = 5(-x)^3 - 2(-x)$$
$$= -5x^3 + 2x$$
$$= -(5x^3 + 2x) = -f(x)$$

c) Não é par nem ímpar

$$f(s) = s^2 + 2s + 2$$
$$f(-s) = (-s)^2 + 2(-s) + 2$$
$$= s^2 - 2s + 2$$

d) Par

$$f(t) = t^6 - 4$$
$$f(-t) = (-t)^6 - 4$$
$$= t^6 - 4 = f(t)$$

e) Par

$$f(x) = |x|$$
$$f(-x) = |-x|$$
$$= |x| = f(x)$$

f) Ímpar

$$f(y) = \frac{y^3 - y}{y^2 + 1}$$
$$f(-y) = \frac{(-y)^3 - (-y)}{(-y)^2 + 1} = \frac{-y^3 + y}{y^2 + 1} = \frac{-(y^3 - y)}{y^2 + 1} = -f(x)$$

g) Não é par nem Ímpar

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$
$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{-(x+1)}{-x+1}=\frac{x+1}{x-1}$$

h) Par

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right)$$
$$f(-x)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^{-(-x)}\right)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^{x}\right)=f(x)$$

i) Ímpar

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$\begin{aligned} f(-x)=\ln\frac{1-x}{1-(-x)}&=\ln\frac{1-x}{1+x}\\ &=\ln(1-x)-\ln(1+x)\\ &=-[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\ &=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)\end{aligned}$$

j) Ímpar

$$f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$$
$$\begin{aligned} f(-x)&=\lg\left(-x+\sqrt{1+(-x)^{2}}\right)\\ &=\lg\left(-x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\\ &=\lg\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^{2}}}\right)\\ &=\lg 1-\lg\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\\ &=-\lg\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\end{aligned}$$

7. Demonstre que se f e g são funções ímpares, então $(f+g)$ e $(f-g)$ são também funções ímpares.

f é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $f(x)=-f(-x)$ (1)

g é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $g(x)=-g(-x)$ (2)

De (1) e (2) escrevemos

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= -f(-x)-g(-x)\\ &= -[f(-x)-g(-x)]\\ &= -[(f+g)(-x)]\end{aligned}$$

Portanto, $(f+g)$ é ímpar.

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ &= -f(-x)-[-g(-x)]\\ &= -f(-x)+g(-x)\\ &= -[f(-x)-g(-x)]\\ &= -[(f-g)(-x)]\end{aligned}$$

Portanto, $(f-g)$ é ímpar.

8. Demonstre que se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ e f/g são funções pares.

f é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $f(x) = -f(-x)$ (1)

g é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $g(x) = -g(-x)$ (2)

De (1) e (2) escrevemos

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= -f(-x)\cdot[-g(-x)]\\ &= f(-x)\cdot g(-x)\\ &= f\cdot g\,(-x)\end{aligned}$$

Portanto, $f \cdot g$ é par.

$$\begin{aligned}(f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{-f(-x)}{-g(-x)}\\ &= \frac{f(-x)}{g(-x)}\\ &= (f/g)(-x)\end{aligned}$$

Portanto, f/g é par.

9. Mostre que a função $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ é par e que a função $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ é ímpar.

Seja $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$. Temos,

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]$$
$$=g(-x)$$

Portanto, $g(x)$ é par.

Seja $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. Temos,

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]$$
$$=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$
$$=-h(x)$$

Portanto, $h(x)$ é ímpar.

10. Demonstre que qualquer função $f : IR \to IR$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Queremos mostrar que se $h(x)$ é uma função qualquer podemos escrever:
$h(x)=f(x)+g(x)$, sendo que $f(x)$ é par e $g(x)$ é ímpar.

Usando o exercício anterior podemos fazer

$f(x)=\frac{1}{2}[h(x)+h(-x)]$ e $g(x)=\frac{1}{2}[h(x)-h(-x)]$

De fato

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}h(-x)+\frac{1}{2}h(x)-\frac{1}{2}h(-x)=h(x)$$

11. Expresse as funções seguintes como a soma de uma função par e uma função ímpar.

a) $f(x) = x^2 + 2$

Basta fazer $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ com:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 + 2 + (-x)^2 + 2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x^2 + 4\right]$$

$$= x^2 + 2$$

Temos $f_1(x)$ par.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 + 2 - (-x)^2 - 2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2 - x^2 - 2\right]$$

$$= 0$$

Temos $f_2(x)$ ímpar.

b) $f(x) = x^3 - 1$

Basta fazer $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ com:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 + (-x)^3 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 - x^3 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-2) = -1$$

Temos $f_1(x)$ par.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 - (-x)^3 + 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 + x^3 + 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,2x^3 = x^3$$

Temos $f_2(x)$ ímpar

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Basta fazer $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ com:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{-x-1}{-x+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)(1-x)+(-x-1)(x+1)}{(x+1)(1-x)}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{-(x^2-2x+1)-(x^2+2x+1)}{-(x^2-1)}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{-2x^2-2}{-(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Temos $f_1(x)$ par.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{x+1} - \frac{-x-1}{-x+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^2-2x+1-x^2-2x-1}{x^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{-4x}{x^2-1} = \frac{-2x}{x^2-1}$$

Temos $f_2(x)$ ímpar.

d) $f(x) = |x| + |x-1|$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| + |-x| + |-x-1|\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| + |x| + |-x-1|\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2|x| + |x-1| + |x+1|\right]$$

Temos $f_1(x)$ par.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| - |-x| - |-x-1|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| - |x| - |x+1|\right]$$

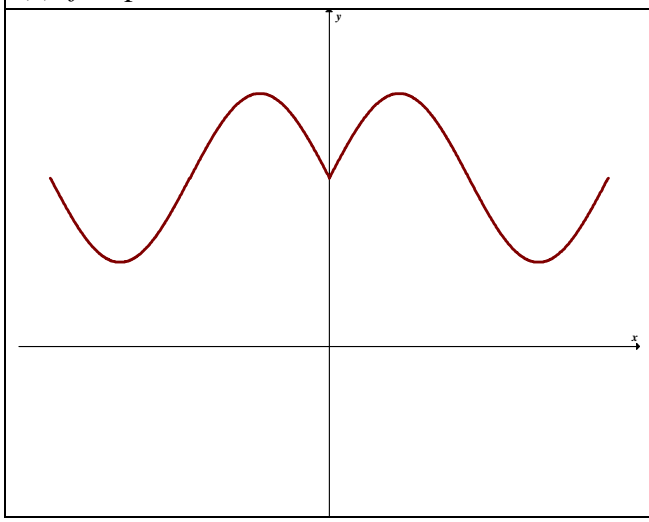
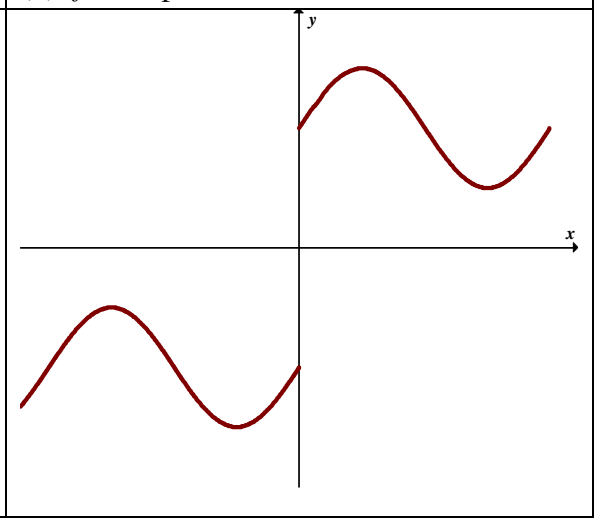
$$= \frac{1}{2}\left[|x-1| - |x+1|\right]$$

Temos $f_2(x)$ ímpar.

12. Seja $f(x)$ uma função cujo gráfico para $x \geq 0$, tem o aspecto indicado na figura. Completar esse gráfico no domínio $x < 0$ se:

(a) f é par

(b) f é ímpar

(a) f é par	(b) f é ímpar
	

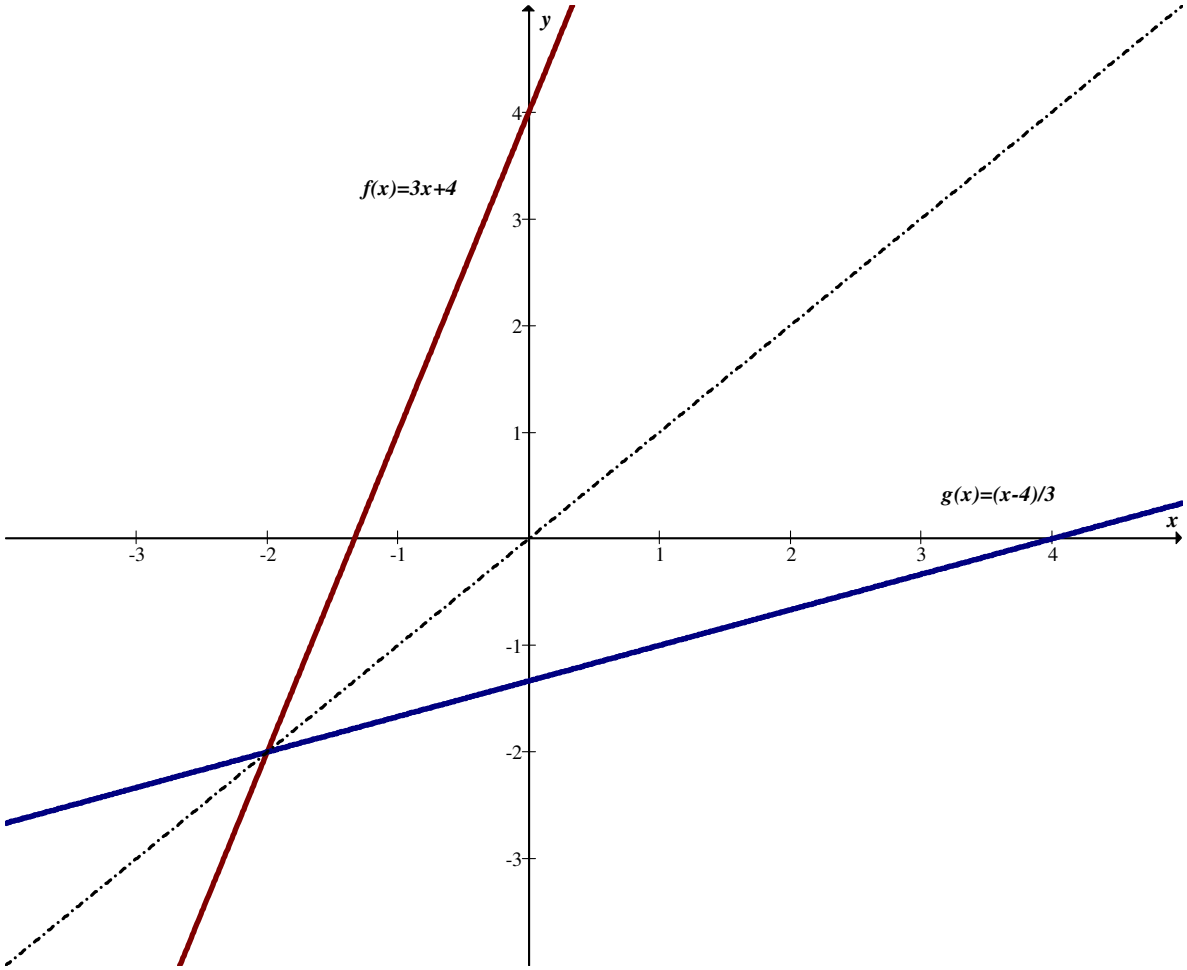
13. Em cada um dos exercícios determine a fórmula da função inversa. Fazer os gráficos da função dada e de sua inversa.

a) $y = 3x + 4$

$3x = y - 4$

$x = \dfrac{y-4}{3}$

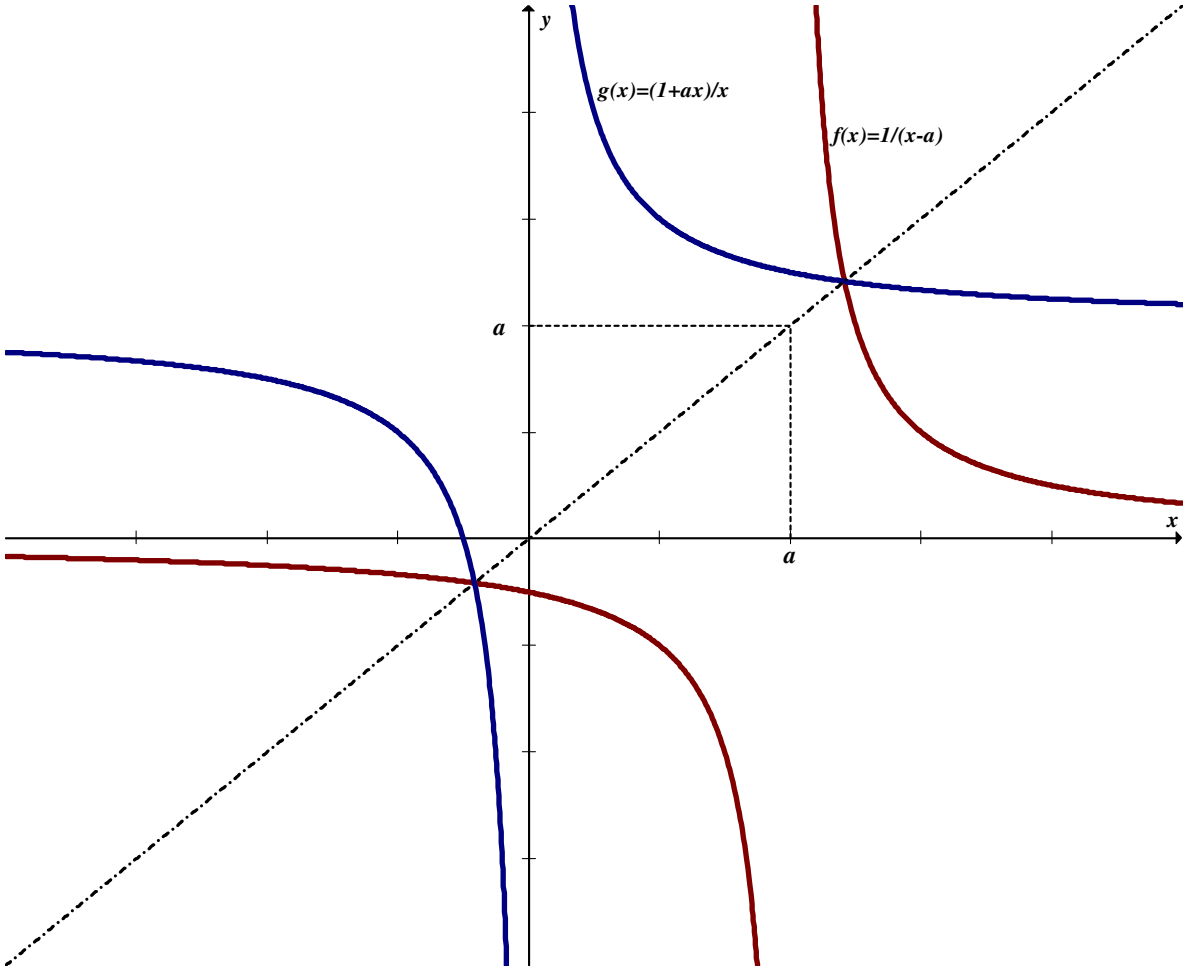
Assim, a função $f(x) = 3x + 4$ tem com função inversa a função $g(x) = \dfrac{x-4}{3}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.



b) $y = \dfrac{1}{x-a}$

$$y(x-a) = 1$$
$$xy - ay = 1$$
$$x = \frac{1+ay}{y}$$

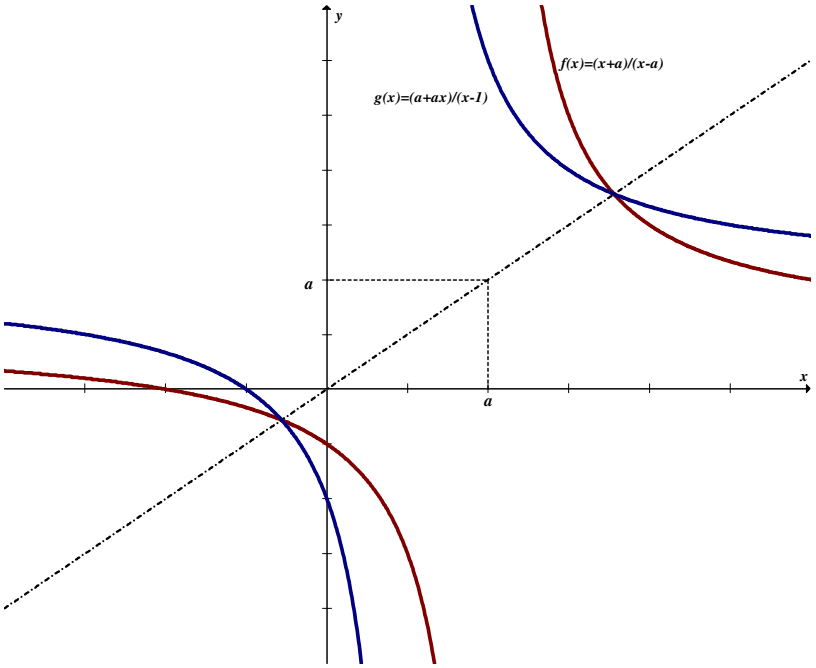
Assim, a função $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ tem com função inversa a função $g(x) = \dfrac{1+ax}{x}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$. Observar que o exemplo gráfico está sendo apresentado com o valor de $a > 0$.



c) $y = \dfrac{x+a}{x-a}$

$$xy - ay = x + a$$
$$xy - x = a + ay$$
$$x = \frac{a+ay}{y-1}$$

Assim, a função $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$ tem com função inversa a função $g(x) = \dfrac{a+ax}{x-1}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$. Observar que o exemplo gráfico está sendo apresentado com o valor de $a > 0$.

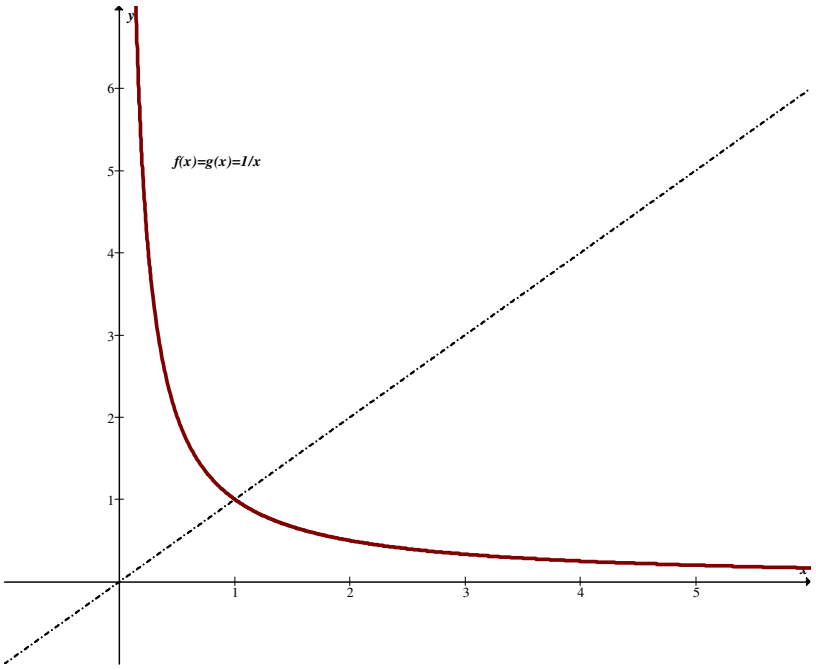


d) $y = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

$xy = 1$

$x = \frac{1}{y}, \quad y > 0$

Assim, a função $y = \frac{1}{x}, \quad x > 0$ tem com função inversa a função $g(x) = \frac{1}{x}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$. Observar que as funções coincidem.

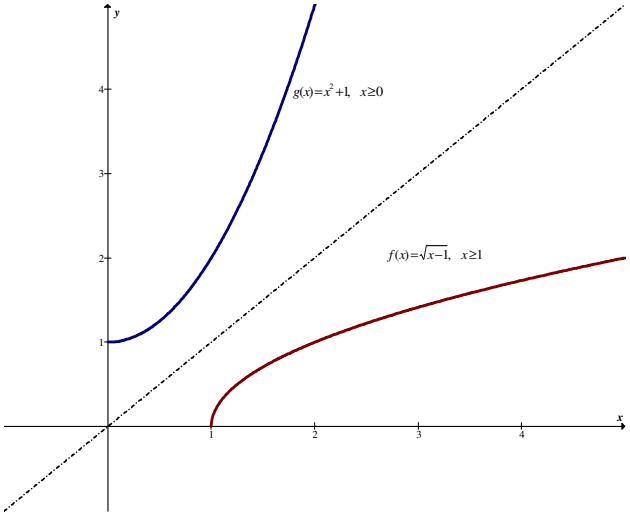


e) $y=\sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$

$y^2=x-1$

$x=y^2+1, \quad y \geq 0$

Assim, a função $y=\sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$ tem com função inversa a função $g(x)=x^2+1, \quad x \geq 0$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y=x$.

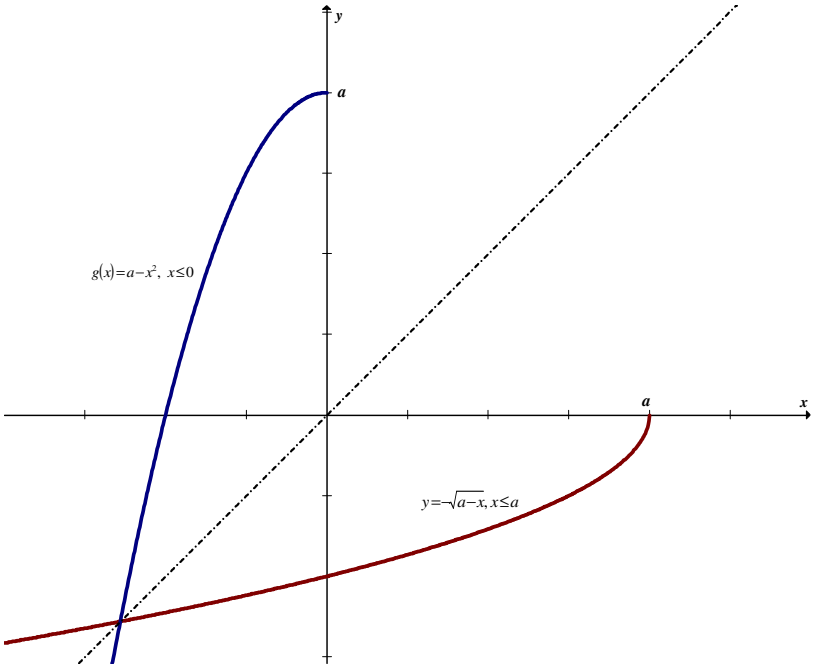


f) $y=-\sqrt{a-x}, x \leq a$

$y^2=a-x$

$x=a-y^2, y \leq 0$

Assim, a função $f(x)=-\sqrt{a-x}, x \leq a$ tem com função inversa a função $g(x)=a-x^2, \quad x \leq 0$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y=x$. Observar que o exemplo gráfico está sendo apresentado com o valor de $a>0$.



g) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}\ x \geq 0$

$yx^2 + y = x^2$

$yx^2 - x^2 = -y$

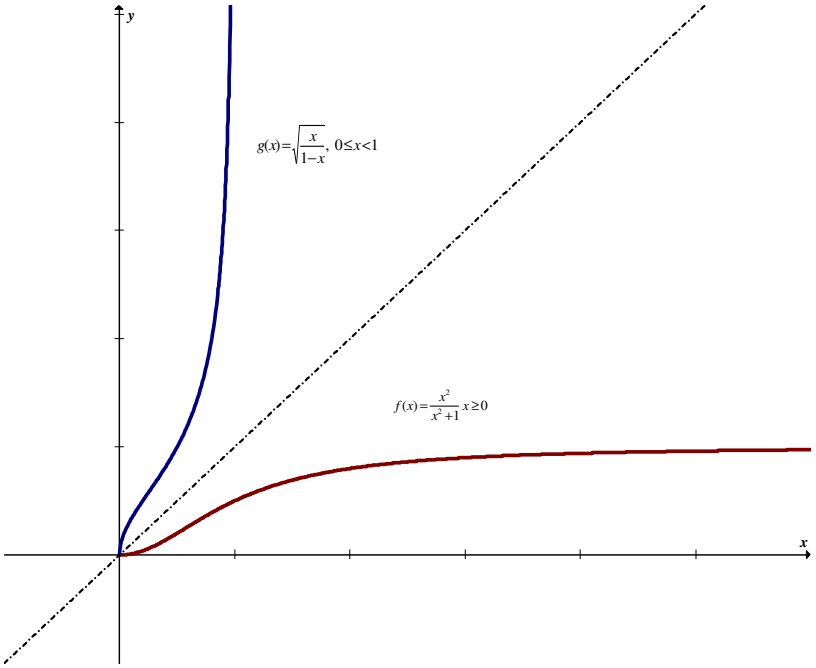
$x^2(y-1) = -y$

$x^2 = \dfrac{-y}{y-1}$

$x = \sqrt{\dfrac{-y}{y-1}} = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}, 0 \leq y < 1$

Assim, a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\ x \geq 0$ tem como inversa a função

$g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}},\ 0 \leq x < 1$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.



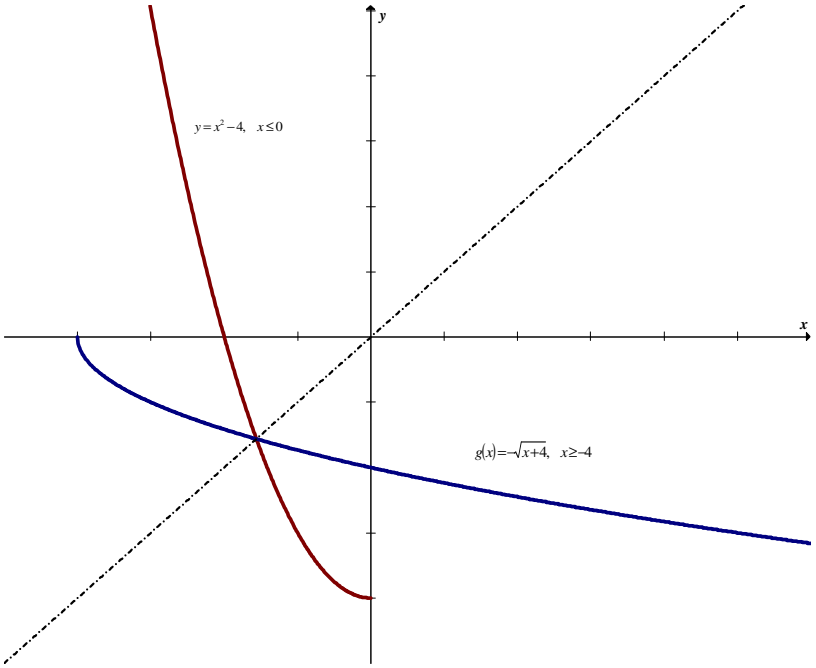
h) $y = x^2 - 4, \quad x \leq 0$

$x^2 = y + 4$

$x = -\sqrt{y+4}$

$g(x) = -\sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$

Assim, a função $f(x) = x^2 - 4, \quad x \leq 0$ tem como inversa a função $g(x) = -\sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.



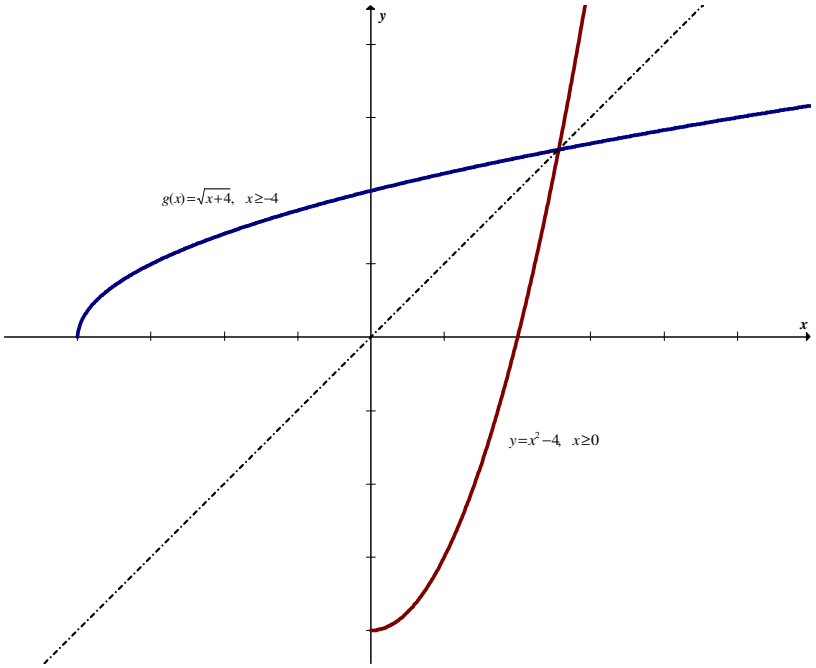
i) $y = x^2 - 4, \quad x \geq 0$

$x^2 = y + 4$

$x = \sqrt{y+4}$

$g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$

Assim, a função $y = x^2 - 4, \quad x \geq 0$ tem como inversa a função $g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.



14. Mostre que a função $y = f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa, isto é, $x = f(y)$ ou $f[f(x)] = x$.

$$y = \frac{x+2}{2x-1}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$
$$2yx - y = x + 2$$
$$2xy - x = y + 2$$
$$x(2y-1) = y + 2$$

$$x = \frac{y+2}{2y-1} = f(y) \text{ com } y \neq \frac{1}{2}$$

ou

$$f[f(x)] = f\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \frac{\dfrac{x+2}{2x-1}+2}{2\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)-1} = \frac{\dfrac{x+2+4x-2}{2x-1}}{\dfrac{2x+4-2x+1}{2x-1}} = \frac{5x}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{5} = x, \; x \neq \frac{1}{2}$$

15. Dada a função $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$ definida para todo x real, demonstrar que sua inversa é a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ definida para $|y| < 1$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$$
$$y^2 + x^2y^2 = x^2$$
$$-x^2y^2 + x^2 = y^2$$
$$x^2(1-y^2) = y^2$$
$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$
$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

considerando-se que
$1 - y^2 \geq 0$
$(1-y)(1+y) \geq 0$
$-1 < y < 1$

ou $|y| < 1$

16. Dada $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x} & , \quad x > 9 \end{cases}$

verifique que f tem uma função inversa e encontre $f^{-1}(x)$.

Para $x < 1$, temos $y = x$.

Para $1 \leq x \leq 9$, temos $y = x^2 \quad \therefore \quad x = \sqrt{y}$

Para $x > 9$, temos

$$y = 27\sqrt{x}$$
$$y^2 = 27^2 \cdot x$$
$$x = \frac{y^2}{27^2} = \left(\frac{y}{27}\right)^2$$

Assim, $g(y) = \begin{cases} y \quad , \quad y < 1 \\ \sqrt{y} \quad , \quad 1 \le y \le 81 \\ \left(\frac{y}{27}\right)^2 \quad , \quad y > 81 \end{cases}$ ou $f^{-1}(x) = \begin{cases} x \quad , \quad x < 1 \\ \sqrt{x} \quad , \quad 1 \le x \le 81 \\ \left(\frac{x}{27}\right)^2 \quad , \quad x > 81 \end{cases}$

17. Se $f(x)$ e $g(x)$ são periódicas de período T, prove que:
(a) $h(x) = f(x) + g(x)$ tem período T.
(b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é periódica de período T.
(c) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$ para todo *x* é periódica de período T.

Se $f(x)$ é periódica de período T temos que existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Se $g(x)$ é periódica de período T temos que existe um número real $T \neq 0$ tal que $g(x+T) = g(x)$ para todo $x \in D(g)$.
Assim:

(a) $h(x) = f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T) = h(x+T)$ para o número real $T \neq 0$ com $x \in D(f+g)$. Portanto $h(x) = f(x) + g(x)$ é periódica de período T.

(b) $h(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x+T) \cdot g(x+T) = h(x+T)$ para o número real $T \neq 0$ com $x \in D(fg)$. Portanto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é periódica de período T.

(c) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+T)}{g(x+T)} = h(x+T), \quad g(x+T) \neq 0$ para o número real $T \neq 0$ com $x \in D(f/g)$. Portanto $h(x) = f(x)/g(x)$ é periódica de período T.

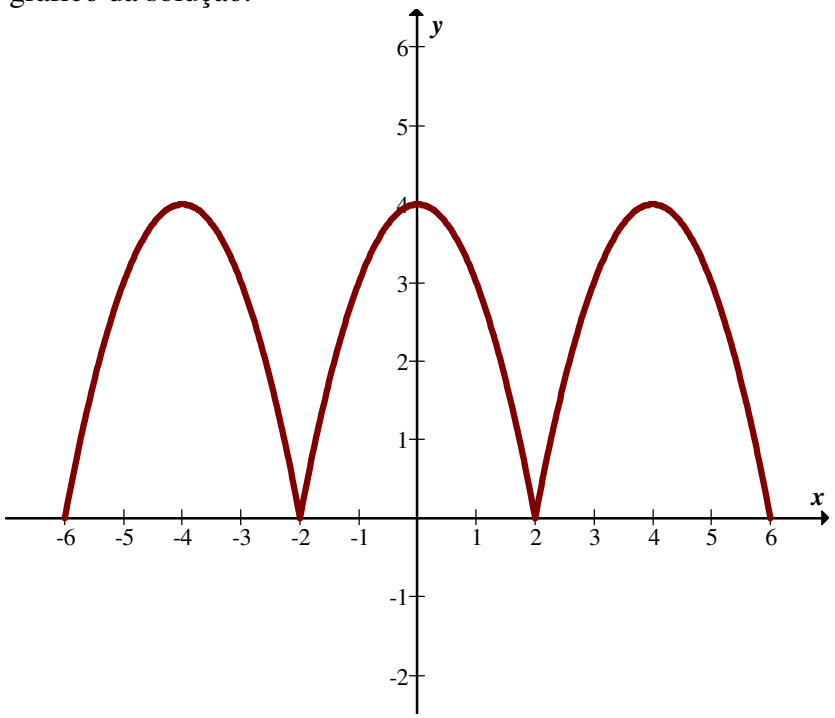
18. Se $f(x)$ é periódica de período T, prove que 3T também é período de *f*.

Se $f(x)$ é periódica de período T temos que existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$. Dessa forma, $x + T \in D(f)$.

Aplicando novamente a definição, temos
$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$. Dessa forma, $x+2T\in D(f)$. Repetindo o raciocínio, vem:
$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x)$, para todo $x\in D(f)$.
Podemos concluir, então, que 3T é período da função $f(x)$.

19. Sabendo que $f(x)$ é uma função par e periódica de período T=4, complete o seu gráfico.

Segue o gráfico da solução.



20. Se $f(x)=2^x$, mostre que $f(x+3)-f(x-1)=\frac{15}{2}f(x)$

$2^{x+3}-2^{x-1}=\frac{15}{2}2^x$

$2^x\left(2^3-2^{-1}\right)=2^x\left(8-\frac{1}{2}\right)=2^x\,\frac{16-1}{2}=\frac{15}{2}2^x=\frac{15}{2}f(x)$

21. Seja $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ e $\psi(x)=\frac{1}{2}\left(a^x-a^{-x}\right)$. Demonstrar que:

$\varphi(x+y)=\varphi(x).\varphi(y)+\psi(x).\psi(y)$

Temos,

$$\varphi(x).\varphi(y)+\psi(x).\psi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right).\frac{1}{2}\left(a^{y}+a^{-y}\right)+\frac{1}{2}\left(a^{x}-a^{-x}\right).\frac{1}{2}\left(a^{y}-a^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^{x}.a^{y}+a^{x}.a^{-y}+a^{-x}.a^{y}+\ a^{-x}.a^{-y}\right)+\frac{1}{4}\left(a^{x}.a^{y}-a^{x}.a^{-y}-a^{-x}.a^{y}-\ a^{-x}.a^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^{x+y}+a^{x-y}+a^{y-x}+a^{-x-y}+a^{x+y}-a^{x-y}-a^{y-x}+a^{-x-y}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\,a^{x+y}+2\,a^{-x-y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^{x+y}+a^{-x-y}\right)$$

$$=\varphi(x+y)$$

$$\psi(x+y)=\varphi(x).\psi(y)+\varphi(y).\psi(x)$$

Temos,

$$\varphi(x).\psi(y)+\varphi(y).\psi(x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right).\frac{1}{2}\left(a^{y}-a^{-y}\right)+\frac{1}{2}\left(a^{y}+a^{-y}\right).\frac{1}{2}\left(a^{x}-a^{-x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^{x+y}-a^{x-y}+a^{-x+y}-a^{-x-y}+a^{x+y}-a^{y-x}+a^{-y+x}-a^{-x-y}\right)$$

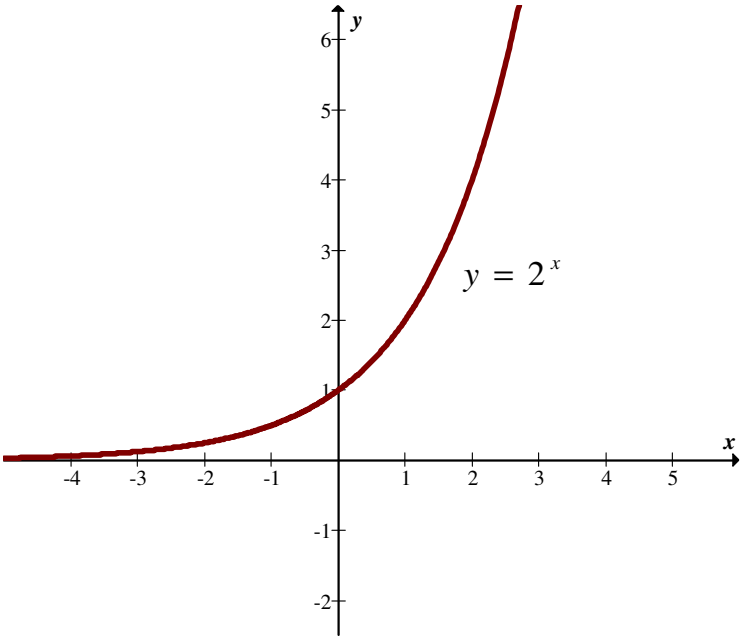
$$=\frac{1}{4}\left(2\,a^{x+y}-2\,a^{-x-y}\right)$$

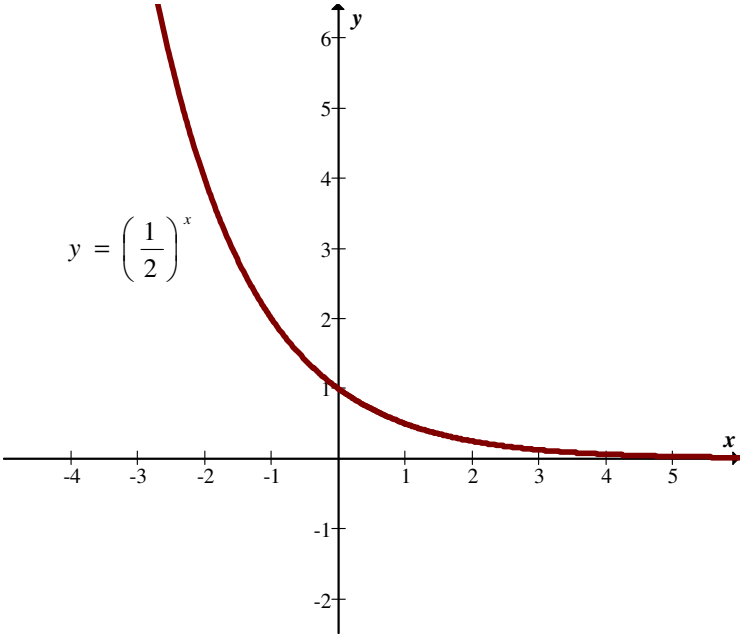
$$=\frac{1}{2}\left(a^{x+y}-a^{-(x+y)}\right)$$

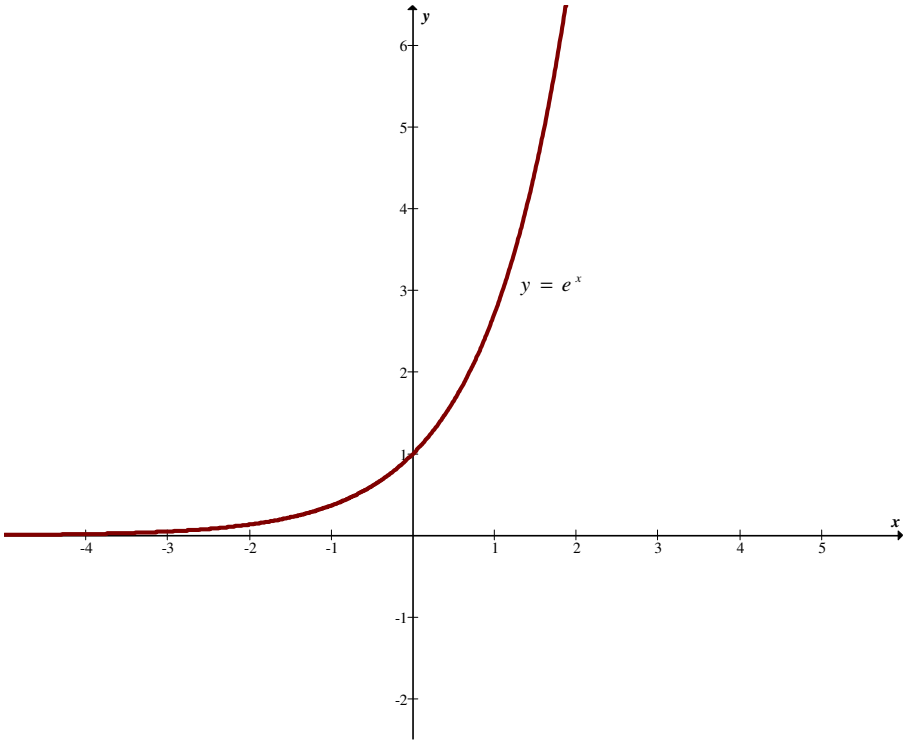
$$=\psi(x+y)$$

22. Construir o gráfico das seguintes funções exponenciais.

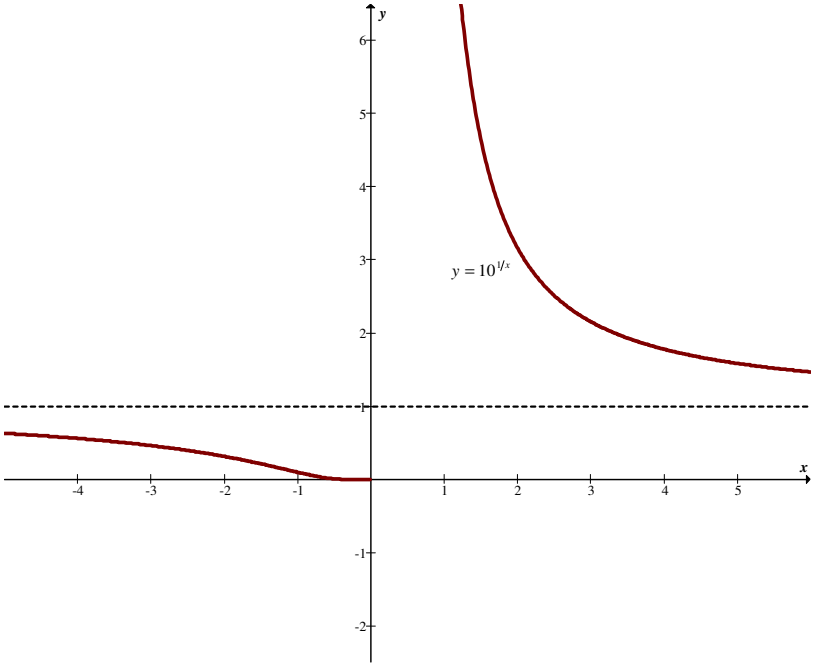
a) $y=a^{x}$, se $a=2,\ \frac{1}{2},\ e\ (e=2{,}718\ldots)$


y
x
$y = 2^x$

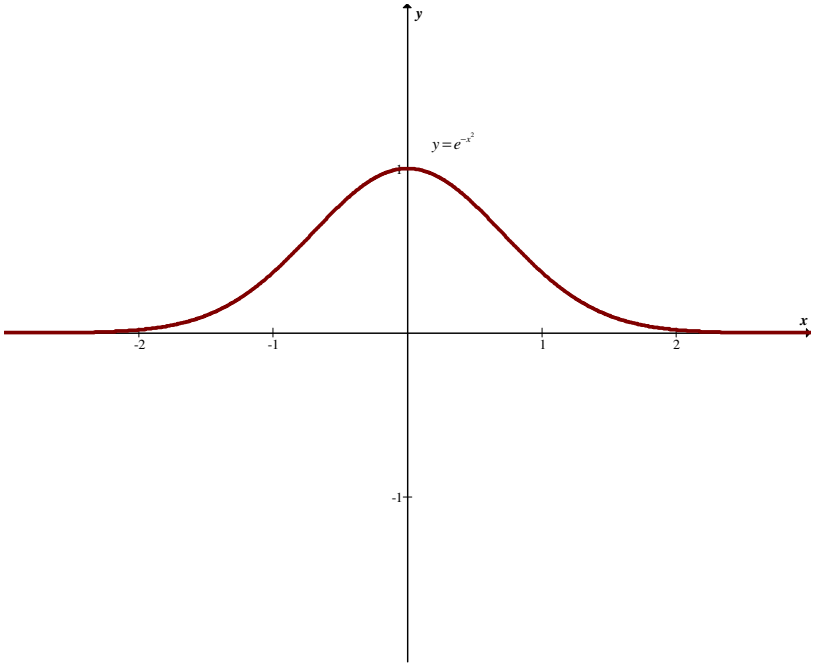

y
x
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



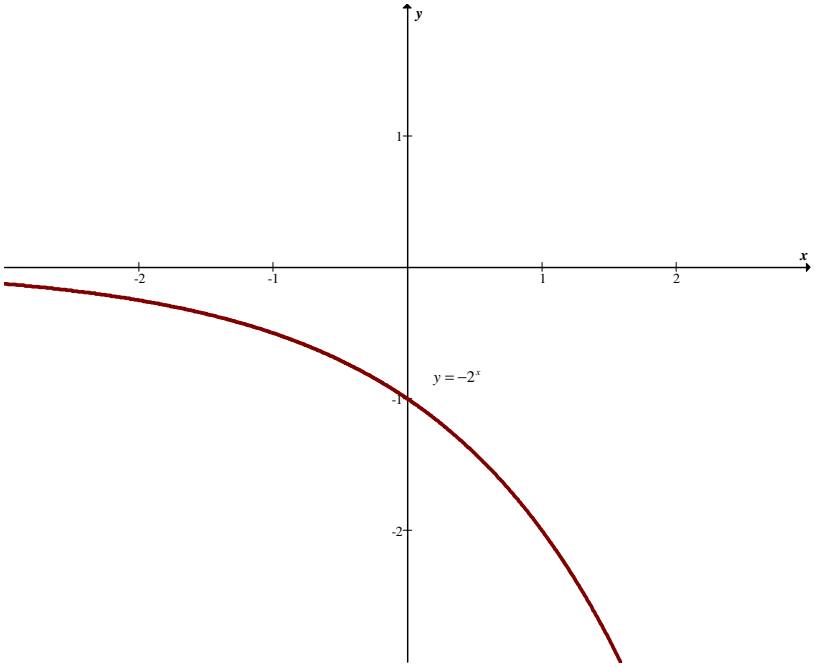
b) $y = 10^{1/x}$



c) $y = e^{-x^2}$



d) $y = -2^x$



23. Dada $\varphi(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$. Verifique a igualdade $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$

$$\varphi(a)+\varphi(b)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\right)+\lg\left(\frac{1-b}{1+b}\right)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\right)=\lg\left(\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1-b-a+ab}{1+a+b+ab}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\left(\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}\right)=\lg\left(1-\frac{a+b}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{1+ab+a+b}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1+ab-a-b}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{1+ab+a+b}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}\right)=\varphi(a)+\varphi(b)$$

24. Dado $f(x)=\log x$ e $g(x)=x^3$. Forme as expressões.

a) $f[g(2)]$

$$f[g(2)]=f\left[2^3\right]=f(8)=\log 8$$

b) $f[g(a)]$, $a>0$

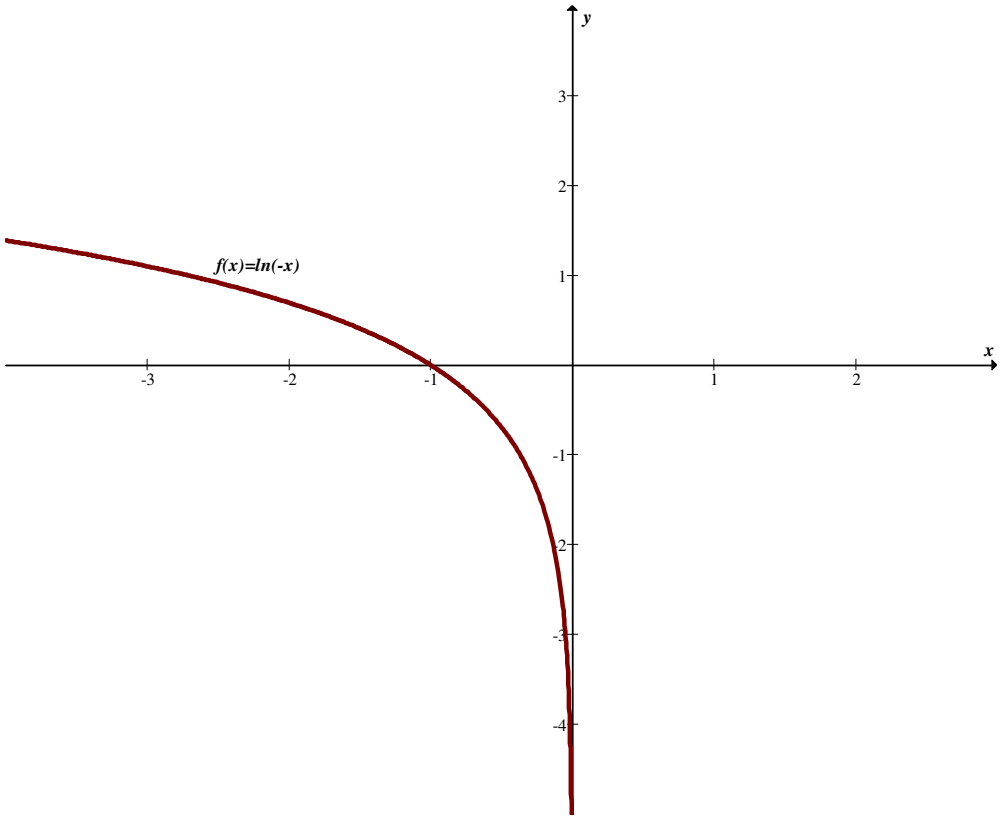
$$f[g(a)]=f\left[a^3\right]=\log a^3=3\log a$$

c) $g[f(a)]$, $a>0$

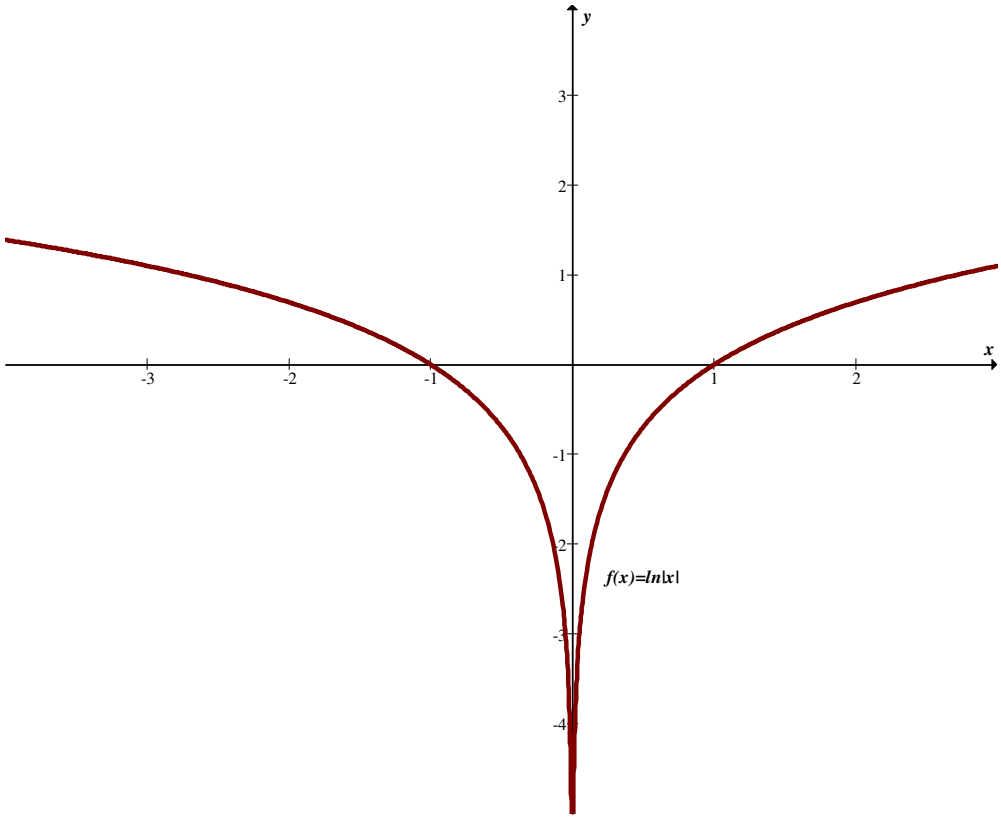
$$g[f(a)]=g[\log a]=(\log a)^3$$

25. Construir o gráfico das seguintes funções logarítmicas.

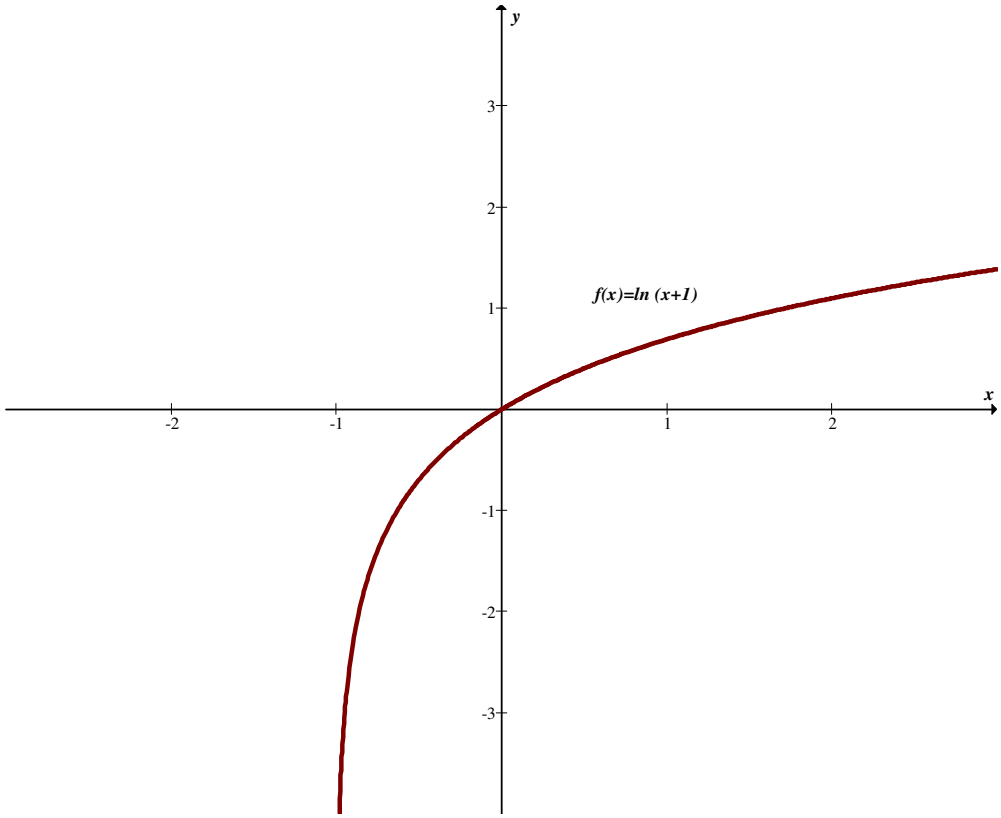
a) $y=\ln(-x)$



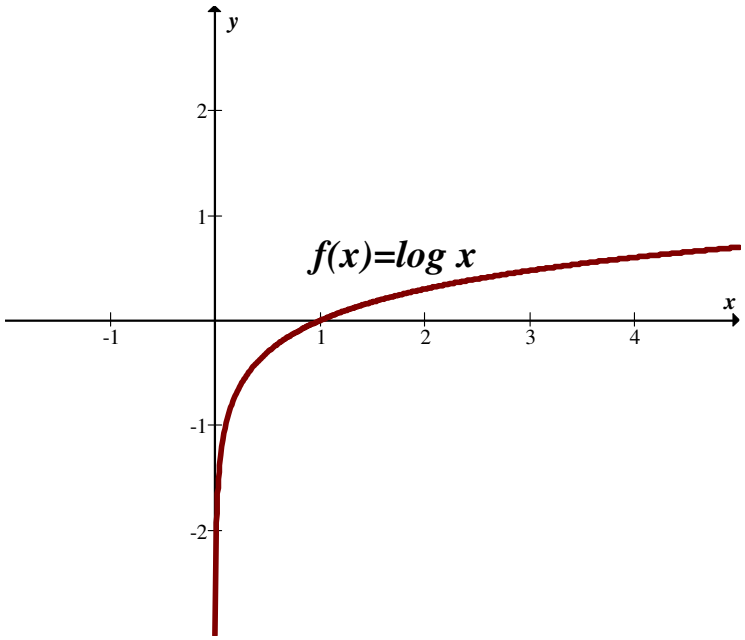
b) $y = \ln|x|$

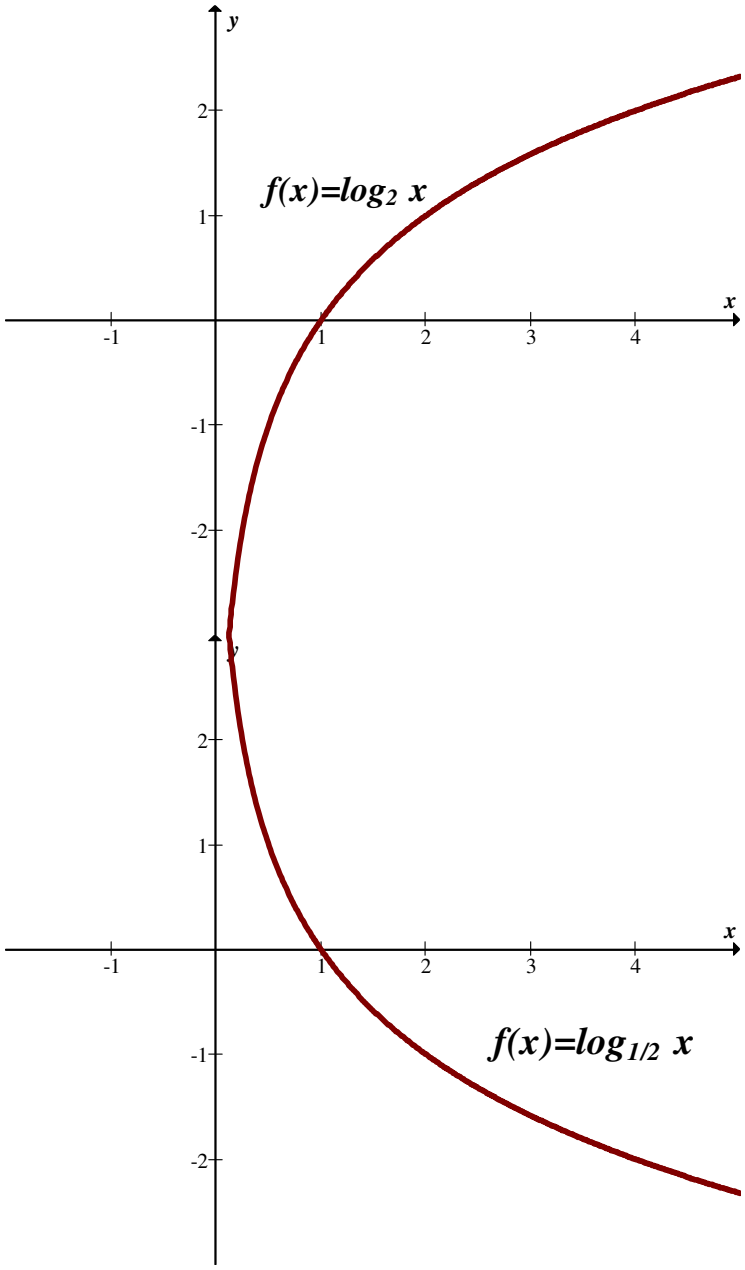


c) $y = \ln(x+1)$

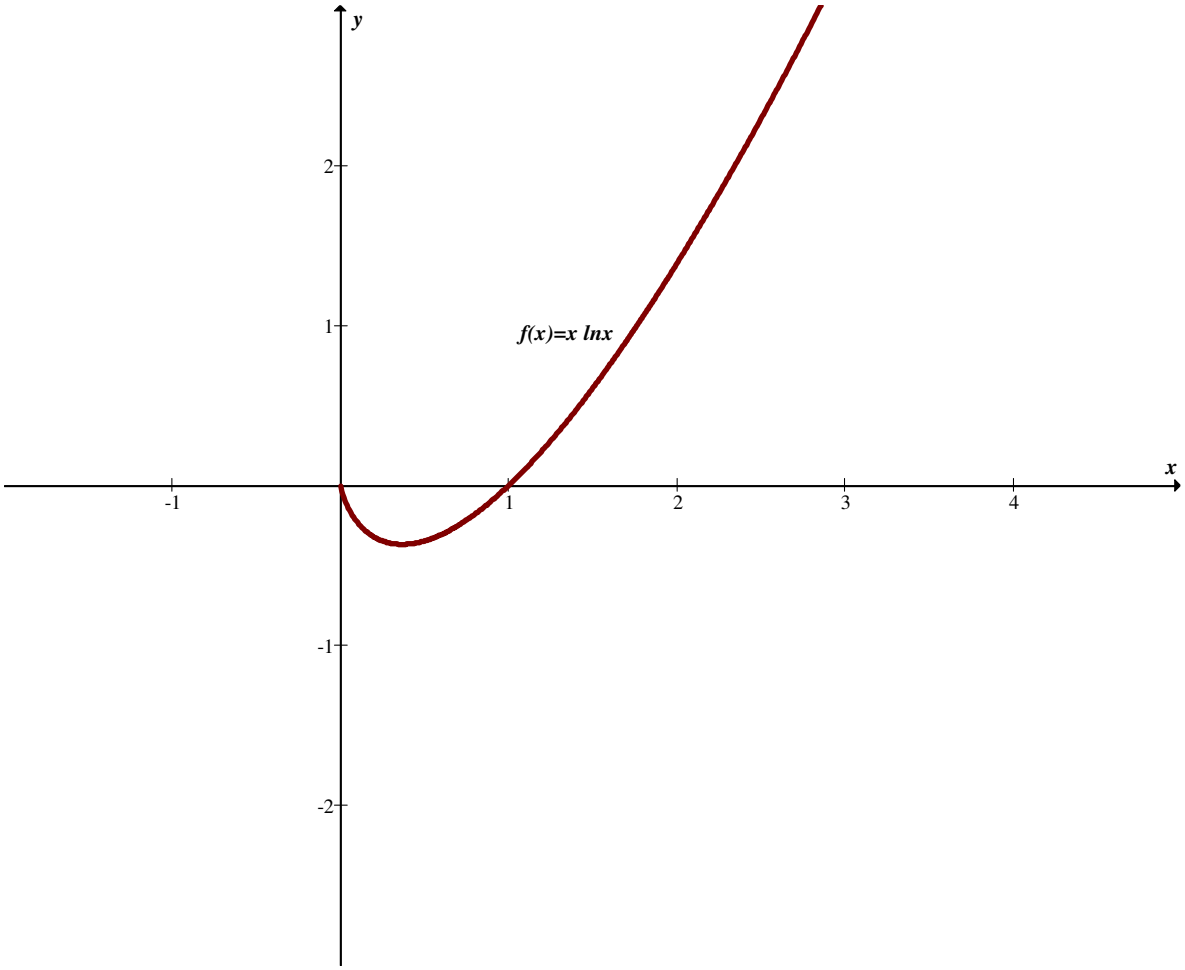


d) $y = \log_a x$ se $a = 10,\ 2$ e $1/2$





e) $y = x \ln x$



26. Se $f(x) = arc\ tg\ x$ prove que $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Temos que:

$f(x) = arc\ tg\ x$

$f(y) = arc\ tg\ y$

$f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = arc\ tg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Portanto,

$x = tg\ f(x)$

$y = tg\ f(y)$

$\frac{x+y}{1-xy} = tg\ f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Usando a fórmula trigonométrica $tg(a+b)=\frac{tg\ a+tg\ b}{1-tg\ a\ .tg\ b}$, vem

$$tg\left(f(x)+f(y)\right)=\frac{tg\ f(x)+tg\ f(y)}{1-tg\ f(x).tg\ f(y)}=\frac{x+y}{1-xy}\ .$$

Portanto, $f(x)+f(y)=arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

27. Prove que $arc\ tg\ a-arc\cot g\ b=arc\ tg\ b-arc\cot g\ a$.

Por definição temos que:

$$arc\cot g\ a=\frac{\pi}{2}-arc\,tg\ a \qquad (1)$$

$$arc\cot gb=\frac{\pi}{2}-arc\,tg\,b \qquad (2)$$

Fazendo a subtração (1) –(2) temos:

$$arc\cot g\ a-arc\cot g\ b=\frac{\pi}{2}-arc\,tg\ a-\left(\frac{\pi}{2}-arc\,tg\ b\right)=arc\ tg\ b-arc\ tg\ a\ .$$

Portanto,

$arc\ tg\ a-arc\cot g\ b=arc\ tg\ b-arc\cot g\ a$.

28. Dado $f(\theta)=tg\ \theta$. Verifique a igualdade.

$$f(2\theta)=\frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$$

Temos que mostrar que:

$$tg\ 2\theta=\frac{2tg\ \theta}{1-[tg\ \theta]^2}\ .$$

Vamos considerar:

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{sen\ a\ .\cos b + \cos a\ .\ sen\ b}{\cos a\ .\cos b - sen\ a\ .\ sen\ b}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\ a}{\cos a} + \dfrac{sen\ b}{\cos b}}{1 - \dfrac{sen\ a}{\cos a}.\dfrac{sen\ b}{\cos b}} = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tg\ a\ .tg\ b}$$

Fazendo $a = b = \theta$ vem:

$$tg\ 2\theta = \frac{2tg\ \theta}{1 - [tg\ \theta]^2}.$$

29. Seja $f(x) = arc\cos(\log_{10} x)$.

Calcular.

$$f(1/10) = arc\cos(\log_{10} 1/10)$$
$$= arc\cos(-1)$$
$$= \pi$$

ou $n\pi$ para n inteiro impar.

$$f(1) = arc\cos(\log_{10} 1)$$
$$= arc\cos 0$$
$$= \frac{\pi}{2} + k\pi$$

com k inteiro.

$$f(10) = arc\cos(\log_{10} 10)$$
$$= arc\cos 1$$
$$= n\pi,\ n \text{ inteiro par ou } 2n\pi,\ n \in \mathrm{Z}.$$

30. Determinar o domínio das seguintes funções.

a) $y = arc\cos\dfrac{2x}{1+x}$

Temos que:

$$-1 \le \frac{2x}{1+x} \le 1$$

Resolvendo esta desigualdade temos $[-1/3, 1]$.

b) $y = arc\ sen\left(\log_{10} x/10\right)$

Temos que:

$$\frac{x}{10} > 0$$

$$x > 0$$

e

$$-1 \le \log_{10} x/10 \le 1$$

$$10^{-1} \le \frac{x}{10} \le 10^{-1}$$

$$1 \le x \le 100$$

c) $y = \sqrt{sen\ 2x}$

$sen\ 2x \ge 0$

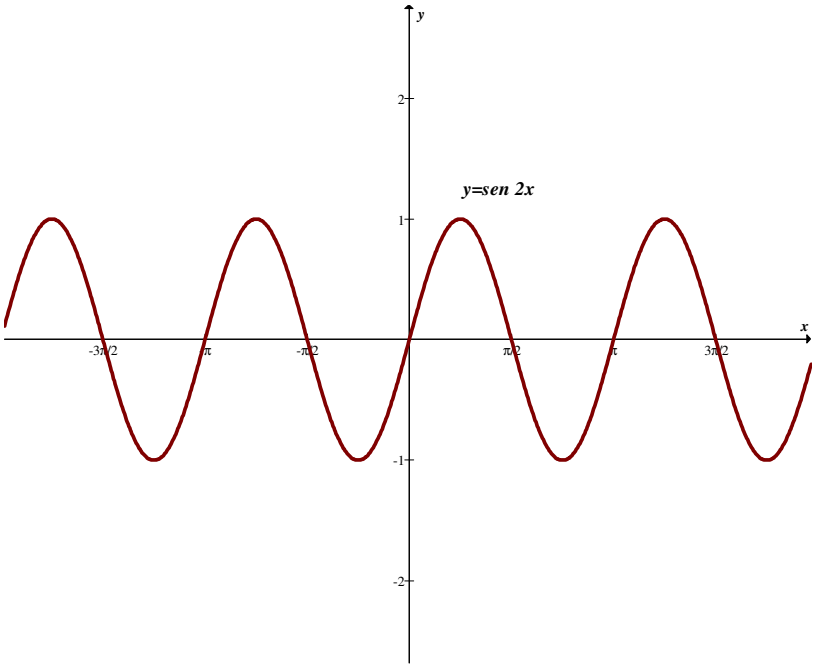
Assim,

$x \in \ldots[-\pi, -\pi/2] \cup [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2] \ldots$

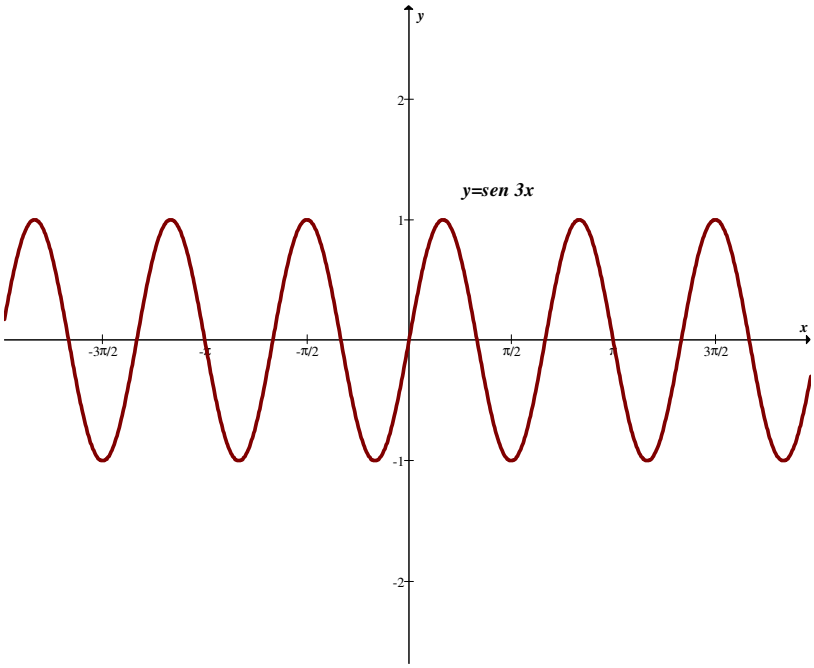
$D(f) = \bigcup_{n \in Z} [n\pi, n\pi + \pi/2]$

31. Construir o gráfico das seguintes funções trigonométricas. Verificar se são periódicas e, em caso afirmativo, determinar o período.

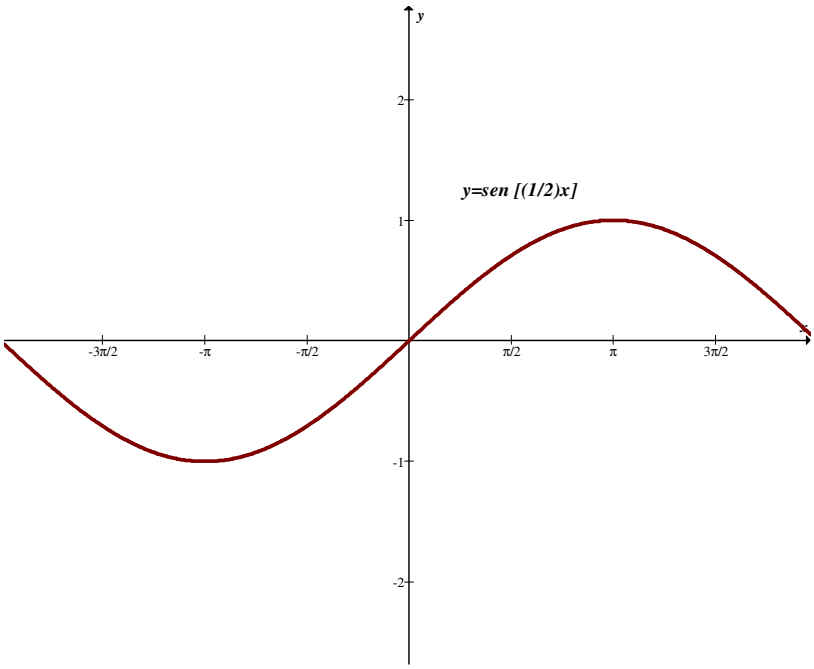
a) $y = sen\ kx$, k 2, 3, 1/2 e 1/3



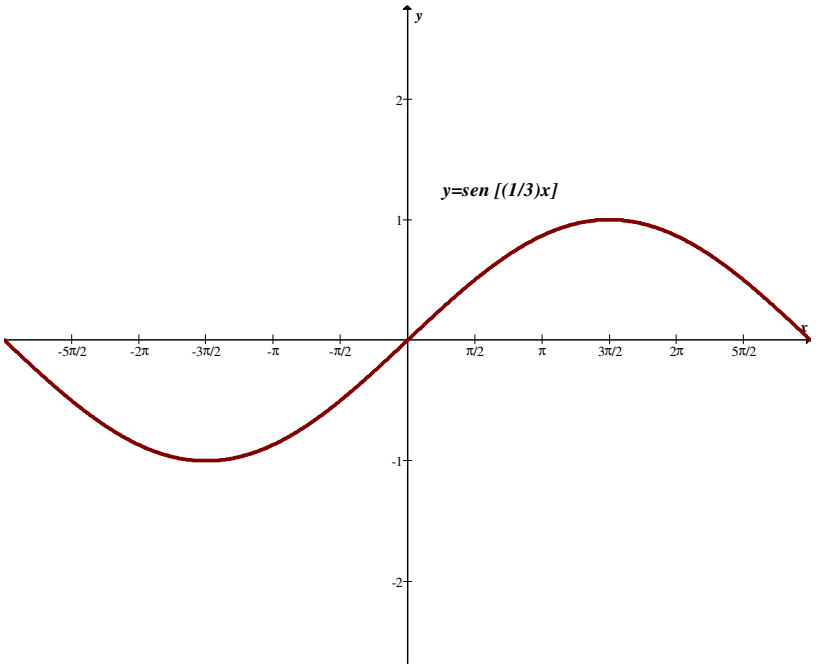
Periódica de período igual a π



Periódica de período igual a $\frac{2\pi}{3}$.

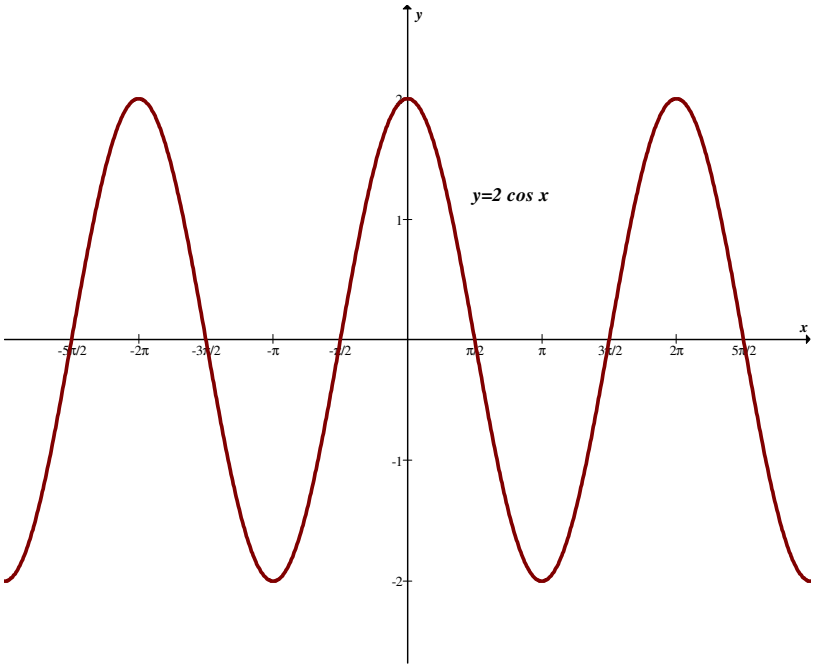


Periódica de período igual a 4π.

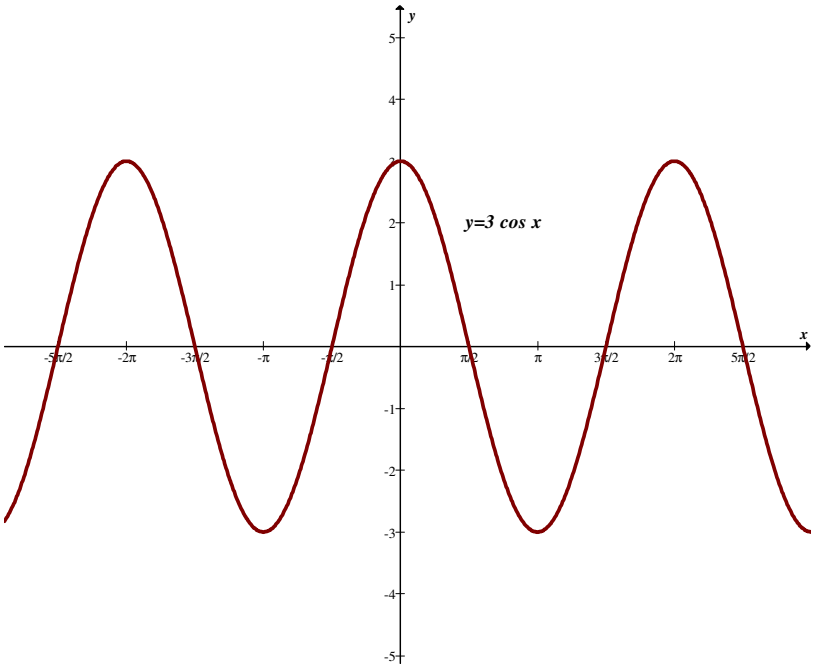


Periódica de período igual a 6π.

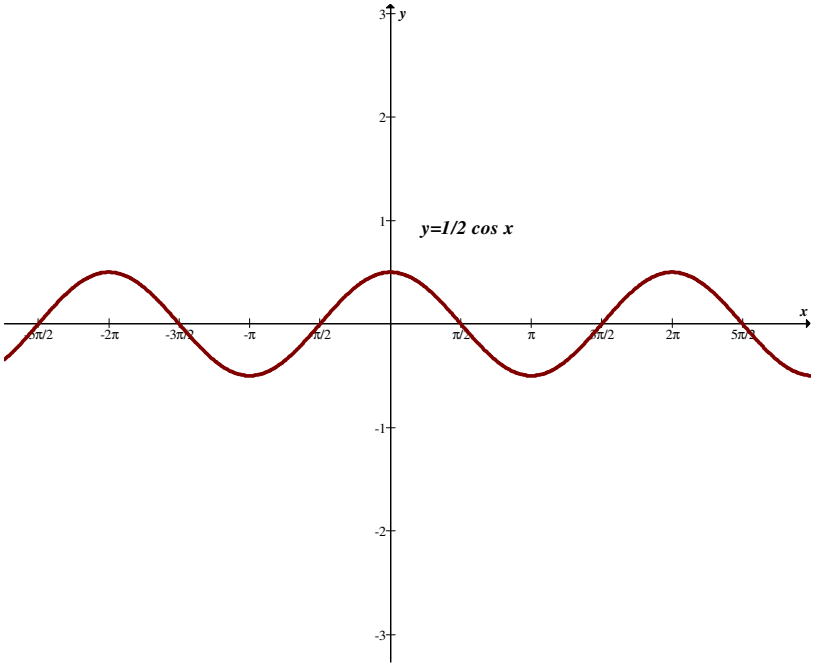
b) $y = k \cos x$ $\quad k = 2, 3, 1/2, 1/3$ e -1



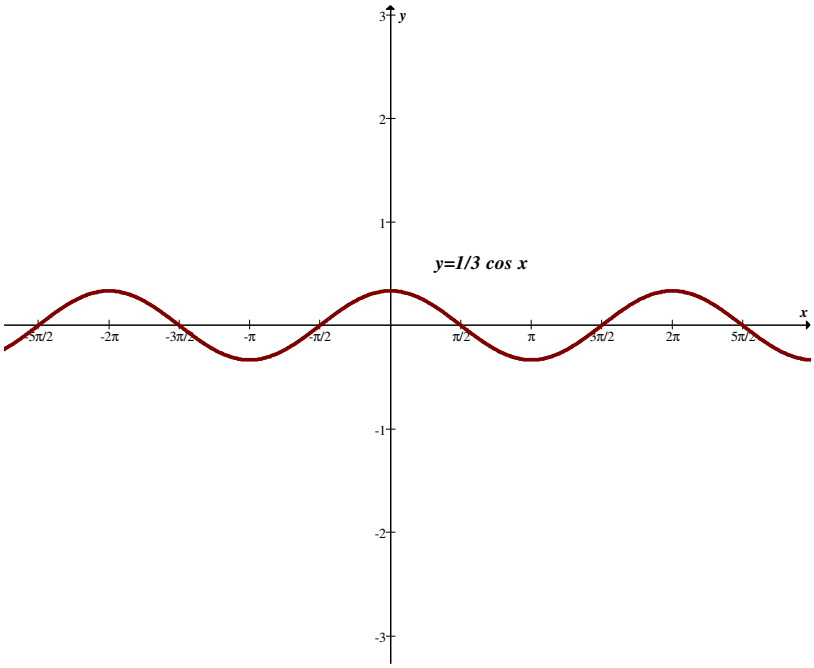
Periódica de período igual a 2π.



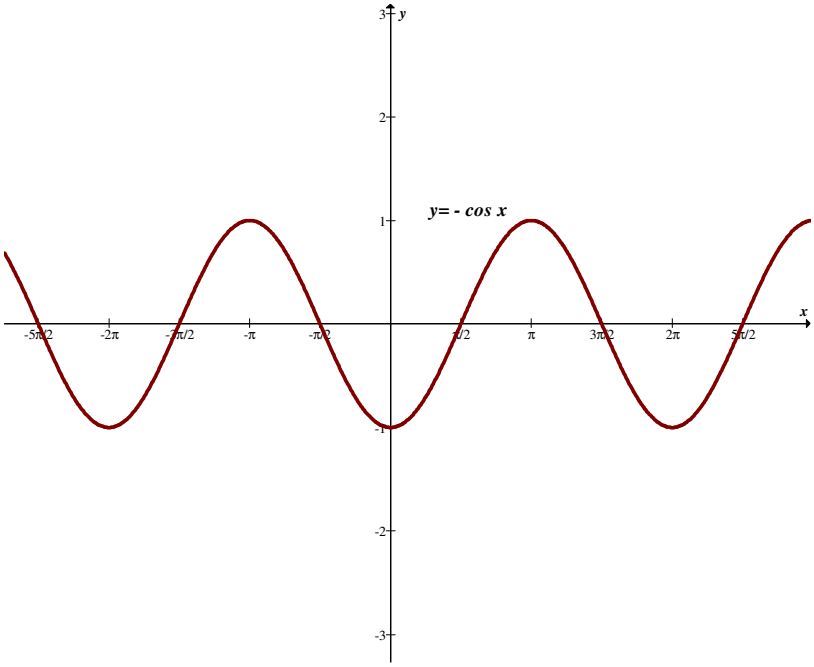
Periódica de período igual a 2π



Periódica de período igual a 2π .

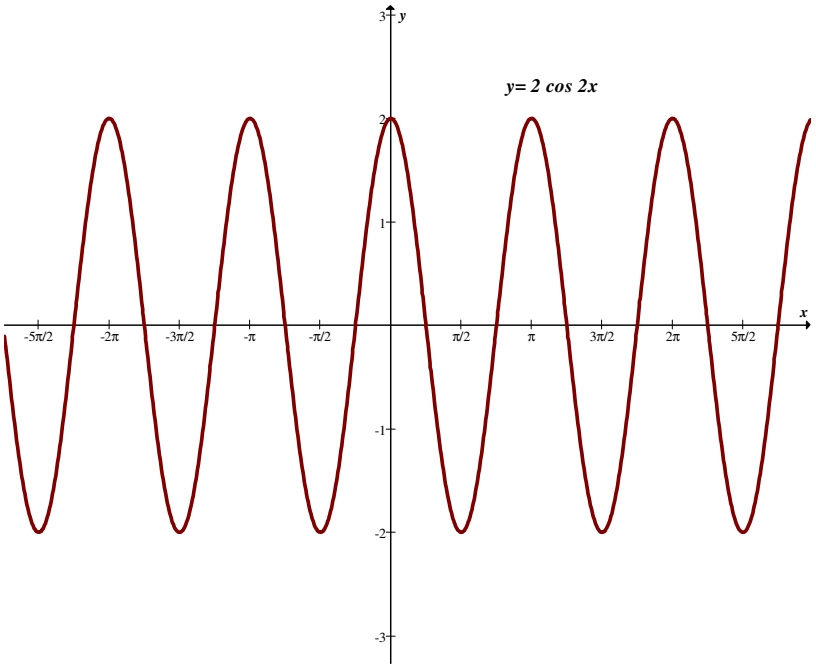


Periódica de período igual a 2π .

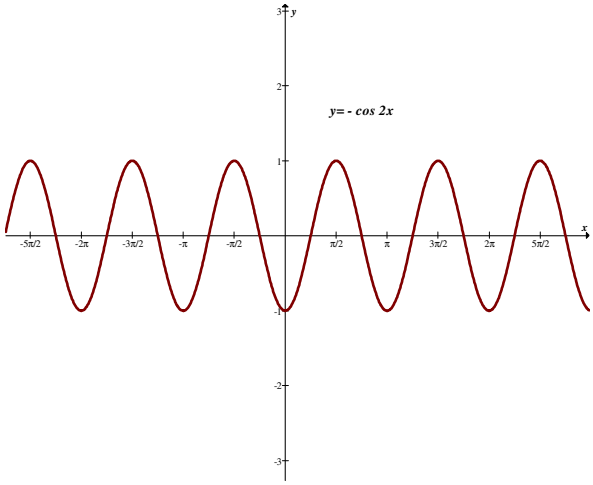


Periódica de período igual a 2π .

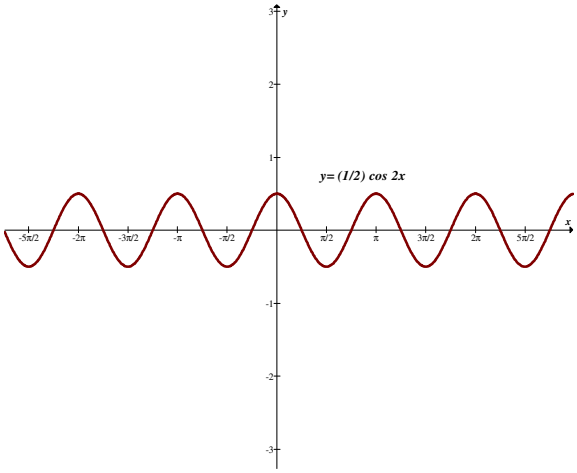
c) $y = k \cos 2x$



Periódica de período igual a π.

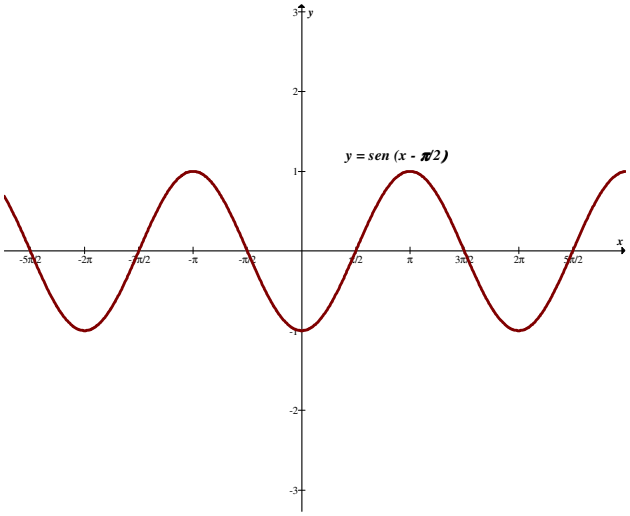


Periódica de período igual a π.



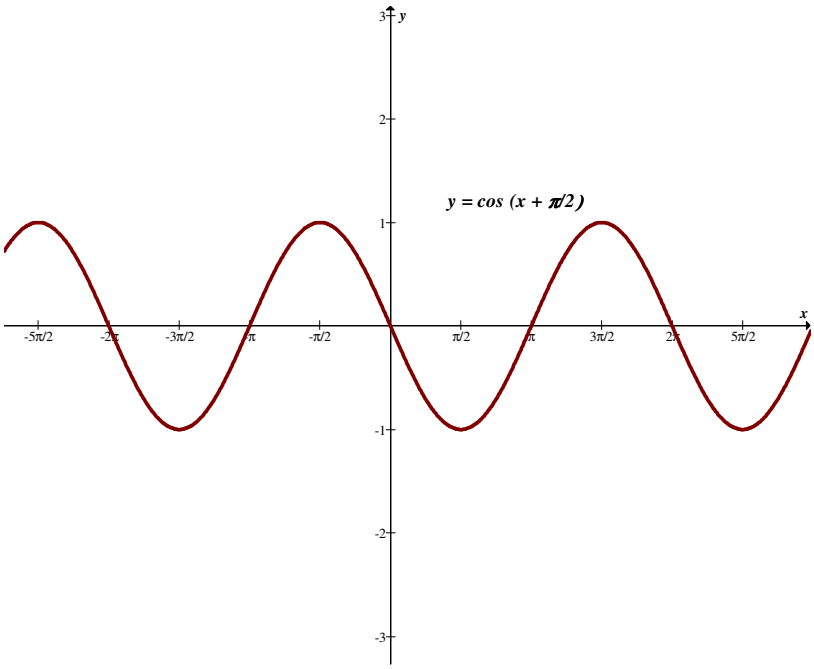
Periódica de período igual a π.

d) $y = sen(x - \pi/2)$



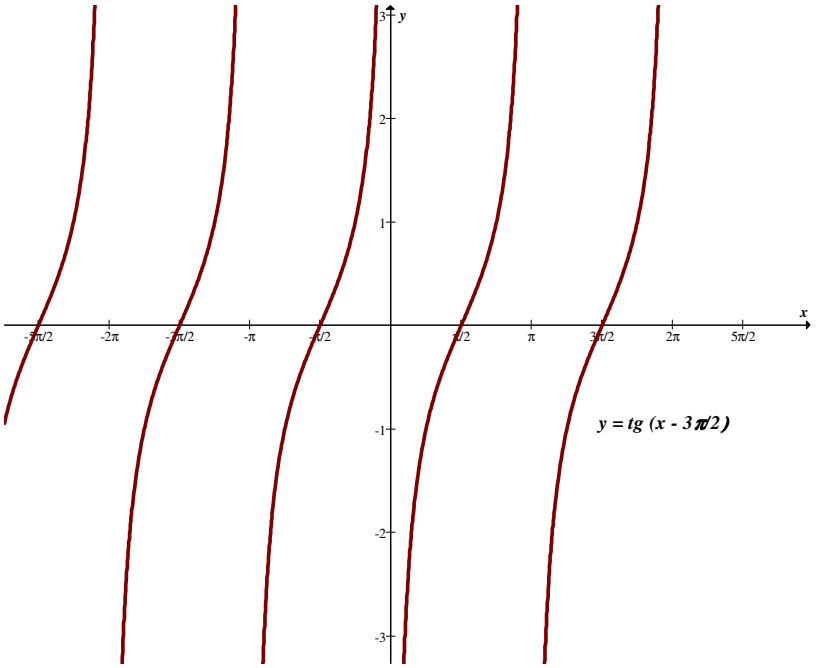
Periódica de período igual a 2π .

e) $y = \cos\left(x + \pi/2\right)$



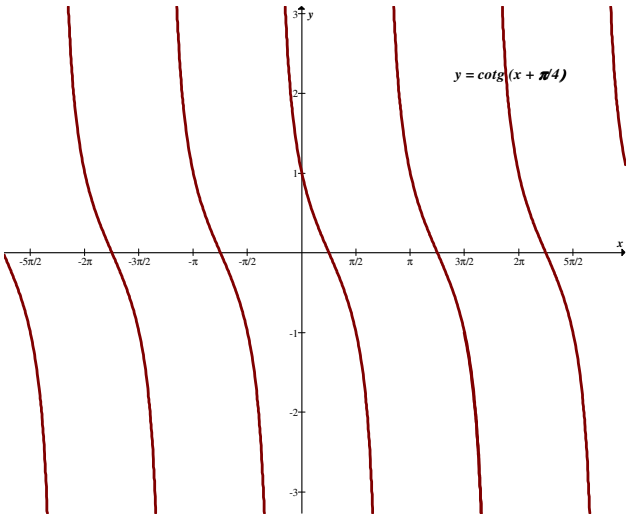
Periódica de período igual a 2π .

f) $y = tg\left(x - 3\pi/2\right)$



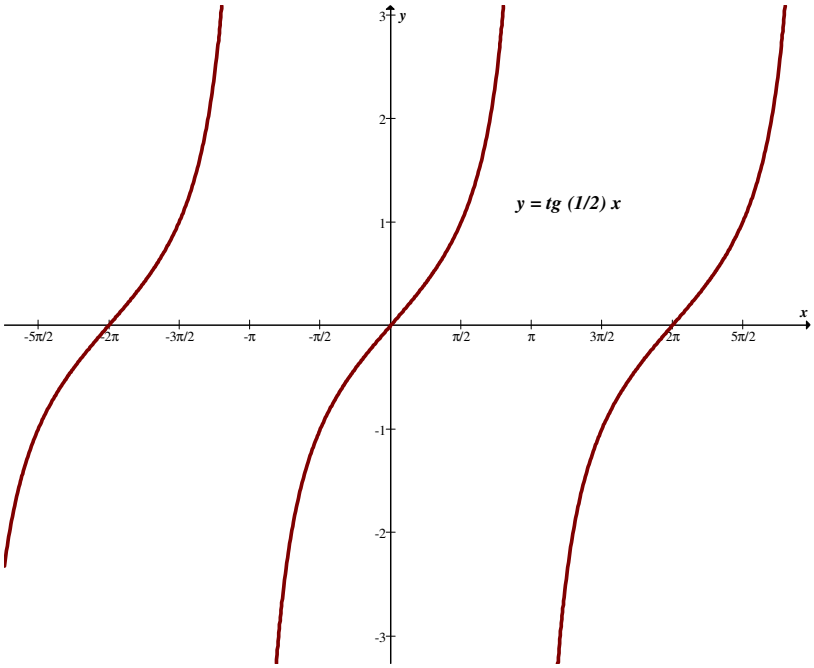
Periódica de período igual a π.

g) $y = \cot g\ (x + \pi/4)$



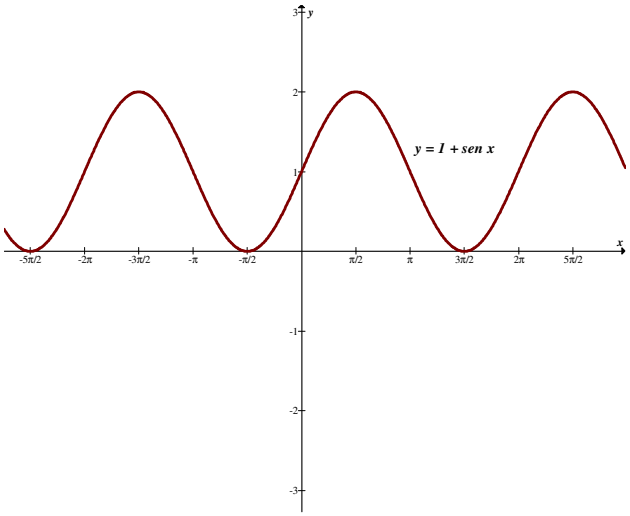
Periódica de período igual a π.

h) $y = tg\,\frac{1}{2}\,x$



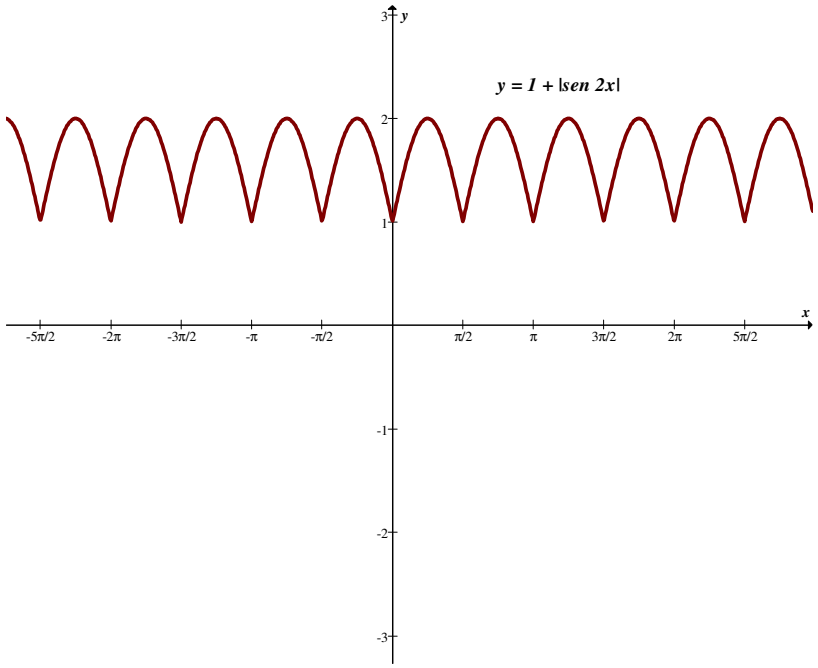
Periódica de período igual a 2π .

i) $y = 1 + sen\ x$



Periódica de período igual a 2π .

j) $y = 1 + |sen\ 2x|$



Periódica de período igual a $\pi/2$.

32. Dada a função $f(x) = 2\ sen\ hx - 3\ tg\ h\ x$, calcule $f(2)$, $f(-1)$ e $f(0)$

$$f(2) = 2\ sen\ h\ 2 - 3\ tg\ h\ 2$$
$$= 2\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) - 3.\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}\right)$$
$$= \frac{\left(e^2 - e^{-2}\right)\left(e^2 + e^{-2}\right) - 3\left(e^2 - e^{-2}\right)}{e^2 + e^{-2}}$$
$$= \frac{e^4 + 1 - 1 - e^{-4} - 3e^2 + 3e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}$$
$$= \frac{e^4 - e^{-4} - 3e^2 + 3e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}$$

$$f(-1) = 2\ sen\ h\ (-1) - 3\ tg\ h\ (-1)$$
$$= 2\left(\frac{e^{-1} - e^{+1}}{2}\right) - 3.\left(\frac{e^{-1} - e^{1}}{e^{-1} + e^{1}}\right)$$
$$= \frac{\left(e^{-1} - e\right)\left(e^{-1} + e\right) - 3\ e^{-1} + 3e}{e^{-1} + e}$$
$$= \frac{e^{-2} - e^2 - 3e^{-1} + 3e}{e^{-1} + e}$$

$$f(0) = 2\ sen\ h\ 0 - 3\ tg\ h\ 0$$
$$= 2\,\frac{e^0 - e^0}{2} - 3\,.\,\frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0}$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

33. Prove as identidades.

(a)

$$1 - tg\ h^2\ u = \sec h^2\ u$$
$$1 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\right)^2 = 1 - \frac{\left(e^u - e^{-u}\right)^2}{\left(e^u + e^{-u}\right)^2}$$
$$= \frac{\left(e^u + e^{-u}\right)^2 - \left(e^u - e^{-u}\right)^2}{\left(e^u + e^{-u}\right)^2}$$
$$= \frac{e^{2u} + 2e^0 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}}{\left(e^u + e^{-u}\right)^2}$$
$$= \frac{4}{\left(e^u + e^{-u}\right)^2} = \left(\frac{2}{e^u + e^{-u}}\right)^2 = \sec h^2\ u$$

(b)

$$1 - \cot\ g\ h^2\ u = -\cos\sec h^2\ u$$
$$1 - \frac{\left(e^u + e^{-u}\right)^2}{\left(e^u - e^{-u}\right)^2} = \frac{e^{2u} - 2 + e^{-2u} + e^{2u} - 2 - e^{-2u}}{\left(e^u - e^{-u}\right)^2}$$
$$= \frac{-4}{\left(e^u - e^{-u}\right)^2} = -\left(\frac{2}{e^u - e^{-u}}\right)^2 = -\cos\sec h^2\ u$$

34. Defina uma função inversa para $y = \cos h\ x$, para $x \le 0$. Esboce o gráfico.

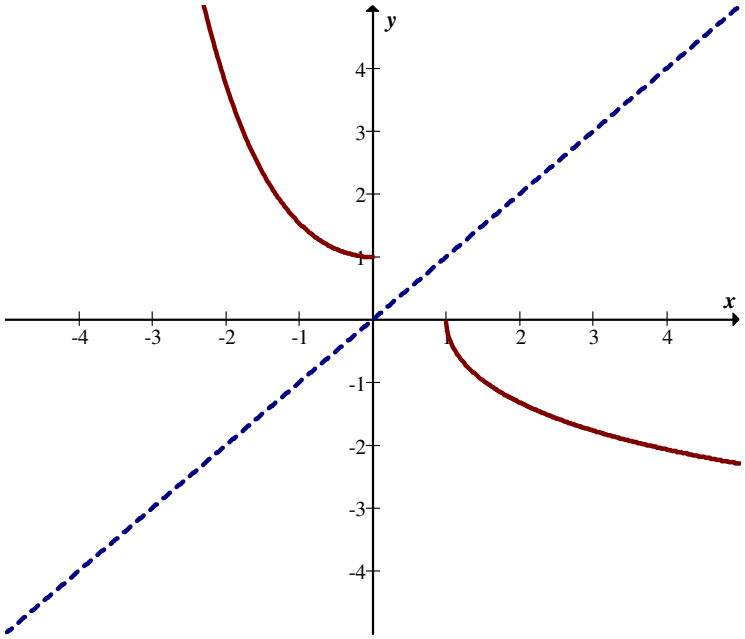
Temos $f : (-\infty, 0) \to [1, +\infty)$, $y = f(x) = \cosh x$. A sua inversa será uma função $f^{-1} : [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$.

Usando $x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, podemos escrever $e^y - 2x + e^{-y} = 0$ ou $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$.

Resolvendo esta equação obtemos

$e^y = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

Como $y \in (-\infty, 0)$, temos $0 < e^y < 1$. Portanto, usamos o sinal negativo, ou seja, $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Tomando o logaritmo natural, vem $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$. A figura que segue mostra o gráfico da função e da sua inversa no intervalo considerado.



35. Mostre a validade das expressões:

$a)$ arg cos $h\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1$,

Seja $y = \text{arg cos } h\ x, \quad x \geq 1$. Por definição temos que $x = \cos h\ y, \quad y \geq 0$ e

$x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad y \geq 0$

Podemos reescrever a última expressão como:

$$2x = e^y + e^{-y}$$

$$2x = \frac{e^{2y} + 1}{e^y}$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara vem:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad y \geq 0 \qquad (1)$$

Sabemos que $y \geq 0$ e $x \geq 1$, logo, $e^y \geq 1$
Quando

$x = 1 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$

$x > 1 \Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$

Portanto podemos desprezar o sinal $(-)$ em (1) e $arc\cos h\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1$

b) $\arg tg\ h\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$

Pela definição

$y = \arg tg\ h\, x \Leftrightarrow x = tg\ h\ y$.
Temos,

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$
$$x\left(e^y + e^{-y}\right) = e^y - e^{-y}$$
$$x\left(e^y + e^{-y}\right) = e^y - e^{-y}$$
$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$
$$e^{2y} - xe^{2y} = 1 + x$$
$$e^{2y}(1 - x) = 1 + x$$
$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$
$$2y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

com $-1 < x < 1$.

c) $\arg \sec h\, x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right),\ 0 < x \leq 1$.

Para $0 < x \leq 1$, $y = \arg \sec h\, x \Leftrightarrow x = \sec hy$.
Temos,

$$x = \sec h\ y$$

$$x = \frac{2}{e^{y} + e^{-y}}$$

$$xe^{y} + xe^{-y} = 2$$

$$xe^{2y} + x = 2e^{y}$$

$$xe^{2y} - 2e^{y} + x = 0$$

$$e^{y} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4x^{2}}}{2x}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - x^{2}}}{2x}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^{2}}}{x}$$

Como no exercício anterior consideramos só o sinal $+$. Tomando o logaritmo, vem

$$y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^{2}}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1 .$$

36. Sendo $f(x) = \cos h\ x$, mostrar que $f\left[\ln\left(x + \sqrt{x^{2} - 1}\right)\right] = x$.

$$f\left[\ln\left(x + \sqrt{x^{2} - 1}\right)\right] = \cos h\left[\ln\left(x + \sqrt{x^{2} - 1}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{\ln\left(x + \sqrt{x^{2} - 1}\right)} + e^{-\ln\left(x + \sqrt{x^{2} - 1}\right)}}{2}$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^{2} - 1} + \left(x + \sqrt{x^{2} - 1}\right)^{-1}}{2}$$

$$= \left(x + \sqrt{x^{2} - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^{2} - 1}}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^{2} + 2x\sqrt{x^{2} - 1} + x^{2} - 1 + 1}{x + \sqrt{x^{2} - 1}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2x\left(x\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{2}$$
$$= x$$

37. Mostre que as funções *senh x, tgh x, cotgh x e cosech x* são ímpares.

(i) $f(x) = senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

e

$$f(-x) = senh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x).$$

(ii) $f(x) = tghx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

e

$$f(-x) = tgh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x).$$

(iii) $f(x) = \cot ghx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

e

$$f(-x) = \cot gh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -f(x).$$

(iv) $f(x) = \cos echx = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

e

$$f(-x) = \cos ech(-x) = \frac{2}{e^{-x} - e^x} = -\frac{2}{e^x - e^{-x}} = -f(x).$$

38. Mostre que as funções *cosh x* e *sech x* são pares

(i) $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

e

$$f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x).$$

(ii) $f(x) = \sec hx = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

e

$$f(-x) = \sec h(-x) = \frac{2}{e^{-x} + e^{x}} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = f(x).$$

39. Analisar a função $f(x) = 24x - 3x^2$ e verificar a possibilidade de representar uma função receita total. Em caso afirmativo identifique a função demanda e responda:
(a) Qual a quantidade demandada quando o preço unitário é R$ 5,00?
(b) Qual é o preço do produto quando a receita é máxima?

A função receita é dada por $R = p \cdot q$ sendo p = preço e q = demanda. Supondo que x = preço, a função demanda é dada por $q = 24 - 3x$ sendo $f(x) = 24x - 3x^2$ a função receita total.

a)

$$p = 5 \quad \Rightarrow \quad q = 24 - 3 \cdot 5$$
$$q = 24 - 15$$
$$q = 9$$

b)

A função receita total é uma função do segundo grau e, portanto, o seu valor máximo está no seu vértice em x=4, ou seja, o preço de R$ 4,00.

40. As funções de demanda e oferta de um determinado produto no mercado são dadas por $q_d = 15 - 4p$ e $q_o = 6p - 1$, respectivamente.

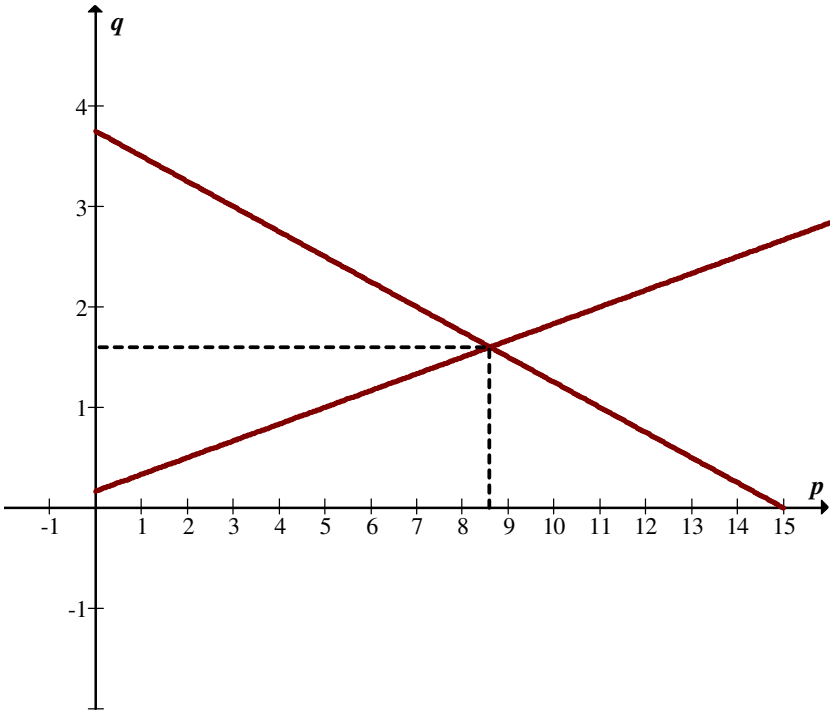
(a) Determine o preço de equilíbrio.
(b) Represente graficamente as funções demanda e oferta, mostrando o ponto de equilíbrio. Esboce os dois gráficos juntos.

a) O preço de equilíbrio é dado por:

$$q_d = q_0$$
$$15 - 4p = 6p - 1$$
$$4p - 6p = -1 - 15$$
$$10p = 16$$
$$p = 1{,}6$$

ou seja 1,6 unidades monetárias.

b) A Figura que segue apresenta o gráfico solicitado.



41. Uma imobiliária cobra uma comissão de 12% do valor da venda de um imóvel mais $R\$25{,}00$ fixo para as despesas de correio e divulgação. Denote por x o valor do imóvel (em reais) e por $f(x)$ o valor cobrado pela imobiliária.

(a) Descreva a função $f(x)$.

(b) Qual o valor recebido pela imobiliária na venda de um imóvel por $R\$185.000{,}00$?

(a) Considerando:

- x = valor do imóvel
- $f(x)$ = valor cobrado pela imobiliária

temos: $f(x) = \frac{3}{25}x + 25$.

(b) $f(185.000) = \frac{3}{25} \cdot 185.000 + 25 = 22.225$ ou seja R$ 22.225,00.

42. O preço de venda de um produto é de $R\$27{,}00$. A venda de 100 unidades dá um lucro de $R\$260{,}00$. Sabendo-se que o custo fixo de produção é de $R\$540{,}00$ e que o custo variável é proporcional ao número de unidades produzidas, determine:

(a) A função receita total.

(b) O custo variável, para uma produção de 2.000 unidades.

(d) A produção necessária para um lucro de $R\$23.460{,}00$.

(a) A função receita é dada por $R(q) = 27 \,.\, q$

(b) Temos que a função lucro é dada por
$L = R(q) - C_t(q)$
sendo que $C_t(q) = 540 + C_v q$. Assim,
$L = 27q - (540 + C_v q)$
$= 27q - C_v q - 540$

Considerando-se que $L(100) = 260$ vem:
$260 = 27.100 - C_v \cdot 100 - 540$
$100\, C_v = 2700 - 540 - 260$
$C_v = 19$

Assim o custo variável de uma unidade é dado por R$ 19,00 e a função custo variável é dada por $C_v(q) = 19 \,.\, q$. Temos, $C_v(2000) = 19 \,.\, 2000 = 38\,000$, ou seja, R$38.000,00.

(c)
$L(q) = 8q - 540$
$23460 = 8q - 540$
$8q = 23460 + 540$
$q = \dfrac{24\,000}{8}$
$q = 3\,000$

(43) Uma indústria comercializa um certo produto e tem uma função custo total, dada por $C(x) = x^2 + 20x + 700$, sendo *x* o número de unidades produzidas. A função receita total é dada por $R(x) = 200x$. Determine:

(a) O lucro para a venda de 100 unidades.
(b) Em que valor de *x* acontecerá o lucro máximo?

(a)
$L(x) = R(x) - C(x)$
$= 200x - x^2 - 20x - 700$
$= -x^2 + 180x - 700$

$L(100) = -10\,000 + 18\,000 - 700$
$= 7300$

ou seja $R\$\ 7.300{,}00$.

(b) A função lucro é uma função do segundo grau, assim o seu valor máximo encontra-se no seu vértice, ou seja, em x=90.

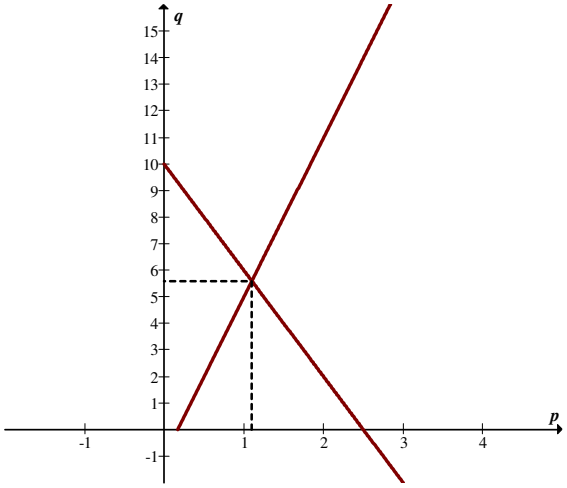
(44) Determinar graficamente a algebricamente o equilíbrio do mercado considerando as seguintes funções de demanda e oferta:

(a) $\begin{cases} Q_d = 10 - 4P \\ Q_s = 6P - 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} Q_d = 4 - P^2 \\ Q_s = 4P - 1 \end{cases}$

(a) Temos:

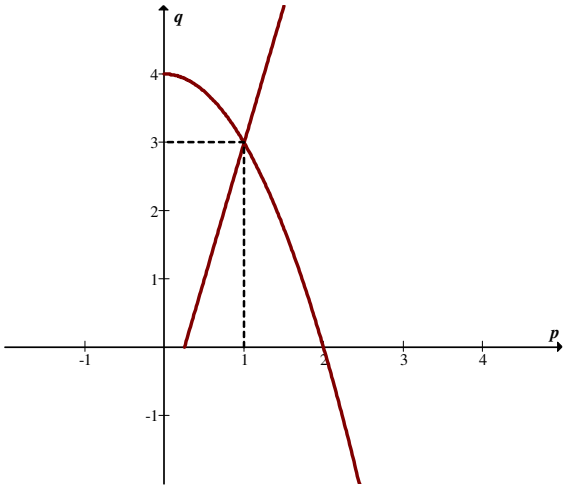
$$10 - 4P = 6P - 1$$
$$11 = 10P$$
$$P = 1{,}1$$

O gráfico que segue apresenta a solução gráfica. Observe que é indiferente para a solução gráfica a posição das variáveis no sistema de eixos.



b)

$$4 - p^2 = 4p - 1$$
$$p^2 + 4p - 5 = 0$$
$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$
$$p = 1$$



(45) Uma caixa sem tampa na forma de um paralelepípedo tem um volume de $10cm^3$. O comprimento da base é o dobro da largura. O material da base custa R$ 2,00 por m^2 ao passo que o material das laterais custa R$ 0,02 por m^2. Expressar o custo total do material em função da largura da base.

Seja x a largura da base e h a altura da caixa. Temos,

$$V = x \times 2x \times h = 10\ cm^3$$

$$2x^2 h = 10$$

$$h = \frac{5}{x^2}$$

$$C_t = 2 \times x \times 2x + 0{,}02\left(2xh + 2 \cdot 2x \cdot h\right)$$

$$= 4x^2 + 0{,}02 \cdot 6\ xh$$

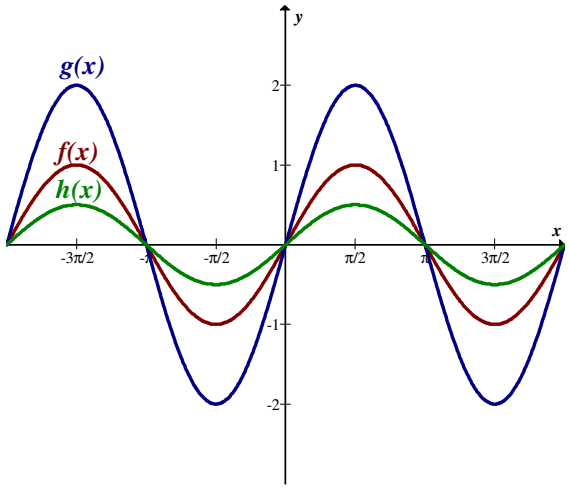
$$= 4x^2 + 0{,}12\ x \cdot \frac{5}{x^2}$$

$$C_t = 4x^2 + \frac{6}{10x}.$$

(46) Traçar o gráfico das funções trigonométricas. Comparar cada conjunto identificando a transformação ocorrida. Identificar domínio, conjunto imagem, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento.

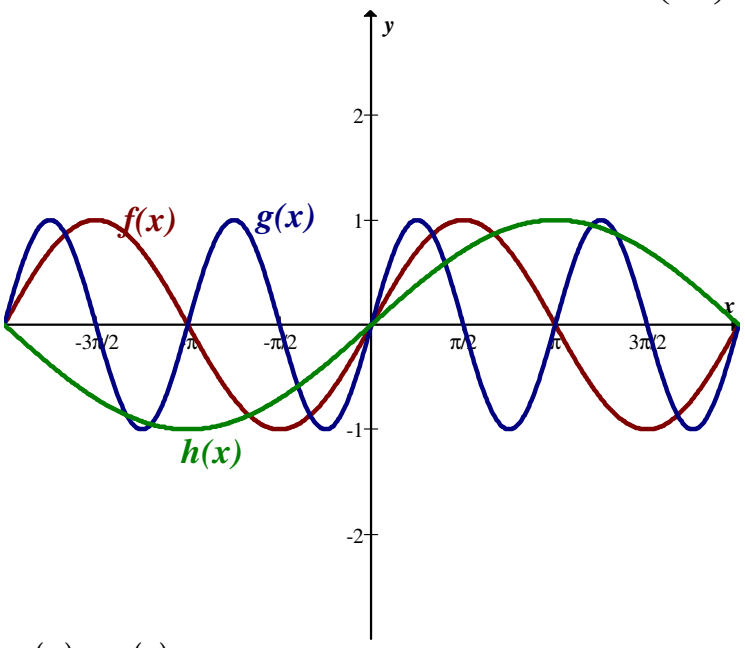
(a) $f(x) = sen\ x$ $\qquad$ $g(x) = 2\ sen\ x$ $\qquad$ $h(x) = \frac{1}{2} sen\ x$

Os gráficos foram traçados no mesmo sistema de eixo para otimizar a visualização.



- $D(f) = D(g) = D(h)$.
- $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ $\text{Im}(g) = [-2, 2]$ $\text{Im}(h) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- As funções assumem valores máximos e mínimos em pontos com x coincidentes.
- Os intervalos de crescimento e decrescimento coincidem.
- De f para g houve uma expansão vertical e de f para h uma contração vertical.

(b) $f(x) = sen\ x$ $g(x) = sen\ 2x$ $h(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$



- $D(f) = D(g) = D(h)$
- $\text{Im}(f) = \text{Im}(g) = \text{Im}(h)$
- Pontos de máximo:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$$

$$g(x)=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$$

$$h(x)=\pi+4k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$$

- Pontos de mínimo:

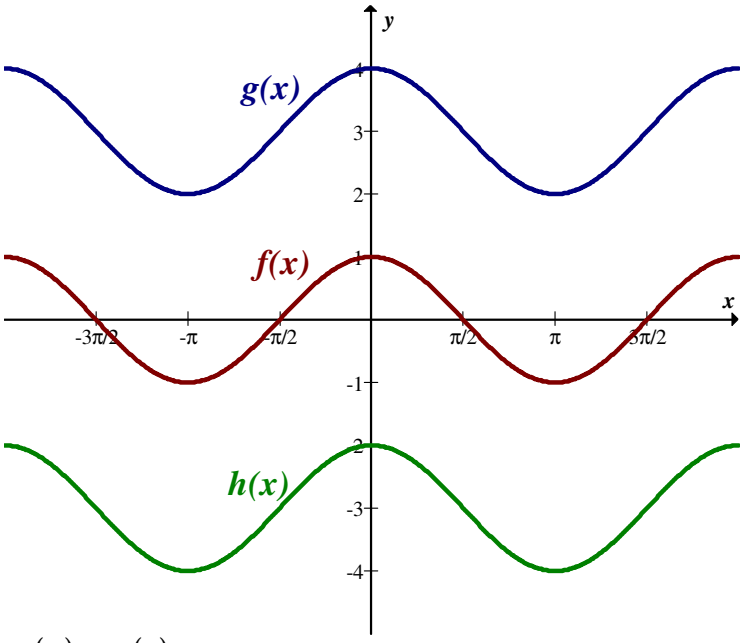
$$f(x)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$$

$$g(x)=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$$

$$h(x)=-\pi+4k\pi,\ k\in \mathrm{Z}$$

- Intervalos de crescimento e decrescimento
- f : Crescimento em $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]k\in \mathrm{Z}$ e decrescimento em $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]k\in \mathrm{Z}.$
- g : Crescimento em $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right]k\in \mathrm{Z}$ e decrescimento em $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right]k\in \mathrm{Z}.$
- h : Crescimento em $[-\pi+4k\pi,\pi+4k\pi]k\in \mathrm{Z}$ decrescimento em $[\pi+4k\pi,3\pi+4k\pi]k\in \mathrm{Z}.$

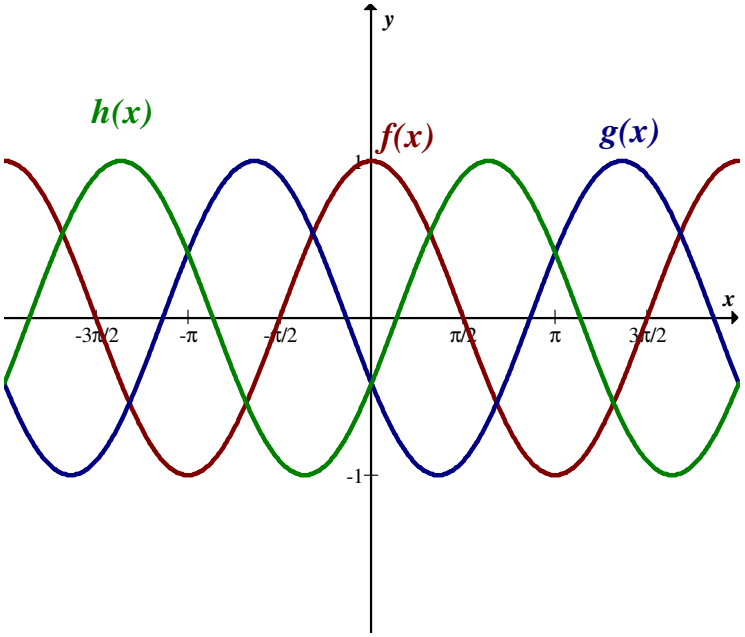
(c) $f(x)=\cos x$ $\quad g(x)=\cos x+3$ $\quad h(x)=\cos x-3$



- $D(f) = D(g) = D(h)$.

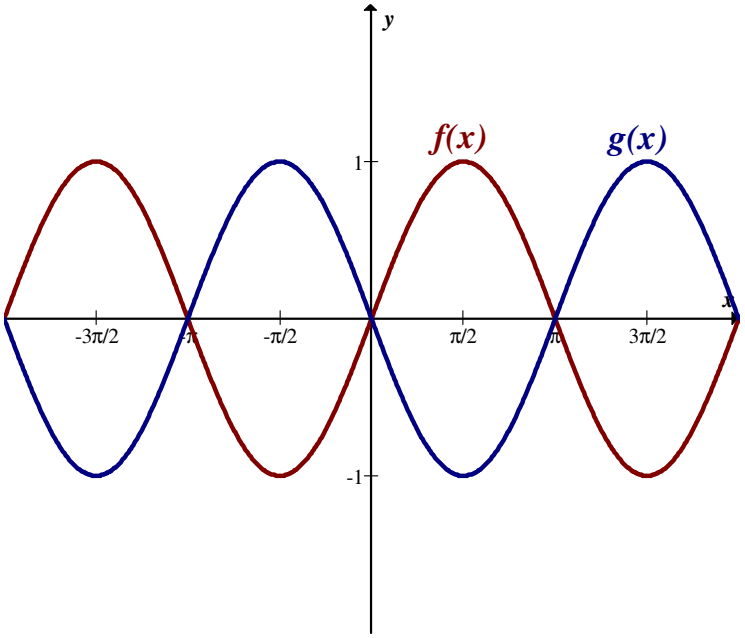
- $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ $\text{Im}(g) = [2, 4]$ $\text{Im}(g) = [-4, -2]$.
- De f para g houve um deslocamento vertical para cima e de f para h houve um deslocamento vertical para baixo.
- Os pontos de máximo e mínimo coincidem para f, g e h, bem como os intervalos de crescimento e de decrescimento.

(d) $f(x) = \cos x$ $g(x) = \cos(x+2)$ $h(x) = \cos(x-2)$



- $D(f) = D(g) = D(h)$.
- $\text{Im}(f) = \text{Im}(g) = \text{Im}(h)$.
- De f para g: deslocamento horizontal para a esquerda.
- De f para h: deslocamento horizontal para a direita.
- Pontos de máximos:
  $f(x)$: $2k\pi, k \in \text{Z}$
  $g(x)$: $-2 + 2k\pi, k \in \text{Z}$
  $h(x)$: $2 + 2k\pi, k \in \text{Z}$
- Pontos de mínimos:
  $f(x)$: $\pi + 2k\pi, k \in \text{Z}$
  $g(x)$: $\pi - 2 + 2k\pi, k \in \text{Z}$
  $h(x)$: $\pi + 2 + 2k\pi, k \in \text{Z}$
- Intervalos de crescimento:
  $f(x)$: $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], k \in \text{Z}$
  $g(x)$: $[\pi - 2 + 2k\pi, 2\pi - 2 + 2k\pi], k \in \text{Z}$
  $h(x)$: $[\pi + 2 + 2k\pi, 2\pi + 2 + 2k\pi], k \in \text{Z}$
- Intervalos de decrescimento:
  $f(x)$: $[2k\pi, \pi + 2k\pi]\, k \in \text{Z}$
  $g(x)$: $[-2 + 2k\pi, \pi - 2 + 2k\pi]\, k \in \text{Z}$
  $h(x)$: $[2 + 2k\pi, \pi + 2 + 2k\pi]\, k \in \text{Z}$

e) $f(x) = sen\ x$ $\quad\quad$ $g(x) = -sen\ x$



- $D(f)=D(g)$.
- $\text{Im}(f)=\text{Im}(g)=[-1,1]$.
- De f para g: reflexão em torno do eixo dos x.
- Pontos de máximo:

  $f(x):\frac{\pi}{2}+2k\pi$

  $g(x):\frac{3\pi}{2}+2k\pi$
- Pontos de mínimo:

  $f(x):\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

  $g(x):\frac{\pi}{2}+2k\pi$
- Intervalos de crescimento:

  $f(x):\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right], k\in \text{Z}$

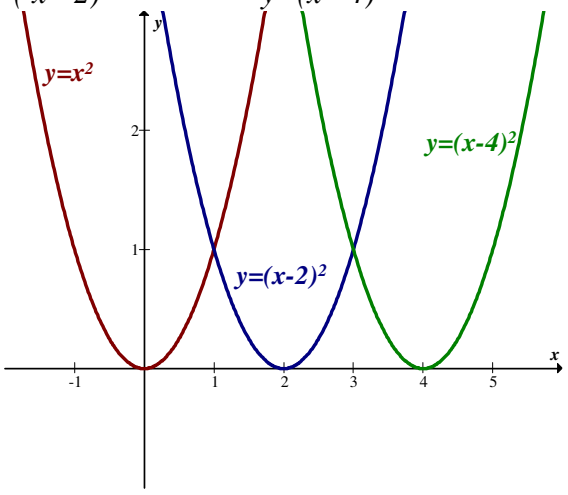
  $g(x):\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right], k\in \text{Z}$
- Intervalos de decrescimento

  $f(x):\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right], k\in \text{Z}$

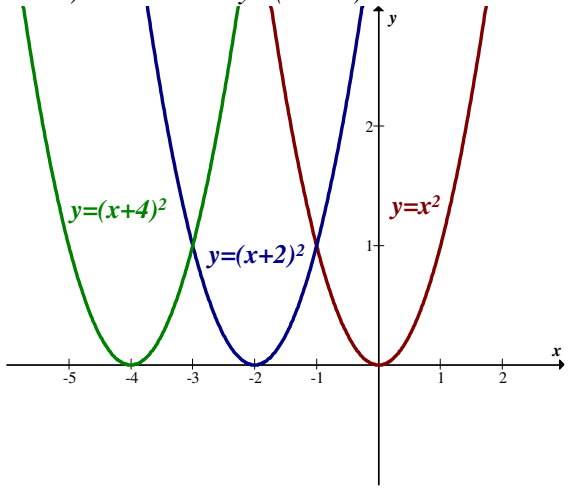
  $g(x):\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right], k\in \text{Z}.$

47. Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela, o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:
Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirma sobre o gráfico de $g(x)=f(x-a)$ quando a>0? E quando a<0?

(a) $y=x^2$ $y=(x-2)^2$ $y=(x-4)^2$



(b) $y= x^2$ $y=(x + 2)^2$ $y=(x + 4)^2$

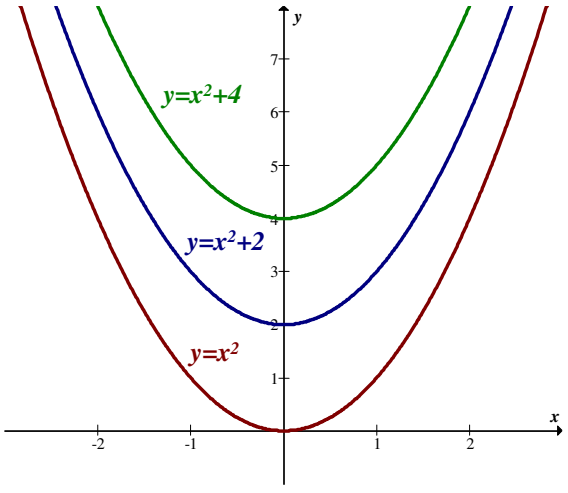


Conclusão:

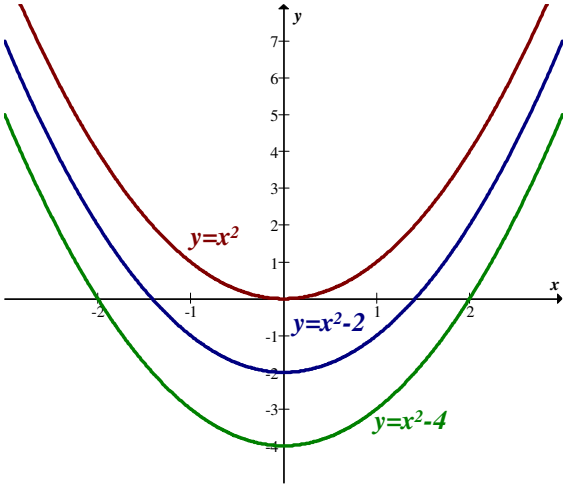
- Quando $a>0$ o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se *a* unidades para a direita.
- Quando o $a<0$, o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se *a* unidades para a esquerda.

48. Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela, o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:
Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirmar sobre o gráfico de $g(x)=f(x)+a$, quando a>0? E quando a<0?

(a) $y = x^2$ $y = x^2 + 2$ $y = x^2 + 4$



(b) $y = x^2$ $y = x^2 - 2$ $y = x^2 - 4$

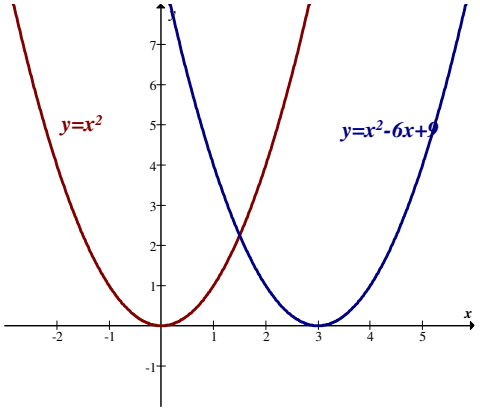


Conclusão:

- Quando $a < 0$, o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se verticalmente *a* unidades para baixo.
- Quando $a > 0$, o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se verticalmente *a* unidades para cima.

49. Identifique algebricamente as transformações realizadas na parábola "mãe" $f(x) = x^2$, para obter as seguintes funções quadráticas. A seguir, trace o gráfico e compare os resultados.

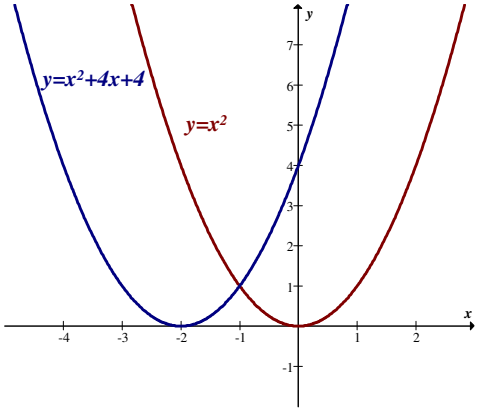
(a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$



$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$
$$= (x-3)^2$$

Deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita.

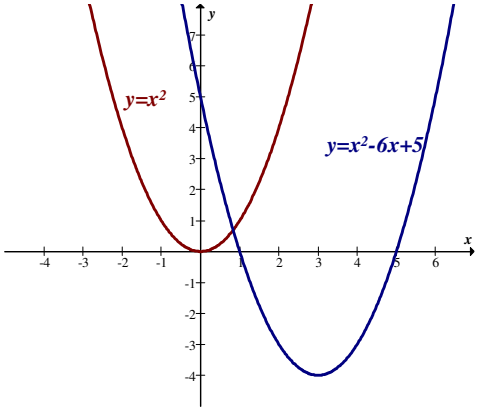
(b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$



$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$
$$= (x+2)^2$$

Deslocamento horizontal de 2 unidades para a esquerda.

(c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$



$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$= x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5$$
$$= (x-3)^2 - 4$$

Deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita e deslocamento vertical de 4 unidades para baixo.

50. Determine algebricamente a função inversa. A seguir, numa mesma janela, trace o gráfico de cada função, de sua inversa e da função identidade.

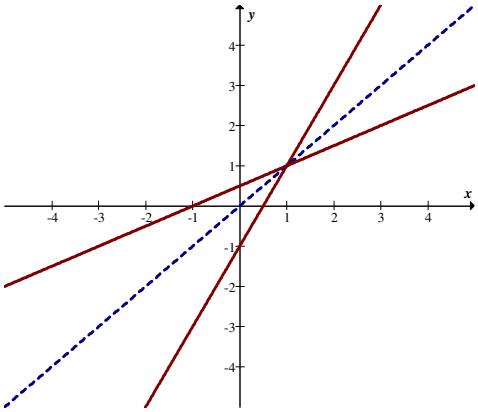
(a) $y = 2x - 1$

$y = 2x - 1$

$2x = y + 1$

$x = \frac{1}{2}(y + 1)$

Assim, temos: $y = \frac{1}{2}(x + 1)$

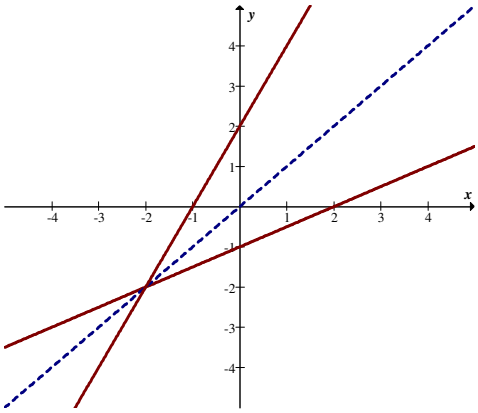


(b) $y = \frac{x}{2} - 1$

$\frac{x}{2} = y + 1$

$x = 2y + 2$

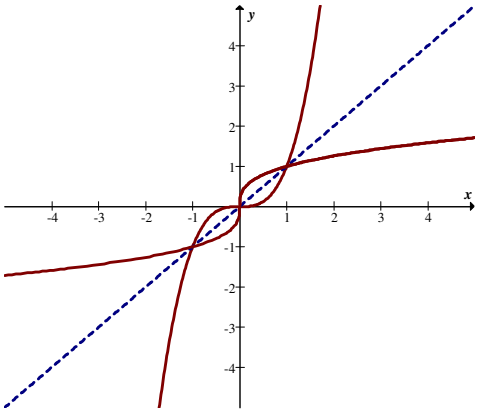
Assim, temos: $y = 2x + 2$



(c) $y = x^3$

$x = \sqrt[3]{y}$

Assim, temos: $y = \sqrt[3]{x}$



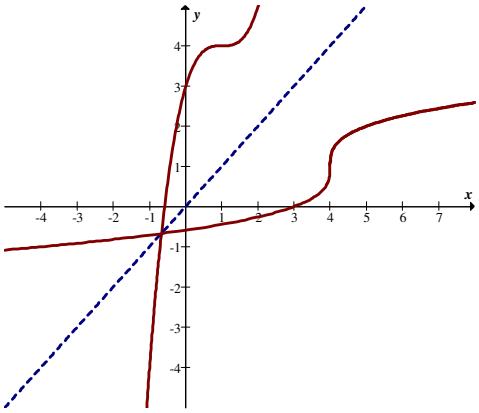
(d) $y = (x-1)^3 + 4$

$(x-1)^3 = y - 4$

$x - 1 = \sqrt[3]{y-4}$

$x = 1 + \sqrt[3]{y-4}$

Assim, temos: $y = 1 + \sqrt[3]{x-4}$



51. Para cada uma das funções, se necessário, restrinja o domínio e o contradomínio e determine a inversa.

(a) $y = x^2$

(b) $y = x^2 - 2x + 1$

(c) $y = 2x^2 - 6x - 10$

(d) $y = e^x$

(a) $y = x^2 \qquad [0, +\infty)$

$x = \sqrt{y}, \; y \geq 0$

Portanto, $y = \sqrt{x}$.

(b)

$y = x^2 - 2x + 1$

$= (x-1)^2,\ x \in [1, +\infty)$

$(x-1) = \sqrt{y},\ y \geq 0$

$x = 1 + \sqrt{y}$

Portanto, $y = 1 + \sqrt{x}$.

(c)

$y = 2x^2 - 6x - 10$

$= 2\left(x^2 - 3x - 5\right)$

$= 2\left(x^2 - 2.\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} - 10$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$

$y + \frac{29}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

$\frac{y}{2} + \frac{29}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{y}{2} + \frac{29}{4}}$

$x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{y}{2} + \frac{29}{4}}$

Portanto, $y = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{29}{4}}$.

(d) $y = e^x \quad \Leftrightarrow \ln y = x$

$y = \ln x, \quad x > 0$

52. A locadora A aluga um carro popular ao preço de R$ 30,00 a diária, mais R$ 0,20 por quilômetro rodado. A locadora B o faz por R$ 40,00 a diária, mais R$ 0,10 por quilômetro rodado. Qual locadora você escolheria, se pretendesse alugar um carro por um dia e pagar o menos possível? Justifique algebricamente e graficamente.
Algebricamente:

$P_A = 30 + 0{,}2\,x$

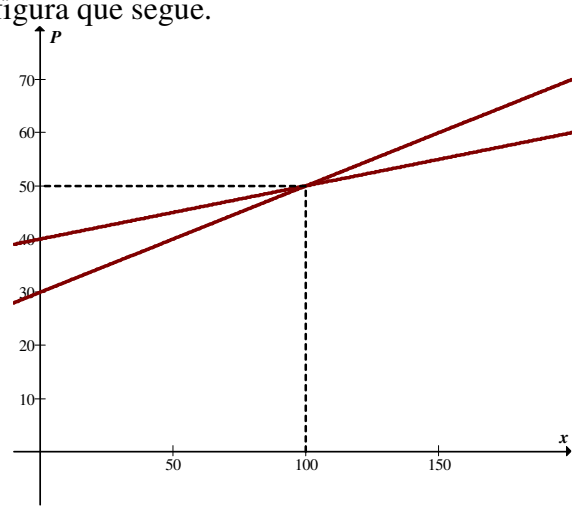
$P_B = 40 + 0{,}1\,x$

sendo x = n° km rodados e P = preço.

$$P_A \geq P_B$$
$$30 + 0{,}2\,x \geq 40 + 0{,}1\,x$$
$$0{,}1\,x \geq 10$$
$$x \geq 100$$

Se pretendo me deslocar mais de 100 *km,* devo escolher a locadora B e, em caso contrário, a locadora A.

Graficamente temos a figura que segue.



53. Dentre todos os retângulos de perímetro igual a 80 cm, quais as dimensões do retângulo de área máxima?

Seja o retângulo de dimensões x e w com perímetro (2P) igual a 80 cm. Temos então que:

$2P = 2x + 2w$

$40 = x + w$

$w = 40 - x$

Considerando a área A

$A = x\,w$

$= (40 - x)\,x$

$= -x^2 + 40\,x$

Estamos assim diante de uma função do segundo grau. O ponto de máximo está no seu vértice, ou seja, em *x=20*. Portanto, o valor de w é 20 e, nesse caso, estamos diante de um quadrado de lado igual a 20 cm.

54. Para medir a temperatura são usados graus Celsius (^{0}C) ou graus Fahrenheit (^{0}F). Ambos os valores $0\,^0$C e $32\,^0$F representam a temperatura em que a água congela e ambos os valores $100\,^0$C e $212\,^0$F representam a temperatura de fervura da água. Suponha que a relação entre as temperaturas expressas nas duas escalas pode ser representada por uma reta.

(a) Determine a função do primeiro grau F(c) que dá a temperatura em ^{0}F, quando ela é conhecida em ^{0}C.

Vamos considerar a função como do tipo $F = aC + b$, sendo F a temperatura em graus Fahrenheit e C a temperatura em graus Celsius.

Temos as seguintes relações:

$C = 0 \Rightarrow F = 32$

$C = 100 \Rightarrow F = 212$

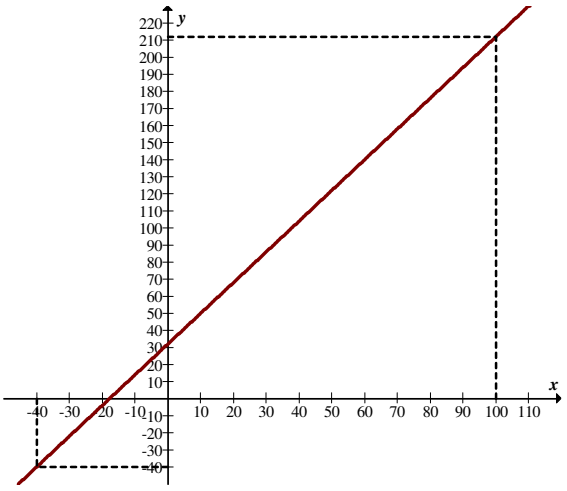
Assim podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 32 = 0\,a + b \\ 212 = a\,100 + b \end{cases}$$

para achar os parâmetros *a* e *b*.

Resolvendo o sistema encontramos $b = 32$ e $a = 1{,}8$. Dessa forma, a função é dada por $F = 1{,}8C + 32$ ou $y = 1{,}8x + 32$, sendo x a temperatura em graus Celsius e y a temperatura em graus Fahrenheit.

(b) Esboce o gráfico de F.



(c) Qual a temperatura em ^{0}F que corresponde a 25 ^{0}C?

$$y = 1{,}8 \cdot 25 + 32$$
$$y = 77°F$$

(d) Existe alguma temperatura que tem o mesmo valor numérico em ^{0}C e em ^{0}F?

$$x = 1{,}8x + 32$$
$$-32 = 1{,}8x - x$$
$$0{,}8x = -32$$
$$x = \frac{-32}{0{,}8}$$
$$x = -40^o F$$

55. Numa dada cidade a população atual é de 380.000 habitantes. Se a população apresenta uma taxa de crescimento anual de 1,5%, estime o tempo necessário para a população duplicar. Use um modelo de crescimento exponencial.

$$P = P_0\, i^t$$
$$2 \cdot 380\,000 = 380\,000 \cdot 1{,}015^t$$
$$2 = 1{,}015^t$$
$$\ln 2 = t \ln 1{,}015$$
$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}015}$$
$$t = 46{,}55$$
$$t \cong 47 \; anos$$

56. Uma criança tem um montante fixo M=R$180,00 para comprar latinhas de refrigerantes e cachorros quentes para sua festa de aniversário. Suponha que cada latinha de refrigerante custe R$1,20 e cada cachorro quente R$1,50.

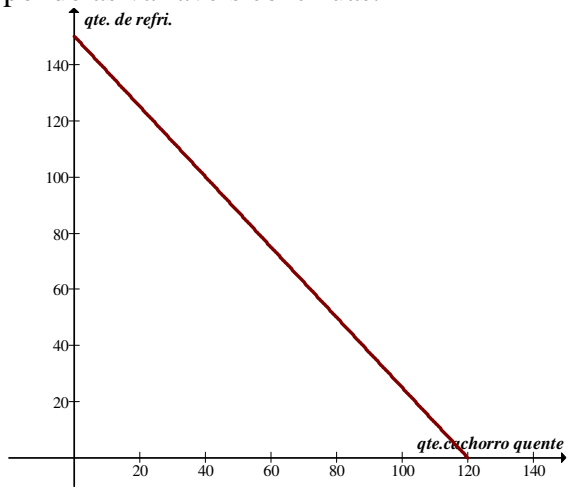
(a) Obtenha a equação de restrição orçamentária.

Seja p_1 = preço refrigerante
p_2 = preço cachorro-quente
q_1 = quantidade de refrigerante
q_2 = quantidade de cachorro-quente
Podemos escrever a equação

$q_1 p_1 + q_2 p_2 = M$

$1{,}2\ q_1 + 1{,}5\ q_2 = 180$

(b) Esboce o gráfico, supondo as variáveis contínuas.



(c) Se a criança optar por usar todo seu orçamento comprando somente cachorros quentes, estime o número de cachorros quentes que podem ser comprados.

$1{,}5\ q_2 = 180 - 1{,}2\ q_1$

$$q_2 = \frac{180}{1{,}5} - \frac{1{,}2}{1{,}5}\ q_1$$

$q_2 = 120 - 0{,}8\ q_1$

$q_2 = 120 - 0{,}8 \cdot 0 = 120$

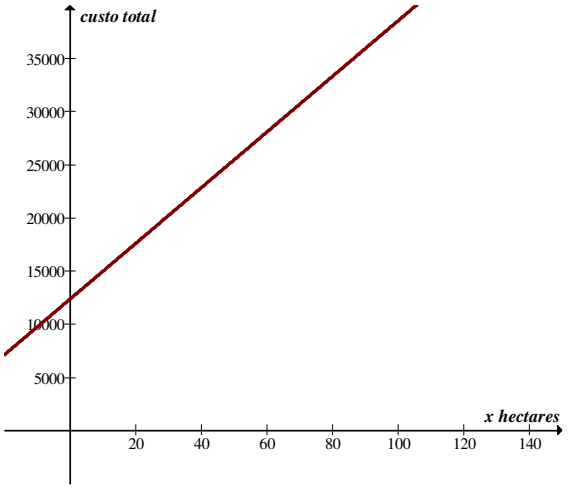
57. O custo total de uma plantação de soja é função, em geral, da área cultivada. Uma parcela do custo é aproximadamente constante (custos fixos) e diz respeito a benfeitorias e equipamentos necessários. A outra parcela diz respeito aos custos dos insumos e mão-de-obra, e depende da área plantada (custos variáveis). Supor que os custos fixos sejam de R$ 12.400,00 e os custos variáveis sejam de R$ 262,00 por hectare.

(a) Determinar o custo total da plantação em função do número de hectares plantado.

$C_T = 12\,400 + 262x$

sendo x = número de hectares plantados.

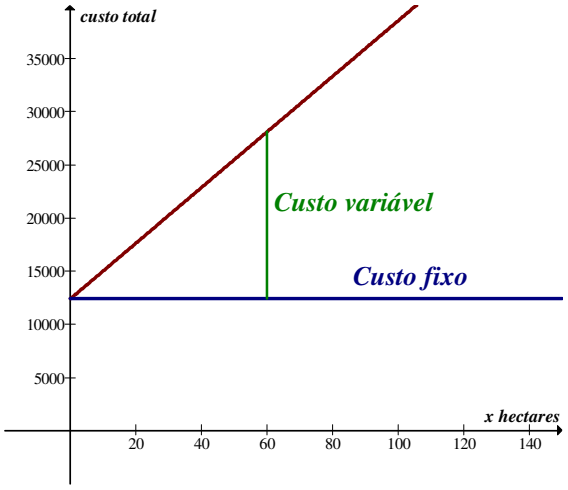
(b) Fazer um esboço do gráfico da função custo total.



(c) Como podemos visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico?

O custo fixo é o ponto onde a reta corta o eixo dos y.

O custo variável é dado pelo comprimento do segmento vertical entre a reta que representa o custo total e a reta horizontal, que representa o custo fixo.



58. A meia-vida do rádio-226 é de 1620 anos.

(a) obter o modelo de decaimento exponencial para essa substância.

O modelo de decaimento exponencial é dado por $M = M_0\, e^{-kt}$, sendo que para o presente problema temos $t = 1620 \quad e \quad M = \dfrac{M_0}{2}$. Assim:

$$\frac{M_0}{2} = M_0\, e^{-k\cdot 1620}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k\,.1620$$

$$\frac{-\ln 2}{-1620} = k$$

$$k = 0,000\,4279$$

Logo, $M = M_0\, e^{-0,000\,4279\,t}$

(b) Após 700 anos, qual o percentual de uma dada quantidade inicial de rádio que ainda resta?

$$M = M_0\, e^{-0,000\,4279\times 700}$$

$$M \cong 0,74\, M_0$$

Resposta: 74 %

59. Uma certa substância radioativa decai exponencialmente sendo que, após 100 anos, ainda restam 60% da quantidade inicial.

(a) Obter o modelo de decaimento exponencial para essa substância.

$$M = M_0\, e^{-kt}$$

$$0,6\, M_0 = M_0\, e^{-100k}$$

$$\ln 0,6 = -100k$$

$$-0,510825 = -100k$$

$$k = 0,005108$$

Logo, $M = M_0\, e^{-0,005108\,t}$

(b) Determinar a sua meia-vida.

$$\frac{M_0}{2} = M_0\, e^{-0,005108\,t}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\,0,005108\,t$$

$$t \cong 135,7\ anos$$

(c) Determinar o tempo necessário para que reste somente 15 % de uma dada massa inicial.

$$0,15\, M_0 = M_0\, e^{-0,005108\,t}$$

$$\ln 0,15 = -\,0,005108\,t$$

$$t \cong 371,4\ anos$$

3.10 – EXERCÍCIO – pg. 83

1 – Para cada uma das seguintes funções, ache $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$:

(a) $f(x)=3x^2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+6)}{x-2}=12$$

(b) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{2x}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{-1}{4}$$

(c) $f(x)=\frac{2}{3}x^2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)}{x-2}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

(d) $f(x)=3x^2+5x-1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+5x-1-21}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+5x-22}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+11)}{x-2}=17$$

(e) $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $x\neq -1$

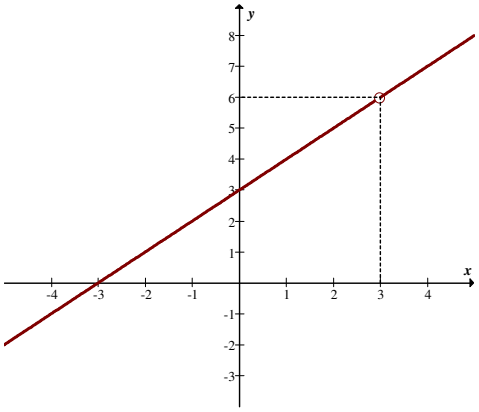
$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3-x-1}{3(x+1)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-2+x}{3(x+1)}\cdot\frac{-1}{x-2}=\frac{-1}{9}$$

(f) $f(x)=x^3$

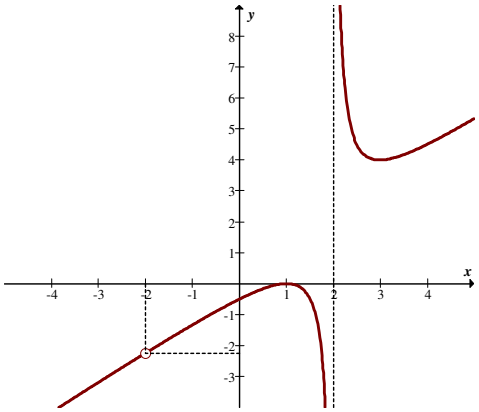
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=12$$

2 - Esboçar o gráfico das seguintes funções e dar uma estimativa dos limites indicados

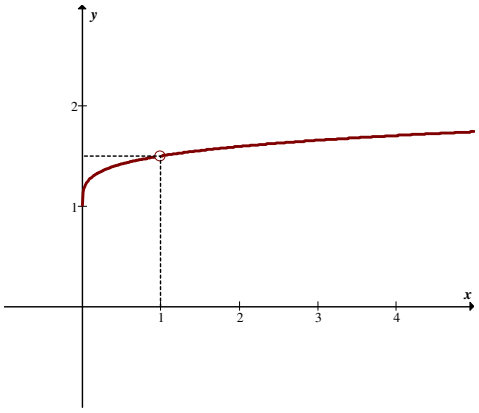
(a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$



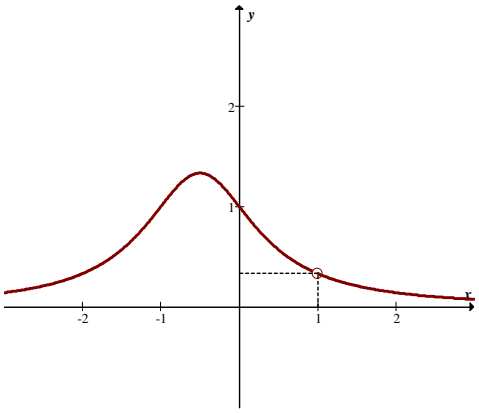
(b) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-\dfrac{9}{4}$.



(c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{3}{2}$.



(d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{3}$.



3 – Calcular os limites indicados no Exercício 2 e comparar seus resultados com as estimativas obtidas.

(a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$

(b) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=-\dfrac{9}{4}.$

(c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{u\to 1}\dfrac{u^3-1}{u^2-1}=\lim_{u\to 1}\dfrac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u-1)(u+1)}=\lim_{u\to 1}\dfrac{(u^2+u+1)}{(u+1)}=\dfrac{3}{2}.$

(d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{1}{3}.$

Nos exercícios de 4 a 27 calcule os limites.

4 - $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(-1)^2-(-1)+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}.$

5 - $\lim_{t\to -2}\dfrac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t-3)}=\lim_{t\to -2}\dfrac{(t+2)(t^2+2t)}{(t+2)(t-3)}=\dfrac{4-4}{-2-3}=\dfrac{0}{-5}=0.$

6 - $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(3x+1)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x+5}{3x+1}=\dfrac{2+5}{3\cdot 2+1}=\dfrac{7}{7}=1.$

7 - $\lim_{t\to \frac{5}{2}}\dfrac{2t^2-3t-5}{2t-5}=\lim_{t\to \frac{5}{2}}\dfrac{(2t-5)(t+1)}{(2t-5)}=\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{7}{2}.$

8 - $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2+(1-a)x-a}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+1)}{(x-a)}=a+1$.

9 - $\lim_{x\to 4}\dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}=\lim_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(3x-5)}{(x-4)(4x-9)}=\dfrac{12-5}{16-9}=\dfrac{7}{7}=1$.

10 - $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{-1+5}{-1-4}=-\dfrac{4}{5}$.

11 - $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{-1-1}{-1+2}=\dfrac{-2}{1}=-2$.

12 - $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=4$.

13 - $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\dfrac{2-3}{2-10}=\dfrac{-1}{-8}=\dfrac{1}{8}$.

14 - $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^4-16}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h^4+8h^3+24h^2+32h+16-16}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h(h^3+8h^2+24h+32)}{h}$

$=32$

15 - $\lim_{t\to 0}\dfrac{(4+t)^2-16}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{16+8t+t^2-16}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{t(8+t)}{t}=8$.

16 - $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{25+3t}-5}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{25+3t-25}{t(\sqrt{25+3t}+5)}=\dfrac{3}{10}$.

17 - $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+bt}-a}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{a^2+bt-a^2}{t(\sqrt{a^2+bt}+a)}=\dfrac{b}{2a}$, $a>0$.

18 - $\lim_{h\to 1}\dfrac{\sqrt{h}-1}{h-1}=\lim_{h\to 1}\dfrac{h-1}{(h-1)(\sqrt{h}+1)}=\dfrac{1}{2}$.

19 - $\lim_{h\to -4}\dfrac{\sqrt{2(h^2-8)}+h}{h+4}=\lim_{h\to -4}\dfrac{2(h^2-8)-h^2}{(h+4)(\sqrt{2(h^2-8)}-h)}=\lim_{h\to -4}\dfrac{2h^2-16-h^2}{(h+4)(\sqrt{2(h^2-8)}-h)}=$

$=\lim_{h\to -4}\dfrac{(h+4)(h-4)}{(h+4)(\sqrt{2(h^2-8}-h)}=\dfrac{-8}{8}=-1$.

20 - $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$

$$u^3 = 8+h \Rightarrow h = u^3 - 8$$

$$\lim_{u\to 2}\frac{u-2}{u^3-8} = \lim_{u\to 2}\frac{u-2}{(u-2)(u^2+2u+4)} = \frac{1}{12}.$$

21 - $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{-x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{-x(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{-1}{2}.$

22 - $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b} = \lim_{x\to 0}\dfrac{(x^2+a^2-a^2)(\sqrt{x^2+b^2}+b)}{(x^2+b^2-b^2)(\sqrt{x^2+a^2}+a)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2b}{2a} = \dfrac{b}{a}, a,b>0.$

23 - $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$

Fazendo:

$x = u^3$

$a = b^3$

com $b \neq 0$ e $a \neq 0$ temos:

$$\lim_{u\to b}\frac{u-b}{u^3-b^3} = \lim_{u\to b}\frac{u-b}{(u-b)(u^2+bu+b^2)} = \frac{1}{b^2+b^2+b^2} = \frac{1}{3b^2}.$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

24 - $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Fazendo $x = u^{12}$, $u \geq 0$ temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{u\to 1}\frac{u^4-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1}\frac{(u-1)(u^3+u^2+u+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{4}{3}.$$

25 - $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

Fazendo $\sqrt[3]{x} = u$, temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{u\to 1}\frac{u^2-2u+1}{(u^3-1)^2} = \lim_{u\to 1}\frac{(u-1)(u-1)}{(u-1)^2(u^2+u+1)^2} = \frac{1}{9}.$$

26 - $\lim_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\dfrac{(9-5-x)(1+\sqrt{5-x}}{(1-5+x)(3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\dfrac{(4-x)(1+\sqrt{5-x})}{(-4+x)(3+\sqrt{5+x})}=\dfrac{-2}{6}=\dfrac{-1}{3}$.

27 - $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x)+\sqrt{1-x})}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x)+\sqrt{1-x})}}=\dfrac{2}{2}=1$.

3.13 – EXERCÍCIO – pg. 93

1 - Se $f(x)=\dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$, calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+x}{7x-5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\not{x}}{2\not{x}}=2$.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-x}{7x+5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\not{x}}{12\not{x}}=\dfrac{1}{6}$.

2 – Se $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$, calcule

(a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{(x+2)^2}=+\infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+2)^2}=0$.

Nos exercícios 3 a 40 calcule os limites.

3 - $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3+4x^2-1)=+\infty$.

4 - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)=2-0+0=2$.

5 – Usando o exemplo 3.12.5*(x)*, vem $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t+1}{t^2+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\not{t}}{t^{\not{2}}}=0$.

6 - $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t+1}{t^2+1}=0$.

7 - $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2-2t+3}{2t^2+5t-3}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2}{2t^2}=\dfrac{1}{2}$.

8 - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-3x^3+2}{-x^2+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5}{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$.

9 - $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^2+7}{2-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$.

10 - $\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^3+2}{7x^3+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^3}{7x^3}=\frac{-5}{7}$.

11 - $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$.

12 - $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}+3x-10}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x\sqrt{x}}{x^{3/2}}+\frac{3x}{x^{3/2}}-\frac{10}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{1}=0$.

13 - $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-1}{t-4}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t}=+\infty$.

14 - $\lim_{x\to\infty}\frac{x(2x-7\cos x)}{3x^2-5senx+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-7x\cos x}{3x^2-5senx+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-7\cos x/x)}{x^2(3-5senx/x^2+1/x^2)}=\frac{2}{3}$, já que $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$ e $\lim_{x\to\infty}\frac{senx}{x^2}=0$.

15 - $\lim_{v\to+\infty}\frac{v\sqrt{v}-1}{3v-1}=\lim_{v\to+\infty}\frac{v(\sqrt{v}-1/v)}{v(3-1/v)}=+\infty$.

16 - $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=1$.

17 - $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{x+1}{x}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=-1$.

18 - $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\infty}=0$.

19 - $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2-1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} + \frac{x}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

20 - $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3x^2+2x+1} - \sqrt{2}x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1-2x^2}{\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{2}x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{3x^2}{x^{\not 4\,2}} + \frac{2\not x}{x^{\not 4\,3}} + \frac{1}{x^4}} + \frac{\sqrt{2}\not x}{x^{\not 2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+0+0}{\sqrt{0+0+0}+0} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

21 - $\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2-3x+4}{3x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2}{3x^2} = \frac{10}{3}.$

22 - $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty.$

23 - $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-x^2+x-1}{x^4+x^3-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x^{\not 4}} = 0.$

24 - $\lim_{s\to+\infty} \frac{8-s}{\sqrt{s^2+7}} = \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{8}{s} - \frac{s}{s}}{\sqrt{\frac{s^2}{s^2} + \frac{7}{s^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1.$

25 - $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-7}}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{7}{x^2}}}{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}} = \frac{-\sqrt{2-0}}{1+0} = -\sqrt{2}.$

26 - $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{16x^4+15x^3-2x+1} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{16x^4+15x^3-2x+1-4x^2}{\sqrt{16x^4+15x^3-2x+1} + 2x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{16 + \frac{15}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{16}{x^4} + \frac{15}{x^5} - \frac{2x}{x^7} + \frac{1}{x^8}} + \frac{2}{x^3}} = \frac{16}{0} = +\infty.$$

27 - $\lim_{s\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{3s^7-4s^5}{2s^7+1}}=\sqrt[3]{\lim_{s\to+\infty}\frac{3s^7}{2s^7}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

28 - $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-7}}{x+3}=+\sqrt{2}$.

29 - $\lim_{y\to+\infty}\frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{3}{y}-\frac{y}{y}}{\sqrt{\frac{5}{y^2}+\frac{4y^2}{y^2}}}=\frac{0-1}{\sqrt{0+4}}=\frac{-1}{2}$.

30 - $\lim_{y\to-\infty}\frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}=\lim_{y\to-\infty}\frac{\frac{3}{y}-1}{-\sqrt{\frac{5}{y^2}+4}}=\frac{1}{2}$.

31 - $\lim_{x\to3^+}\frac{x}{x-3}=\frac{3}{0^+}=+\infty$.

32 - $\lim_{x\to3^-}\frac{x}{x-3}=\frac{3}{0^-}=-\infty$.

33 - $\lim_{x\to2^+}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{0^+}=+\infty$.

34 - $\lim_{x\to2^-}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

35 - $\lim_{y\to6^+}\frac{y+6}{y^2-36}=\frac{12}{0^+}=+\infty$.

36 - $\lim_{y\to6^-}\frac{y+6}{y^2-36}=\frac{12}{0^-}=-\infty$.

37 - $\lim_{x\to4^+}\frac{3-x}{x^2-2x-8}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$.

38 - $\lim_{x\to4^-}\frac{3-x}{x^2-2x-8}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$.

39 - $\lim_{x\to3^-}\frac{1}{|x-3|}=\frac{1}{0^+}=+\infty$.

40 - $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

3.16 – EXERCÍCIOS – pg. 103

1. Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x)=\dfrac{4}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-4}=0$. Portanto $y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4}{x-4}=\infty$. Portanto $x=4$ é uma assíntota vertical.

(b) $f(x)=\dfrac{-3}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3}{x+2}=0$. Portanto $y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-3}{x+2}=\infty$. Portanto $x=-2$ é uma assíntota vertical.

(c) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-3x+2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{4}{x^2-3x+2}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to 2}=\dfrac{4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{(x-2)(x-1)}=\infty$, assim, $x=2$ é uma assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{(x-2)(x-1)}=\infty$, assim, $x=1$ é uma assíntota vertical.

d) $f(x)=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}=\infty$, assim, $x=3$ é uma assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -4}=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}=\infty$, assim, $x=-4$ é uma assíntota vertical.

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ é assíntota horizontal.

$\lim_{x\to -4} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -4$ é assíntota vertical.

f) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x-3}}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x-3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ é assíntota horizontal.

$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-3}} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 3$ é assíntota vertical.

g) $f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}} = \infty \quad \Rightarrow$ Não existe assíntota horizontal.

$\lim_{x\to +4} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to -4} f(x) = \infty$

Assim, $x = 4$ e $x = -4$ são assíntotas verticais.

h) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{12}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}} = 1$$

e $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{12}{x^2}}} = -1$$

Assim, $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais.

$\lim_{x\to 3} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{\sqrt{(x-3)(x+4)}} = \infty$ e

$\lim_{x\to -4} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to -4} \frac{x}{\sqrt{(x-3)(x+4)}} = \infty$

Portanto, $x = 3$ e $x = -4$ são assíntotas verticais.

i) $f(x)=e^{1/x}$

$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=1 \quad \Rightarrow \quad y=1$ é uma assíntota horizontal.

$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}=\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ é uma assíntota vertical.

j) $f(x)=e^{x}-1$

$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}-1\right)=\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}-1\right)=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-1$ é assíntota horizontal

$\nexists$ assíntota vertical.

k) $y=\ln x$

$\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$

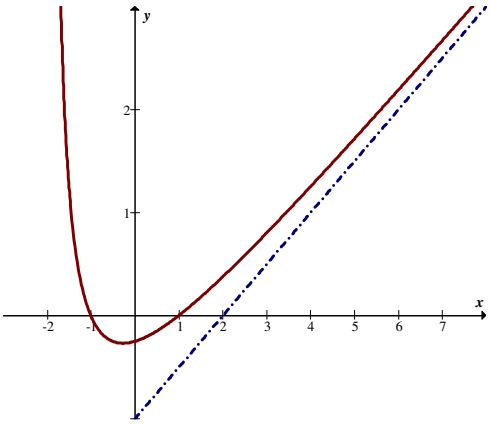
$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$, assim $x=0$ é uma assíntota vertical.

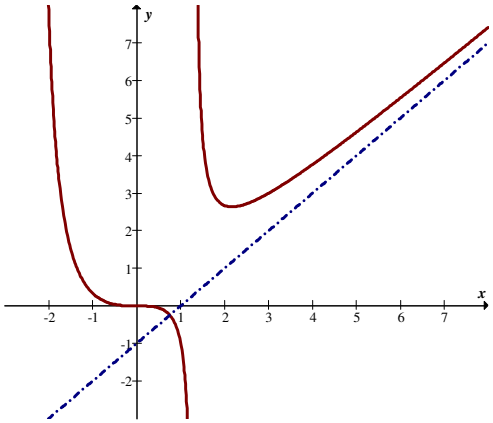
l) $f(x)=tgx$

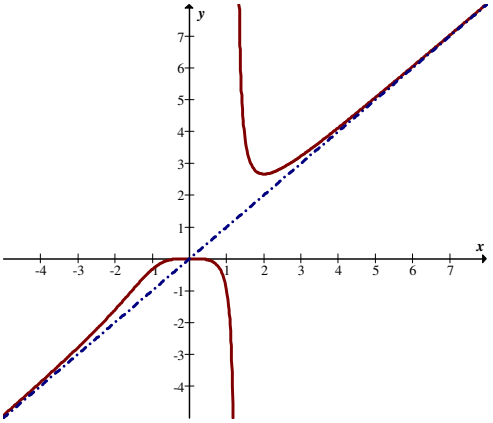
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+2n} tgx=\pm\infty$ com $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, assim $x=\frac{\pi}{2}+2n$, para $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ são assíntotas verticais.

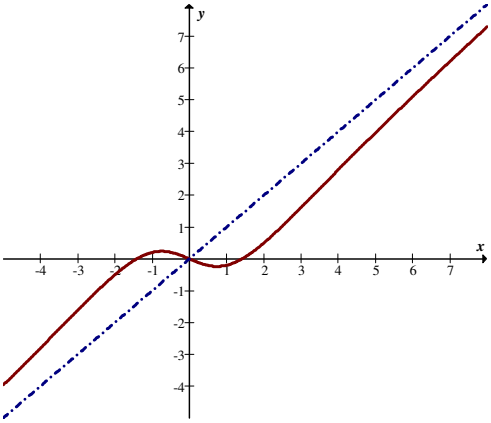
2. Constatar, desenvolvendo exemplos graficamente, que as funções racionais do tipo $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios tais que a diferença entre o grau do numerador e o grau de denominador é igual 1 possuem assíntotas inclinadas.

Seguem alguns gráficos que mostram a afirmação:



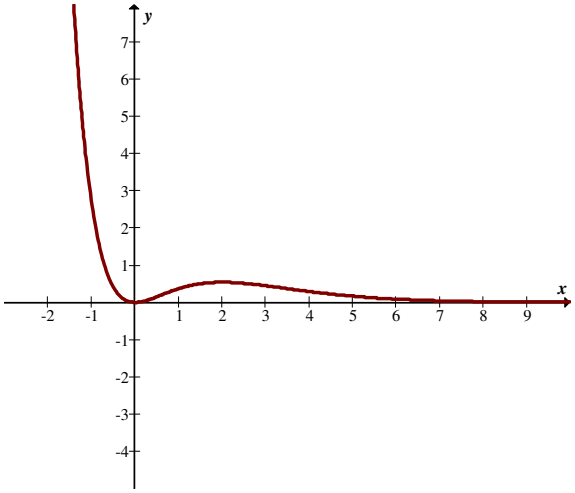






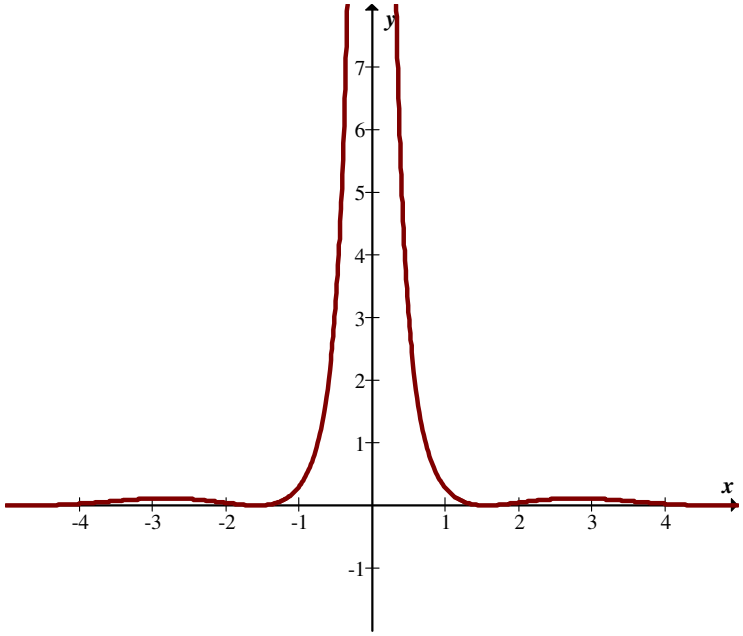
(3) Analisar graficamente a existência de assíntotas para as seguintes funções

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.



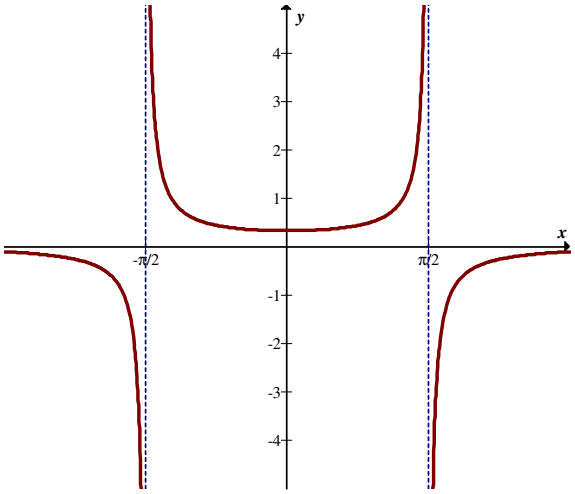
Temos que y=0 é uma assíntota horizontal.

(b) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$



Observa-se que *y=0* é uma assíntota horizontal e *x=0* é uma assíntota vertical.

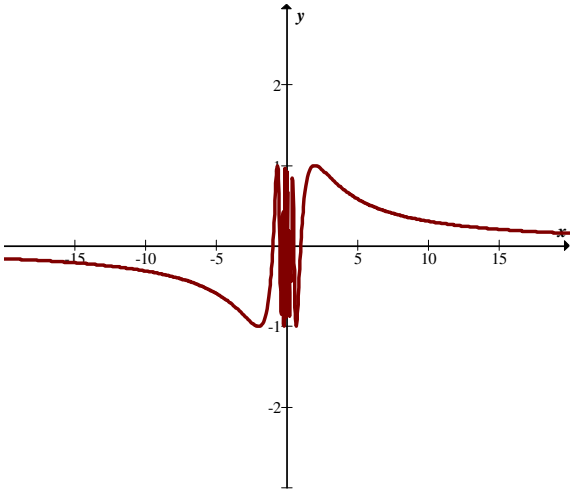
(c) $f(x) = \dfrac{tgx - x}{x^3}$



Na região considerada temos duas assíntotas verticais em $x = -\dfrac{\pi}{2}$ e em $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Mas se ampliarmos o gráfico vamos observar outras assíntotas verticais.

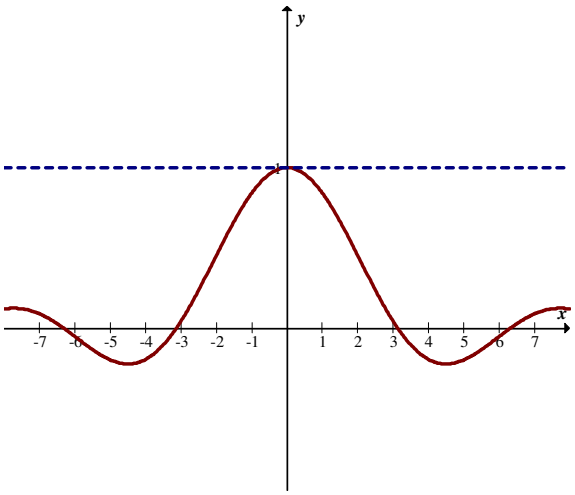
(d) $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$



É possível observar que $y=0$ é uma assíntota horizontal.

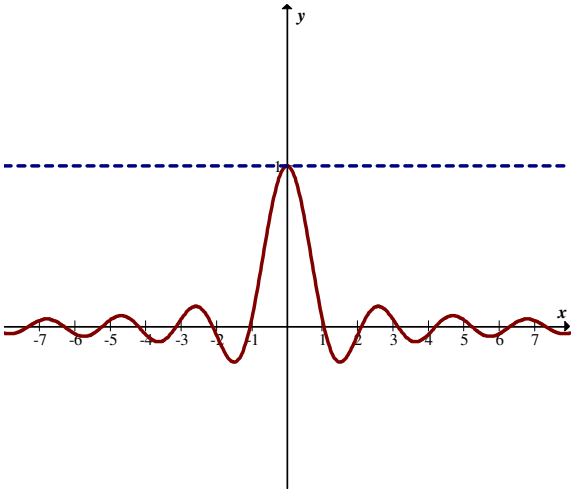
(4) Fazer o gráfico das funções seguintes e determinar os respectivos limites. Para melhor visualização, traçar, também, o gráfico das retas indicadas. A seguir, determinar analiticamente os limites dados e comparar os resultados.

(a) $f(x)=\dfrac{senx}{x}$ e $y=1$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



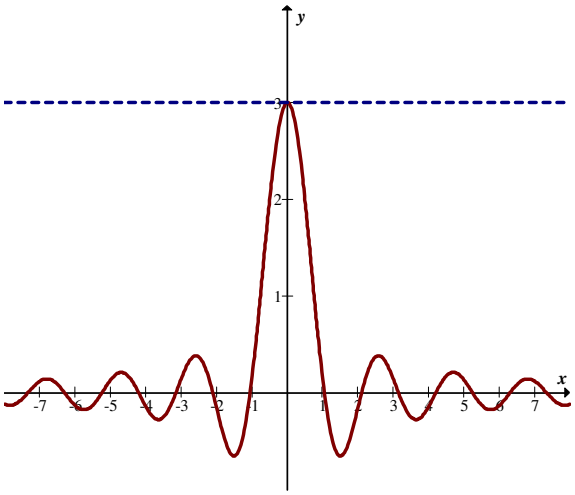
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=1$.

(b) $f(x)=\dfrac{sen3x}{3x}$ e $y=1$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



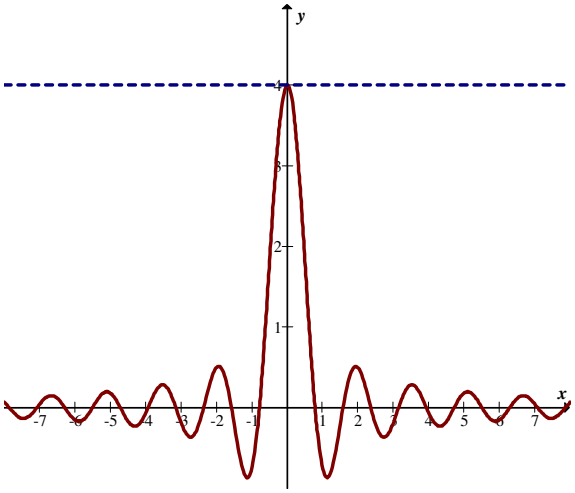
$\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{3x}=1$.

(c) $f(x)=\frac{sen3x}{x}$ e $y=3$; $\lim_{x\to 0} f(x)$



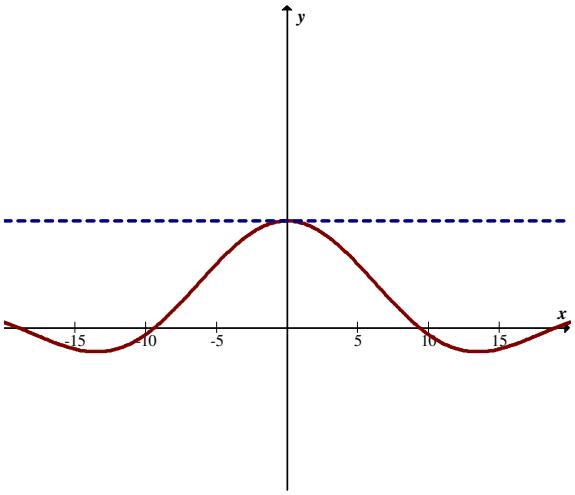
$\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3sen3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{3x}=3\times 1=3$.

d) $f(x)=\frac{sen4x}{x}$ e $y=4$; $\lim_{x\to 0} f(x)$



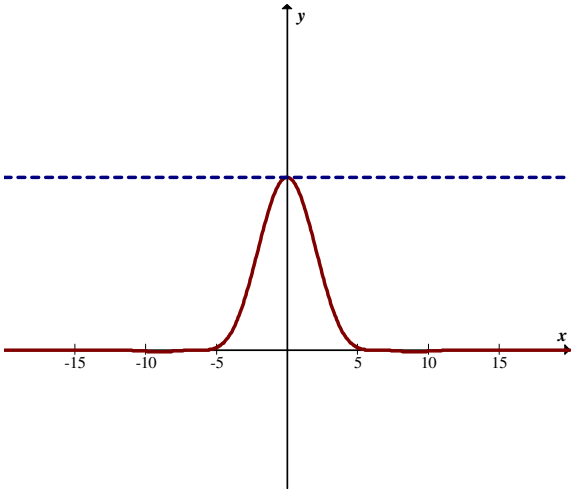
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4sen4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{4x}=4\times 1=4\,.$$

e) $f(x)=\dfrac{sen1/3x}{x}$ e $y=1/3$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



$$\lim_{x\to 0}\frac{sen1/3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/3sen1/3x}{1/3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{sen1/3x}{1/3x}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}.$$

a) $f(x)=\dfrac{sen^3(x/2)}{x^3}$ e $y=1/8$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3(x/2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x/2}{x}\right)^3=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1/2 sen(x/2}{x/2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\times 1\right)^3=\frac{1}{8}.$$

Nos exercícios 5 a 27, calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

5. $\lim_{x\to 0}\frac{sen9x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{9sen9x}{9x}=9\cdot 1=9$.

6. $\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{3x}=\frac{4}{3}$ $\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$.

7. $\lim_{x\to 0}\frac{sen10x}{sen7x}=\lim_{x\to 0}\frac{10\cdot sen10x}{10x}\cdot\frac{7x}{7sen7x}=10\cdot 1\cdot\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{10}{7}$.

8. $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{sen\,bx}$, $b\neq 0$

Se $a=0$, temos $\lim_{x\to 0}\frac{0}{senbx}=0$.

Se $a\neq 0$, temos

$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{sen\,bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\,sen\,ax}{a\cdot x}\cdot\frac{bx}{b\,sen\,bx}=a\cdot 1\cdot\frac{1}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$.

9. $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{ax}\cdot\frac{a}{\cos ax}=1.\frac{a}{1}=a,\ a\neq 0$.

Para $a=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,ax}{x}=0$

10. $\lim_{x\to -1}\frac{tg^3\frac{x+1}{4}}{(x+1)^3}$

Fazemos $u = x+1$. $x \to -1 \Rightarrow u \to 0$. Substituindo no limite, vem

$$\lim_{x\to -1} \frac{tg^3 \frac{x+1}{4}}{(x+1)^3} = \lim_{u\to 0} \frac{tg^3 \frac{u}{4}}{u^3} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{4^3} \frac{sen^3 \frac{u}{4}}{\left(\frac{u}{4}\right)^3} \cdot \frac{1}{\cos^3 \frac{u}{4}} = \frac{1}{64}.1.1 = \frac{1}{64}.$$

11. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(sen^2 \frac{x}{2}\right)\frac{x}{4}}{\frac{x\cdot x}{4}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

12. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2sen^2 \frac{x}{2}}{x^2} \qquad \boxed{2sen^2 \frac{x}{2} = 1-\cos x}$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{sen\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

13. $$\lim_{x\to 3}(x-3).\cos ec\,\pi x = \lim_{x\to 3}(x-3)\cdot\frac{1}{sen\,\pi x} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{sen\,\pi x} = \lim_{x\to 3}\frac{-(3-x)\pi}{\pi\, sen\,\pi(3-x)} = -\frac{1}{\pi}$$

$\boxed{sen\,\pi x = sen(3\pi - \pi x) = sen\,\pi(3-x)}$

14. $$\lim_{x\to 0}\frac{6x - sen2x}{2x+3sen4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{x} - \frac{2sen2x}{2x}}{\frac{2x}{x} + \frac{(3sen4x)4}{4x}} = \frac{6-2\cdot 1}{2+3\cdot 1\cdot 4} = \frac{2}{7}$$

15. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - cox3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2sen^2 x - \left(1-2sen^2\frac{3x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2sen^2 x + 2sen^2\frac{3x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2sen^2 x}{x^2} + \frac{2sen^2\frac{3x}{2}}{x^2} = -2\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)^2 + 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot sen\frac{3x}{2}}{2\cdot\frac{3x}{2}}\right)^2 = -2\cdot 1^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot 1\right)^2$$

$$= \frac{5}{2}.$$

16. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x + \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2\left(1-2sen^2\frac{x}{2}\right)+(1-2sen^2 x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-2+4sen^2\frac{x}{2}+1-2sen^2 x}{x^2} = 4\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2 - 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)^2 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}.1\right)^2 - 2\cdot(1)^2 = -1.$$

17. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n}{2n}+\frac{3}{2n}}{\frac{2n}{2n}+\frac{1}{2n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{\frac{3}{2n}}{3}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e.$$

18. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{tgx}\right)^{tgx} = e$. Usa-se a substituição $u = tgx$.

19. $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e$. Usa-se a substituição $u = \sec x$.

20. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{10}}\right)^{\frac{x}{10}\cdot 10} = e^{10}$.

21. $\lim_{x\to 2}\frac{10^{x-2}-1}{x-2} = \ln 10$.

22. $\lim_{x\to -3}\frac{4^{\frac{x+3}{5}}-1}{5\cdot\frac{x+3}{5}} = \frac{1}{5}\ln 4 = \frac{2}{5}\ln 2.$

23. $\lim_{x\to 2}\dfrac{5^x-25}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{5^x}{5^2}-1}{\dfrac{x-2}{25}}=\lim_{x\to 2}\dfrac{5^{x-2}-1}{\dfrac{x-2}{25}}=25\ln 5$

24. $\lim_{x\to 1}\dfrac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{sen5(x-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{4\cdot\dfrac{x-1}{4}}\cdot\dfrac{5(x-1)}{5sen5(x-1)}=\dfrac{1}{4}\cdot\ln 3\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{\ln 3}{20}$

25. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^{-ax}}{b^{-bx}}-1}{\dfrac{x}{e^{-bx}}}=\lim_{x\to 0}e^{-bx}\left(\dfrac{e^{-ax+bx}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{(b-a)x}-1}{\dfrac{x(b-a)}{b-a}}=b-a\,.$

26. $\lim_{x\to 0}\dfrac{tghax}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2ae^{2ax}-1}{2ax}\cdot\dfrac{1}{e^{2ax}+1}=$

$=\dfrac{2a\ln e}{2}=a\,.$

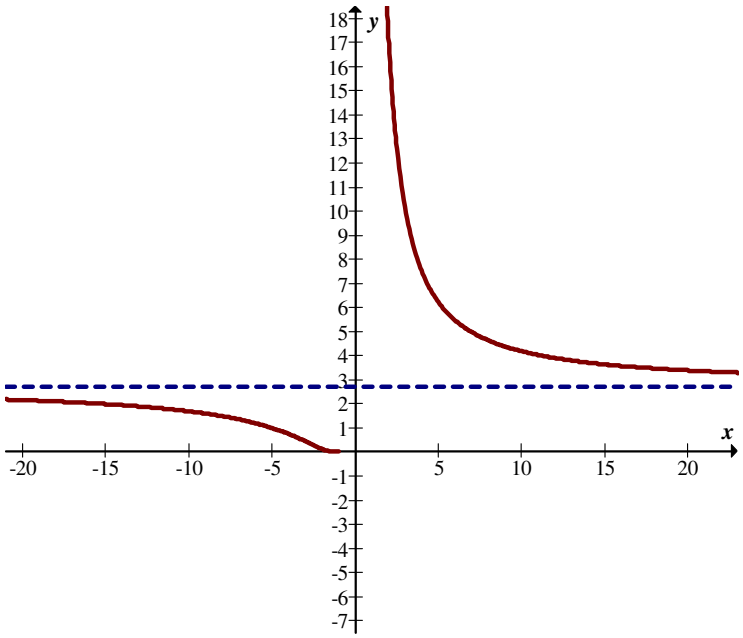
27. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{senax-senbx}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{(a-b)x}-1\right)e^{bx}}{(sen\,ax-sen\,bx)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{(a-b)x}-1\right)e^{bx}}{2sen\dfrac{(a-b)x}{2}\cdot\cos\dfrac{(a+b)x}{2}}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{(a-b)x}-1}{\dfrac{x(a-b)}{(a-b)}}\cdot\dfrac{x\dfrac{a-b}{2}\cdot\dfrac{2}{a-b}}{sen\dfrac{(a+b)x}{2}}\dfrac{1}{\cos(a+b)\dfrac{x}{2}}\cdot e^{bx}=\dfrac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot\dfrac{2}{a-b}=1$

28. Calcular $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ das funções dadas. Em seguida conferir graficamente os resultados encontrados.

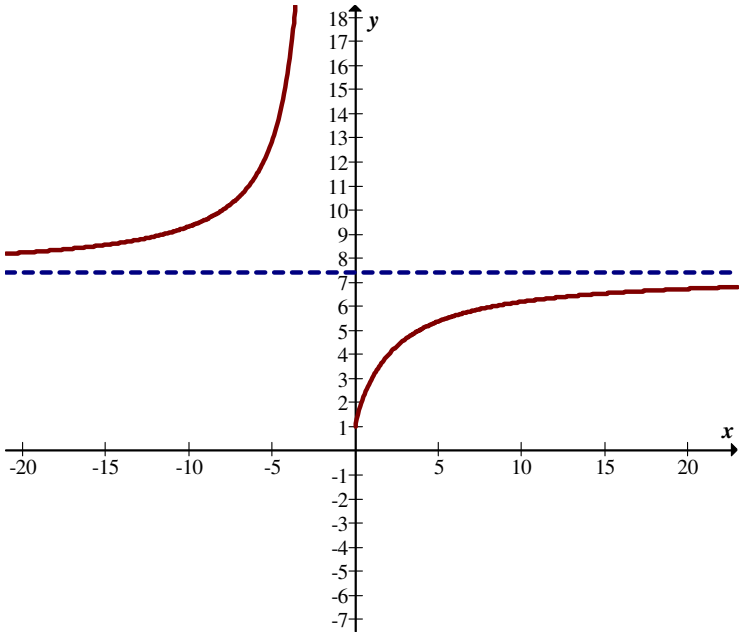
(a) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\times\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5}=e\times 1=e\,.$



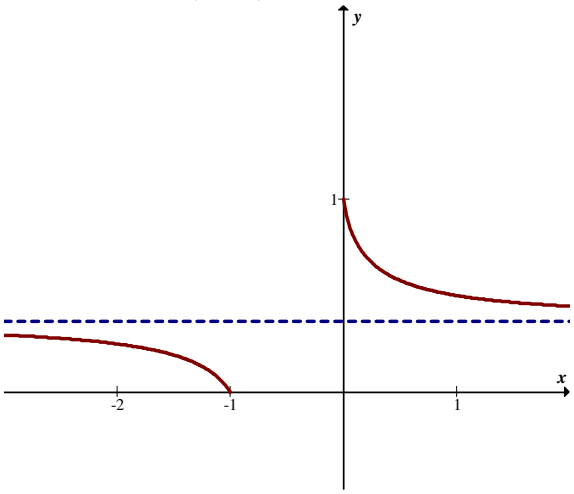
b) $f(x)=\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2/2}{x/2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{(x/2)\times 2}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{(x/2)}\right]^2=e^2.$$



c) $f(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$



3.18 – EXERCÍCIOS – pg. 112

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen\ x}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ em $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{x}=1\neq f(0)=0$. Portanto *f(x)* não é contínua em $x=0$.

(b) $f(x)=x-|x|$ em $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}0=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. Portanto *f(x)* é contínua em $x=0$.

(c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4} & ,x\neq 2\\ 3 & ,\quad x=2\end{cases}$ em $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{12}{4}=3=f(2)$. Portanto, a função é contínua em $x=2$.

(d) $f(x)=\dfrac{1}{sen\ 1/x}$ em $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2}=\dfrac{1}{sen\ 1/x}=\dfrac{1}{sen\ 1/2}=f(2)$. Portanto, a função é contínua em $x=2$.

(e) $f(x)=\begin{cases}x^2 sen\ 1/x & ,x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$ em $x=0$.

Conforme exercício 16 da lista 3.6 item (c), temos

$\lim_{x\to 0} x^2 sen\ {}^{1}\!/_{x} = 0$. Como *f(0)=0*, a função é contínua em $x = 0$.

(f) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , x < 1 \\ 1 - |x| & , x > 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1 - x^2) = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 - |x|) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0 \neq f(1) = 1.$$

Portanto a função não é contínua em $x = 1$.

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$.

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \neq f(2) = 0$. Portanto, a função não é contínua em $x = 2$.

(h) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq -1 \\ 1 - |x| & , x < -1 \end{cases}$ em $x = -1$.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 = 1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (1 - |x|) = \lim_{x\to -1^-} (1 + x) = 0 \quad \therefore \quad \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$ e a função não é contínua em *x=-1*.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}$ em $x = 2$.

$\lim_{x\to 2} \dfrac{(x^2 - 3x + 7)}{x^2 + 1} = \dfrac{4 - 6 + 7}{4 + 1} = 1 = f(2)$. Portanto a função é contínua em $x = 2$.

(j) $f(x) = \dfrac{2}{3x^2 + x^3 - x - 3}$ em $x = -3$.

A função dada não está definida para $x = -3$, assim não é contínua neste ponto.

2. Determine, se existirem, os valores de $x \in D(f)$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}, & x^2 \neq 1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$

Temos que em $x = -1$ a função não é contínua porque não existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

(b) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{3+sen\, x}$

$3 + sen\, x \neq 0$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$. Portanto, a função não tem pontos em que não é contínua.

(c) $f(x) = \dfrac{x-|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x-x}{x} = \dfrac{0}{x} = 0 & , x > 0 \\ \dfrac{x+x}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2 & , x < 0 \end{cases}$

A função não tem pontos em que não é contínua em seu domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+6}, & x < -3 \ e\ x > -2 \\ -1 & , -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$

Esta função não é contínua nos pontos -3 e -2.

(e) $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & , x < 0 \\ x^2+1 & , x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} (1-\cos x) = 0$

Portanto, não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e a função não é contínua em $x = 0$.

(f) $f(x)=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

Esta função é contínua em todo o seu domínio: $\Re-\{0\}$.

(g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}-3x+4}{x-1}, x\neq 1\\ 1 \qquad\qquad , x=1\end{cases}$

Temos que:

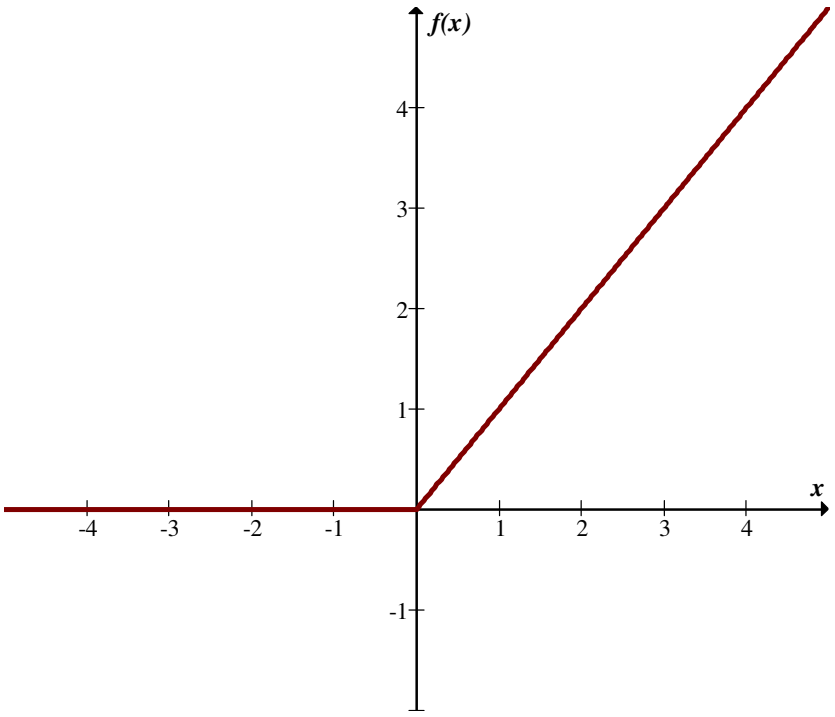
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}-3x+4}{x-1}=\infty$. Portanto, *f* não é contínua em *x=1*.

(h) $f(x)=\dfrac{x}{x+\pi}$

A função é contínua em todos os pontos de seu domínio: $\Re-\{-\pi\}$

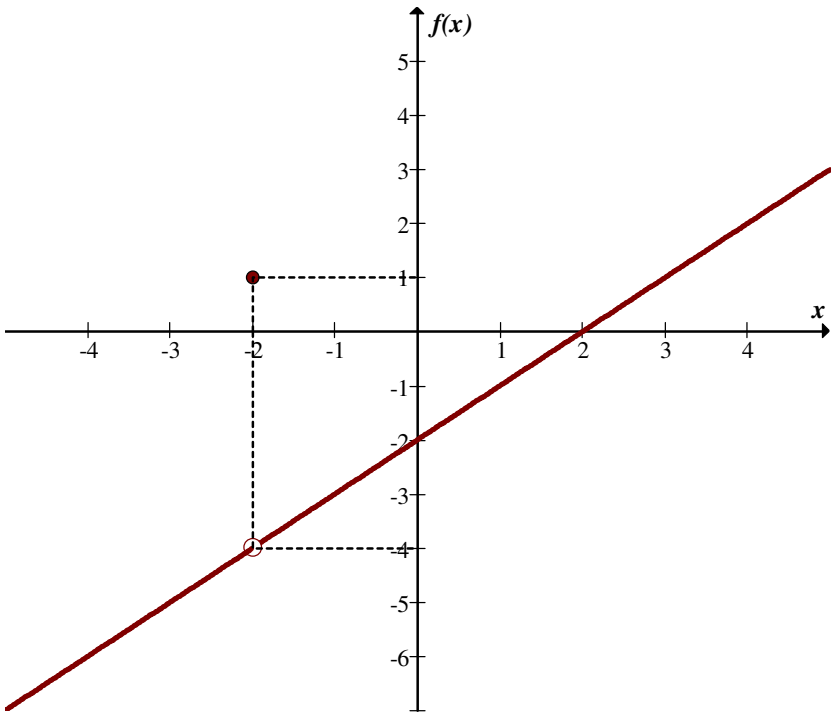
3. Construa o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x)=\begin{cases}0, x\leq 0\\ x, x>0\end{cases}$



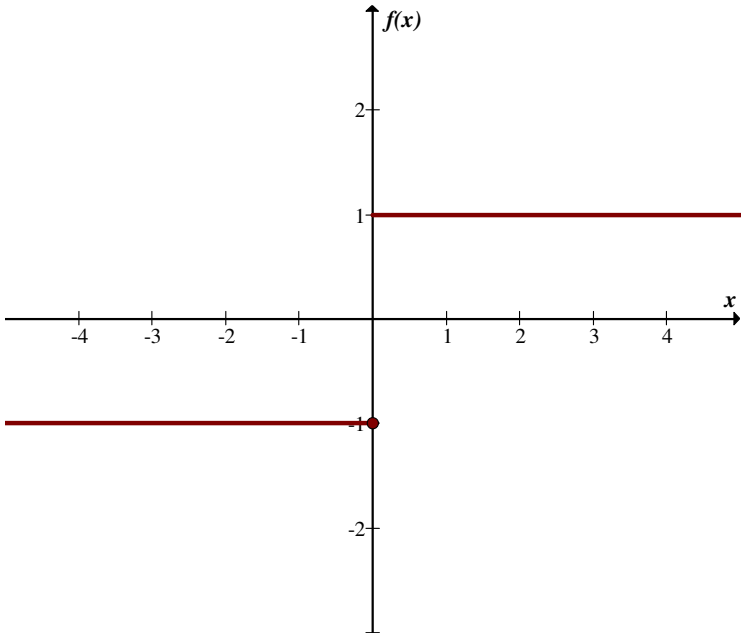
Analisando o gráfico visualiza-se uma função contínua em todo o seu domínio, ou seja, em todo o conjunto dos números reais.

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2}, x\neq -2\\ 1 \qquad\quad ,x=-2\end{cases}$



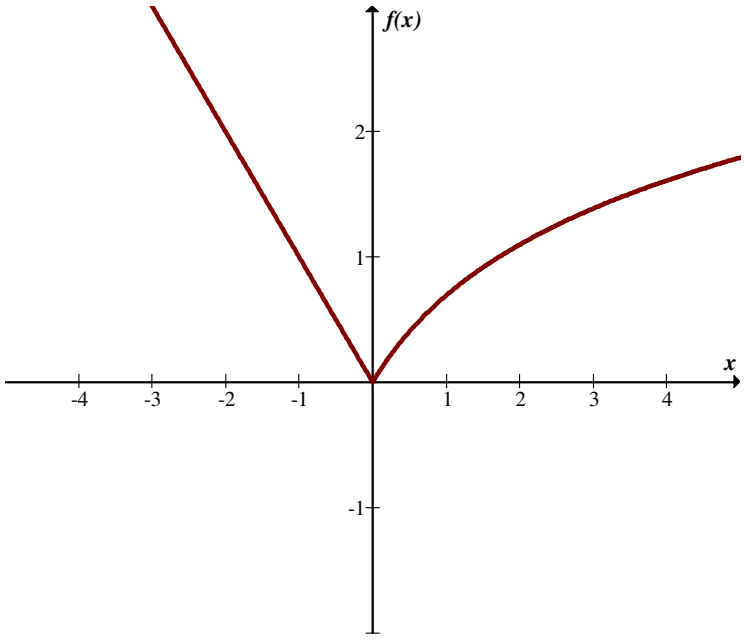
A visualização gráfica mostra que a função não é contínua em $x=-2$.

(c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$



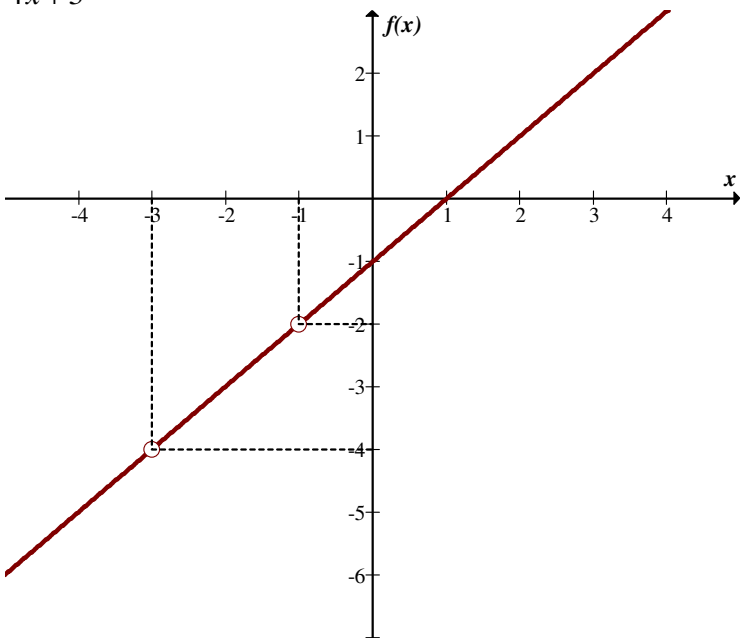
A visualização gráfica mostra que a função não é contínua em $x = 0$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ -x \quad\quad , & x < 0 \end{cases}$



A visualização mostra que a função é contínua em todos os pontos do seu domínio, ou seja, em todo o conjunto dos números reais.

(e) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+4x+3}$



A visualização gráfica mostra que a função não é contínua em $x=-3$ e em $x=-1$. Observa-se que esses pontos não pertencem ao domínio dessa função. Assim, temos a continuidade em todos os pontos do domínio.

4. Calcule p de modo que as funções abaixo sejam contínuas.

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2+px+2 & , x\neq 3 \\ 3 & , x=3 \end{cases}$

Devemos ter:

$\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+px+2\right)=11+\lim\limits_{x\to 3} px=f(3)=3$.

Assim,

$\lim\limits_{x\to 3} px=3-11$

$\lim\limits_{x\to 3} px=-8$

$3p=-8$

$p=\dfrac{-8}{3}$.

(b) $f(x)=\begin{cases} x+2p & , x\leq -1 \\ p^2 & , x>-1 \end{cases}$

Temos que:

$\lim_{x\to -1^+} p^2 = p^2$

$\lim_{x\to -1^-} (x+2p) = -1+2p$

Para que o limite exista devemos ter a relação:

$p^2 = -1+2p$

$p^2 - 2p + 1 = 0$

$p = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1.$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \neq 0 \\ p^3 - 7, x = 0 \end{cases}$

Temos que $\lim_{x\to 0} e^{2x} = 1$. Assim devemos ter $p^3 - 7 = 1$ ou $p = 2$.

5. Determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas.

(a) $f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+7)}$

Neste caso temos os pontos que não pertencem ao domínio da função: $x = 3$ e $x = -7$.

(b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(6-x)}$

$(x-3)(6-x) \geq 0$

Neste caso a função não é contínua em $x \in (3,6)$, pois esses pontos não pertencem ao domínio da função.

(c) $f(x) = \frac{1}{1+2\ sen\ x}$

Esta função não é contínua nos pontos em que $sen\ x = \frac{-1}{2}$, ou seja, em

$\begin{cases} x_{1k} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in \mathrm{Z} \\ x_{2k} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in \mathrm{Z} \end{cases}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-6x+10}$

É contínua em todo o seu domínio, ou seja, em todo o conjunto dos números reais.

6. Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em x_0 =3 , também o são $f+g$ e $f\,.\,g$.

Se $f(x)$ é contínua em $x=3$ então $\exists\, f(3)$, $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ (1)

Se $g(x)$ é contínua em $x=3$ então $\exists\, g(3)$, $\exists \lim\limits_{x\to 3} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)$ (2)

Temos que

$$\lim_{x\to 3}(f+g)=\lim_{x\to 3} f(x)+\lim_{x\to 3} g(x)=f(3)+g(3)=(f+g)(3)$$
$$\lim_{x\to 3} f\,.\,g=\lim_{x\to 3} f(x).\lim_{x\to 3} g(x)=f(3).\,g(3)=(f\,.\,g)\,.(3).$$

7. Defina funções *f, g* e *h* que satisfaçam:

(a) *f* não é contínua em 2 pontos de seu domínio;

(b) *g* é contínua em todos os pontos de seu domínio mas não é contínua em IR;

(c) $h_0 f$ é contínua em todos os pontos do domínio de *f*.

Podemos ter infinitas respostas para o presente exercício. Segue um exemplo para cada uma das funções:

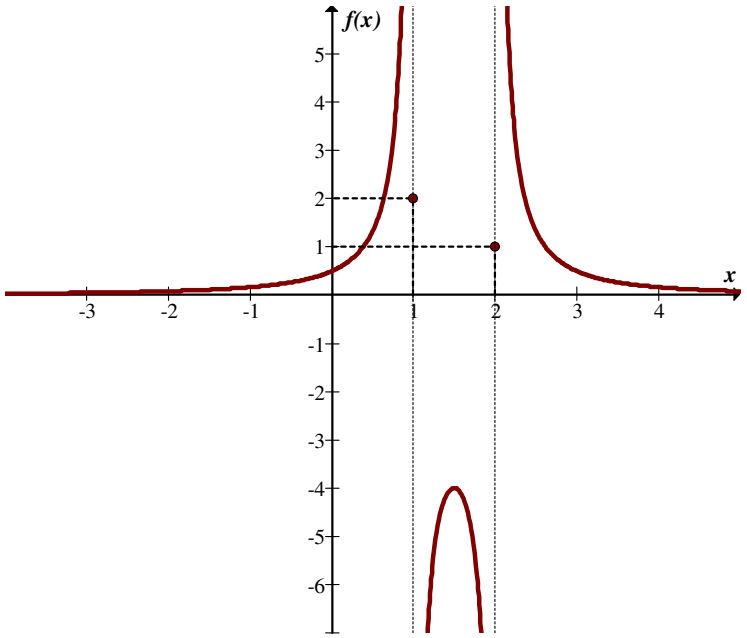
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}, & x\neq 1\ e\ x\neq 2\\ 2 \quad , & x=1\\ 1 \quad , & x=2\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{x+2}$$

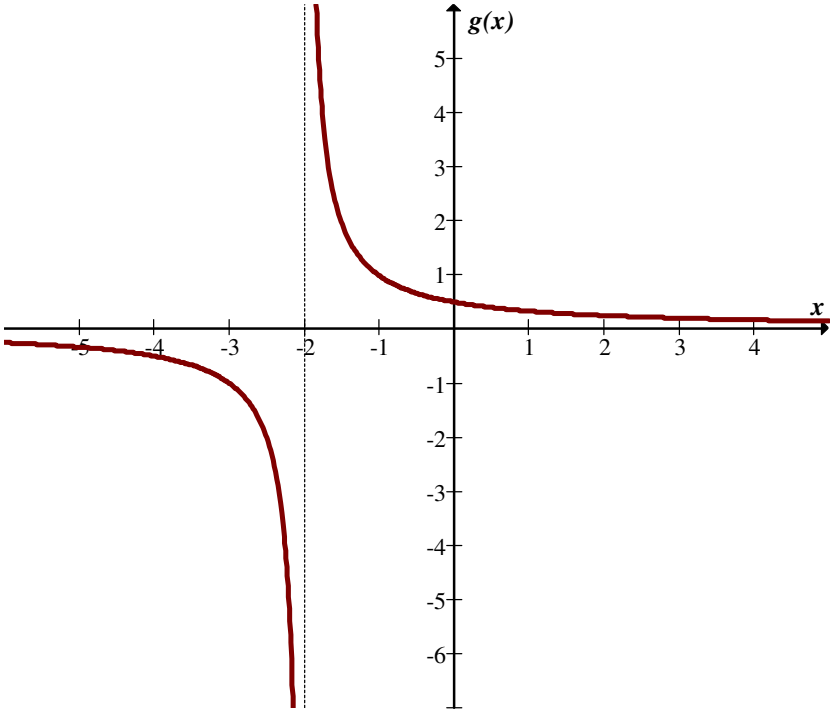
$$h(x)=x$$

Para as funções exemplificadas temos que $h \circ f = h[f(x)] = f(x)$. Essas funções satisfazem as condições dadas nos três itens e podem ser visualizadas a seguir.

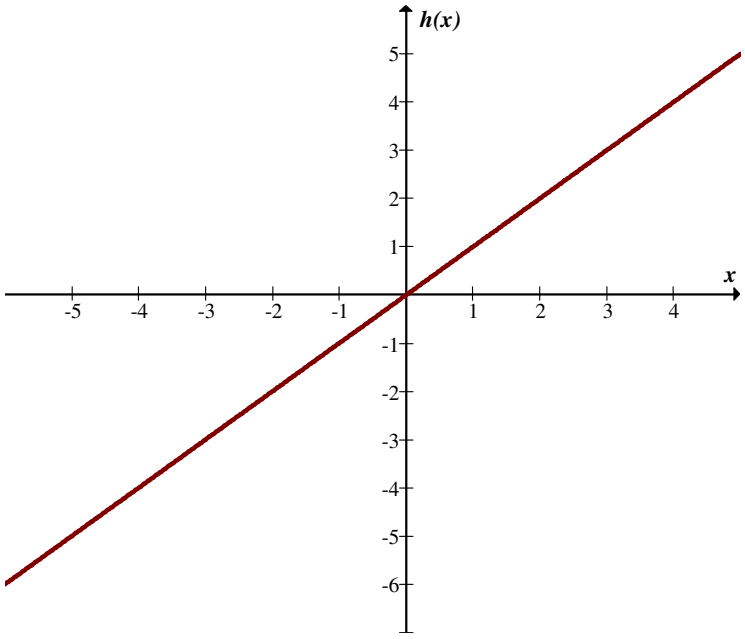
(a) Gráfico da função $f(x)$ definida em $(-\infty,+\infty)$ e contínua em $(-\infty,+\infty)$ -$\{1,2\}$.



(b) Gráfico da função $g(x)$ contínua em todos os pontos de seu domínio, mas não é contínua em $(-\infty,+\infty)$. O ponto $x = -2$ não pertence ao domínio da função exemplificada.



(c) Gráfico da função $h(x) = x$, cuja composição com a função $f(x)$ resulta a própria função $f(x)$.



8.Dê exemplo de duas funções *f* e *g* que não são contínuas no ponto *a=0* e tais que $h = f \cdot g$ é contínua neste ponto. Faça o gráfico das funções *f*, *g* e *h*.

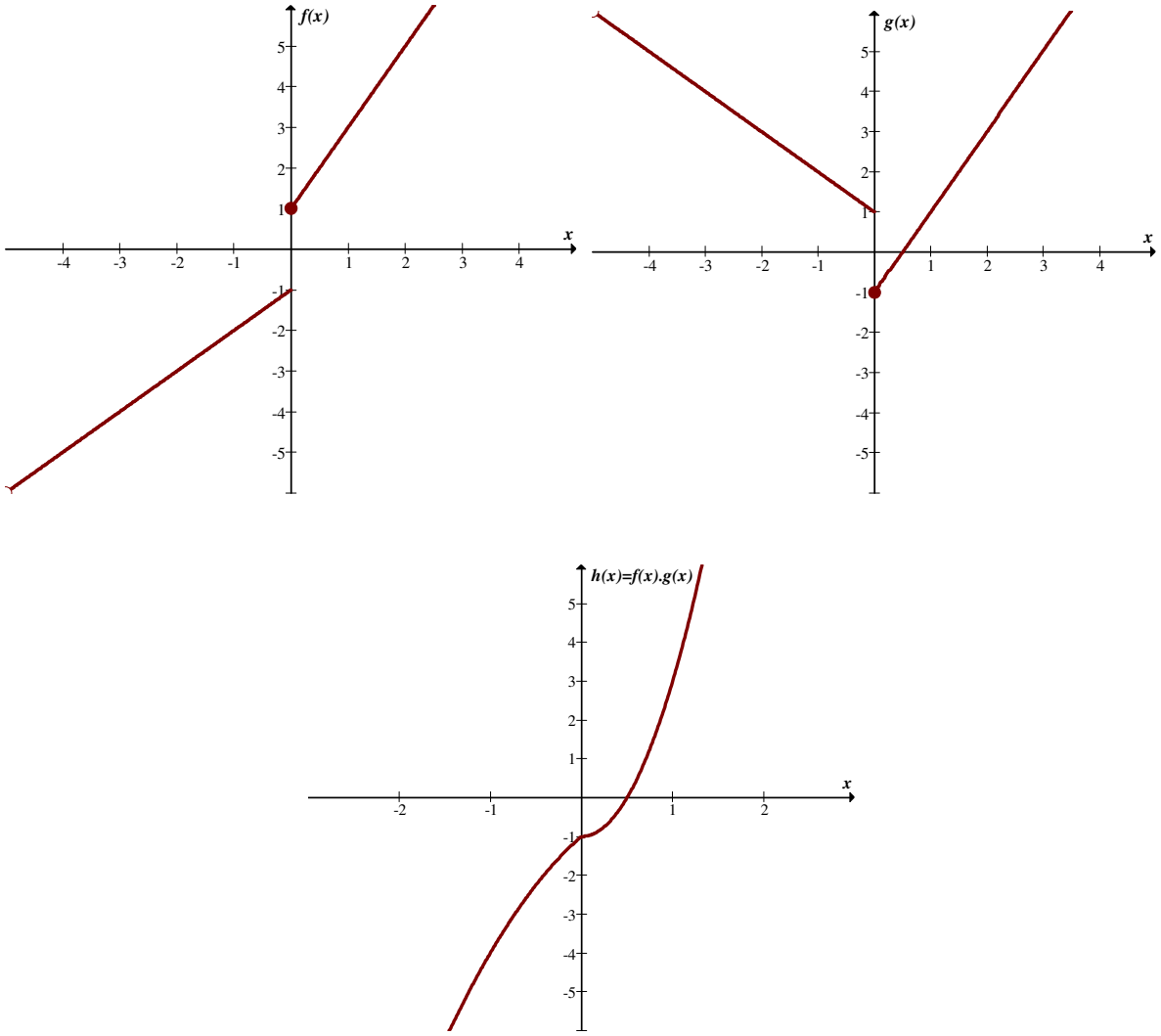
Existem infinitos exemplos. Segue um deles:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1\,,\, x \geq 0 \\ x-1\,,\, x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1\,,\, x \geq 0 \\ -x+1\,,\, x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 4x^2-1\,,\, x \geq 0 \\ -x^2+2x-1, x < 0 \end{cases}$$

Esboço dos gráficos.



9. Sejam *f, g* e *h* funções tais que, para todos *x*, $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Se *f* e *h* são contínuas no ponto $x = a$ e $f(a) = g(a) = h(a)$, prove que g é contínua no ponto *a*.

Se *f* e *h* são contínuas no ponto $x = a$, temos que:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$

Como $f(a) = h(a)$ temos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$.

Usando o Teorema do Confronto, considerando que $f(x) \le g(x) \le h(x)$, existe $\lim_{x \to a} g(x) = f(a) = h(a) = g(a)$. Isto garante a continuidade da função $g(x)$ em $x = a$.

10. Sejam $a \in IR$ e $f : IR \to IR$ uma função definida no ponto *a*. Se $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$, prove que *f* é contínua no ponto *a*.

Para que a função *f* seja contínua no ponto *a* devemos ter que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(a)$, ou que $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$.

Temos,

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\cdot(x - a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\cdot\lim_{x\to a}(x - a) = m\cdot 0 = 0\,.$$

UNIDADE 3

3.6 – EXERCÍCIO – pg. 72

Observação: Seguem inicialmente somente as respostas dos exercícios 1 ao 5

1 – a) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$

b) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

c) $\lim_{x\to 3} f(x)\ \nexists$

d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$

e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$

f) $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$

2 – a) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

d) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

3 – a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

d) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

4 – a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

5 – (a) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

(b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x)\ \nexists$

(d) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

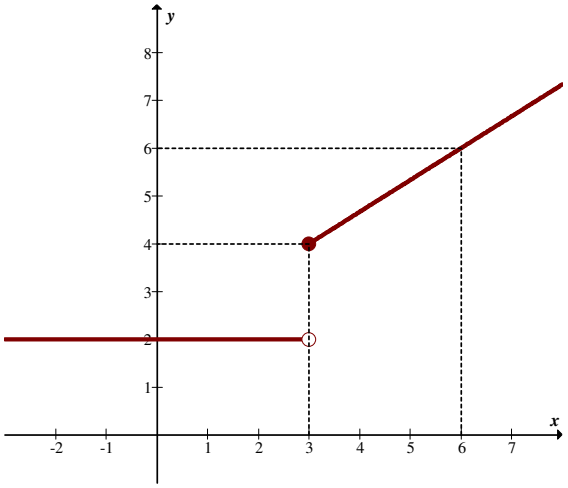
6 – Descrever analiticamente e graficamente uma função $y = f(x)$ tal que $\lim_{x\to3} f(x)$ não existe e $\lim_{x\to6} f(x)$ existe.

Podemos ter infinitos exemplos que atendem às características solicitadas. Segue um exemplo.

Descrição analítica:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 3 \\ \frac{2}{3}x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

Descrição gráfica:



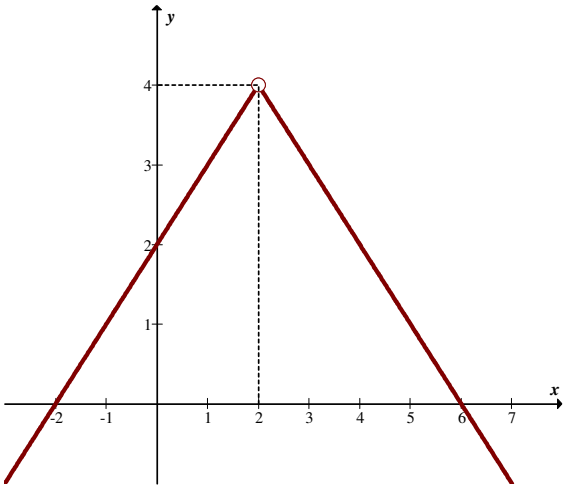
7 – Definir uma função $y = g(x)$ tal que $\lim_{x\to2} g(x) = 4$, mas $g(x)$ não é definida em $x = 2$.

Podemos ter infinitos exemplos que atendem às características solicitadas. Segue um exemplo.

Descrição analítica:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

Descrição gráfica:



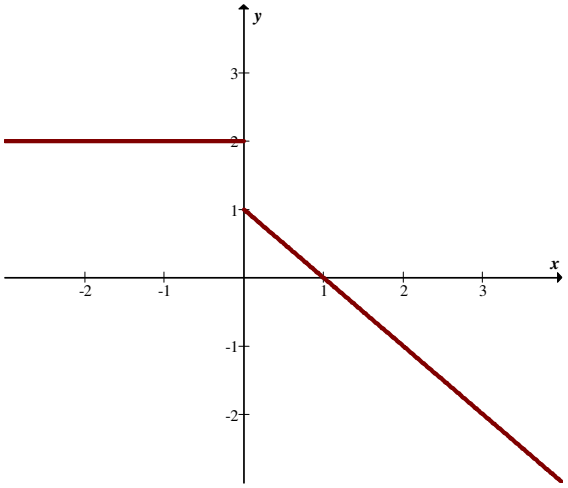
8 – Definir e fazer o gráfico de uma função $y = h(x)$ tal que $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 2$.

Podemos ter infinitos exemplos que atendem às características solicitadas. Segue um exemplo.

Descrição analítica:

$$h(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Descrição gráfica.



9 - Mostrar que existe o limite de $f(x) = 4x - 5$ em $x = 3$ e que é igual a 7.

Queremos mostrar que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que

$|4x-5-7|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-3|<\delta$.

Temos,

$|4x-5-7|=|4x-12|=|4(x-3)|=4|x-3|$.

Assim, devemos ter $4|x-3|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-3|<\delta$.

Portanto, basta fazer $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$.

Observamos que qualquer $\delta\leq\frac{\varepsilon}{4}$ poderia ser tomado.

10 - Mostrar que $\lim_{x\to 3}x^2=9$.

Dado $\varepsilon>0$ devemos mostrar que existe um $\delta>0$ tal que $|x^2-9|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-3|<\delta$.

Temos:

$|x^2-9|=|(x-3)(x+3)|=|x-3||x+3|$

Supondo $0<\delta\leq 1$, da desigualdade $0<|x-3|<\delta$, vem

$|x-3|<1$

$-1<x-3<1$

$2<x<4$

$5<x+3<7$

Portanto, $|x+3|<7$ e, então,

$|x^2-9|=|x-3||x+3|<\delta.7$, sempre que $0<|x-3|<\delta$.

Assim, basta tomar $\delta=mim\left(\frac{\varepsilon}{7},1\right)$.

Nos exercício 11 a 15 é dado $\lim_{x\to a}f(x)=L$. Determinar um número δ para o ε dado tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-a|<\delta$.

11 - $\lim_{x\to 2}(2x+4)=8$, $\varepsilon=0{,}01$

$|2x+4-8|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-2|<\delta$

$|2x+4-8|=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|$

Então

$2|x-2|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-2|<\delta$

Basta fazer $\delta=\frac{\varepsilon}{2}=\frac{0{,}01}{2}=0{,}005$

12 - $\lim_{x\to -1}(-3x+7)=10$, $\varepsilon = 0{,}5$

$|-3x+7-10|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-(-1)|<\delta$

Temos

$|-3x-3|=|-3(x+1)|=|-3||x+1|=3|x+1|$

Então

$3|x+1|<\varepsilon$ sempre que $0<|x+1|<\delta$

Basta fazer $\delta=\frac{\varepsilon}{3}=\frac{0{,}5}{3}=0{,}166...$

13 - $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$, $\varepsilon = 0{,}001$

Dado $\varepsilon = 0{,}1$ existe um $\delta>0$ tal que

$\left|\frac{x^2-4}{x+2}+4\right|<\varepsilon$ sempre que $0<|x+2|<\delta$

$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}+4\right|<\varepsilon$

$|x+2|<\varepsilon, x\neq -2$

Basta fazer $\delta=\varepsilon=0{,}1$

14 - $\lim_{x\to 5}\frac{1}{2-x}=\frac{-1}{3}$, $\varepsilon = 0{,}25$

Dado $\varepsilon = 0{,}25$, existe $\delta>0$ tal que

$\left|\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-5|<\delta$

Temos,

$\left|\frac{3+(2-x)}{3(2-x)}\right|=\left|\frac{3+2-x}{3(2-x)}\right|=\left|\frac{5-x}{3(2-x)}\right|=\left|\frac{x-5}{3(x-2)}\right|$, $x\neq 2$

Supondo $0<\delta\leq 1$, da desigualdade $0<|x-5|<\delta$, segue que

$|x-5|<1$

$-1<x-5<1$

$4<x<6$

$2<x-2<4$

$2<|x-2|<4$

$\frac{1}{2}>\frac{1}{|x-2|}>\frac{1}{4}$

Portanto,

$$\left|\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{x-5}{3(x-2)}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{1}{x-2}\right||x-5|<\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}|x-5|=\frac{1}{6}|x-5|$$

Então $\delta=\min\{6\times 0{,}25;1\}=1$

15 - $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \qquad \varepsilon=0{,}75$

Dado $\varepsilon=0{,}75$ existe um $\delta>0$ tal que

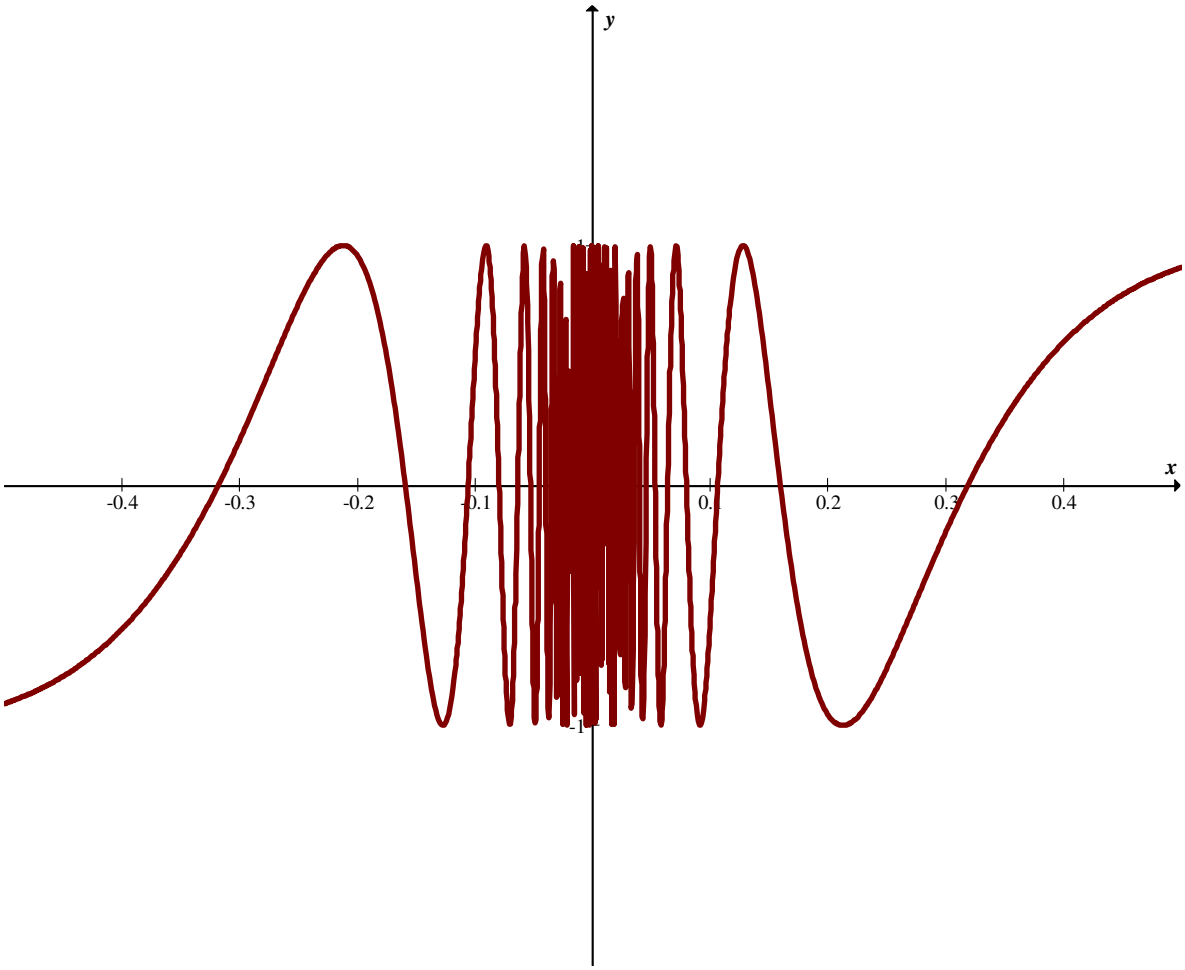
$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-1|<\delta$

$\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$, para $x\neq 1$.

Basta fazer $\delta=\varepsilon=0{,}75$

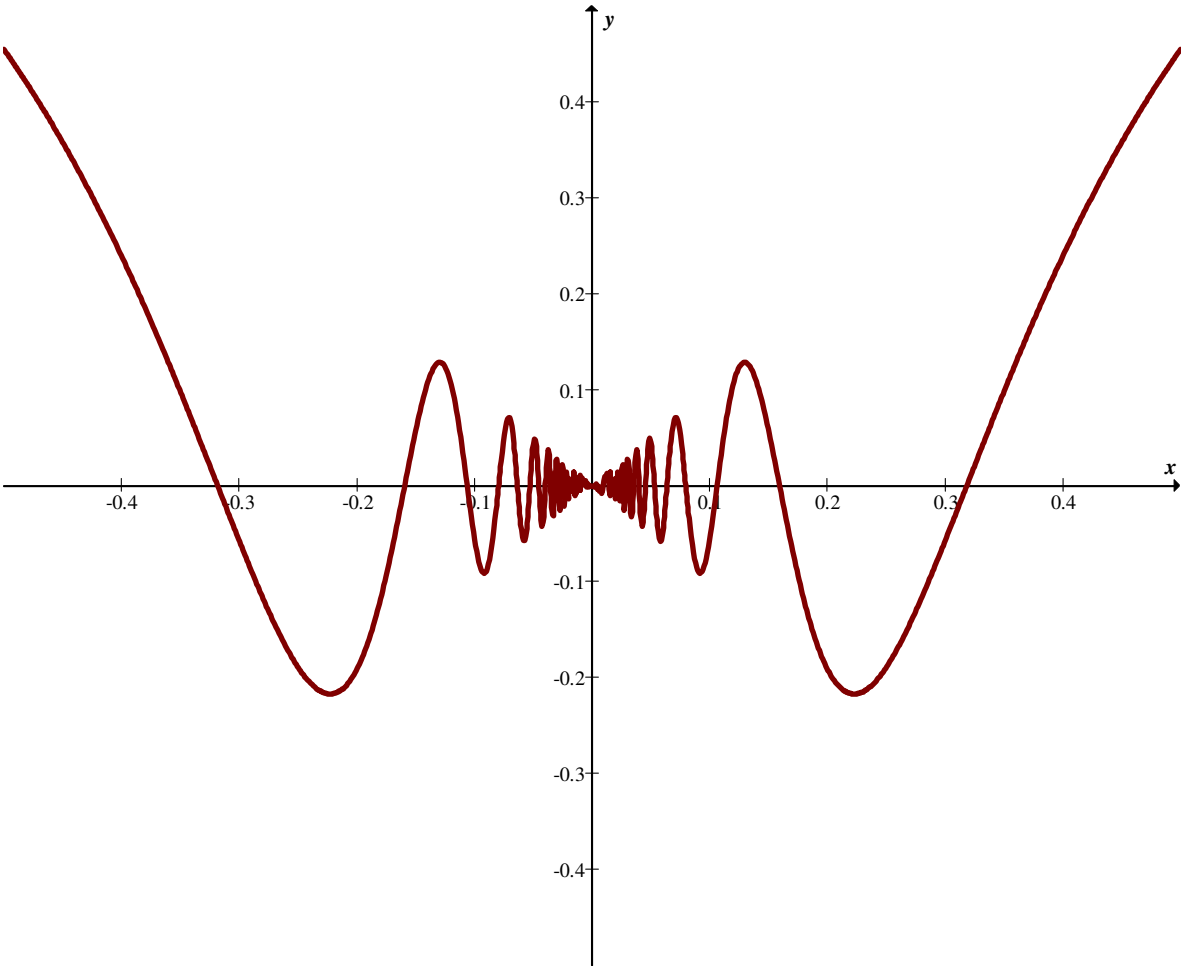
16 – Fazer o gráfico das funções $y=f(x)$ dadas, explorando diversas escalas para visualizar melhor o gráfico numa vizinhança da origem. Observando o gráfico, qual a sua conjectura sobre o $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$? Comprove analiticamente se a sua conjectura é verdadeira.

(a) $f(x)=sen\frac{1}{x}$



Analisando graficamente, afirmamos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

(b) $f(x) = x\,sen\dfrac{1}{x}$



Analisando graficamente, afirmamos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ é igual a zero. Analiticamente temos:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot sen\frac{1}{x} = 0$$

De fato, a função seno tem os valores entre -1 e 1. Então $-1 \le sen\frac{1}{x} \le 1$, $\forall\ x \neq 0$.

Multiplicando a desigualdade por $x > 0$, vem:

$$-x \le xsen\frac{1}{x} < x\ , \forall\ x > 0$$

Como $\lim_{x\to 0^+} x = 0$

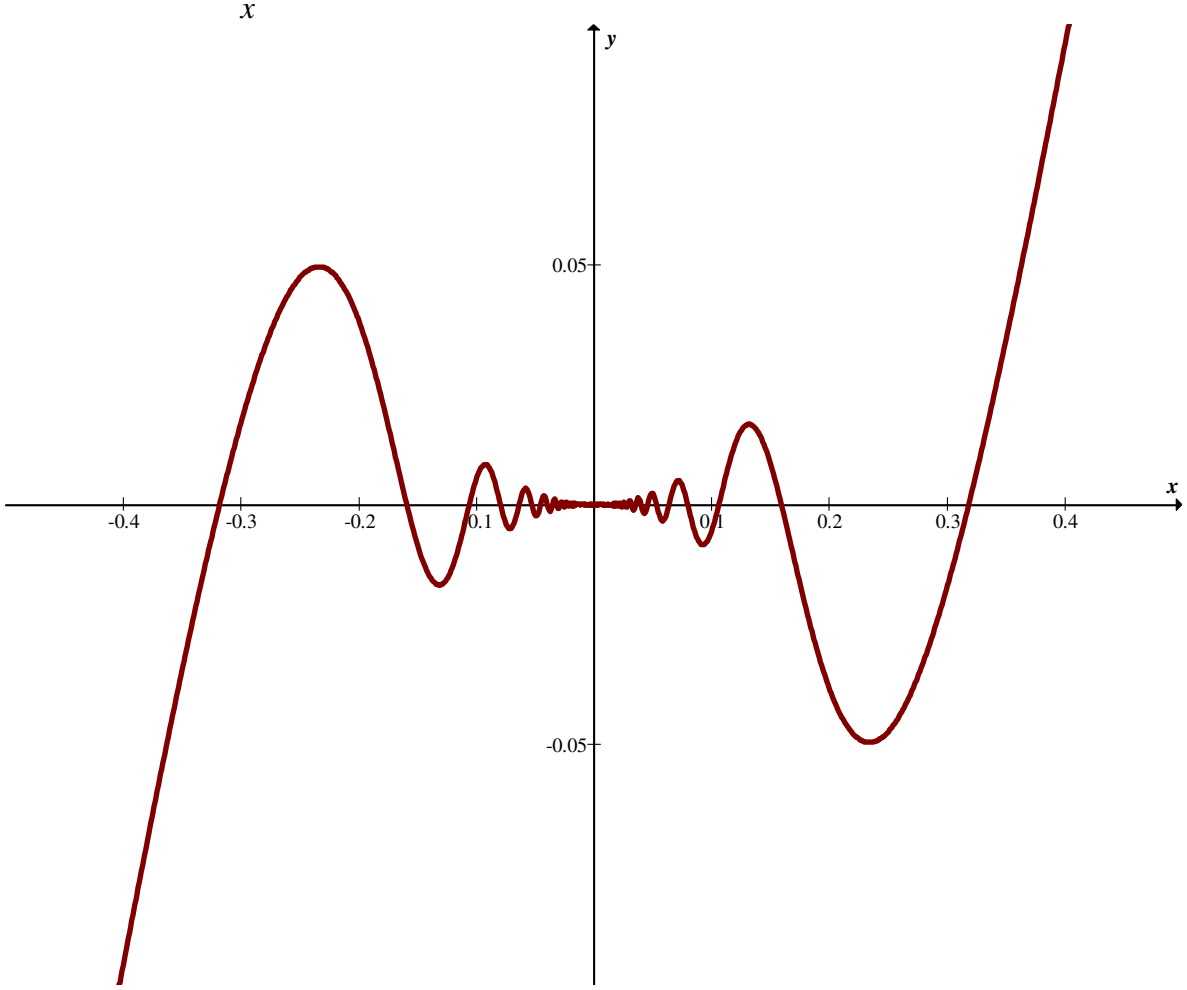
$\lim_{x\to 0^+} -x = 0$

Pela regra do sanduíche segue que $\lim_{x\to 0^+} xsen\frac{1}{x} = 0$.

Analogamente, obtém-se que $\lim_{x\to 0^-} x sen\frac{1}{x} = 0$.

.

(c) $f(x) = x^2 sen\frac{1}{x}$



Analisando graficamente, afirmamos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ é igual a zero. Analiticamente temos:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot sen\frac{1}{x} = 0$$

A função seno tem os valores entre -1 e 1. Então $-1 \le sen\frac{1}{x} \le 1, \quad \forall\ x \neq 0$

Multiplicando a desigualdade por $x^2 > 0$, vem:

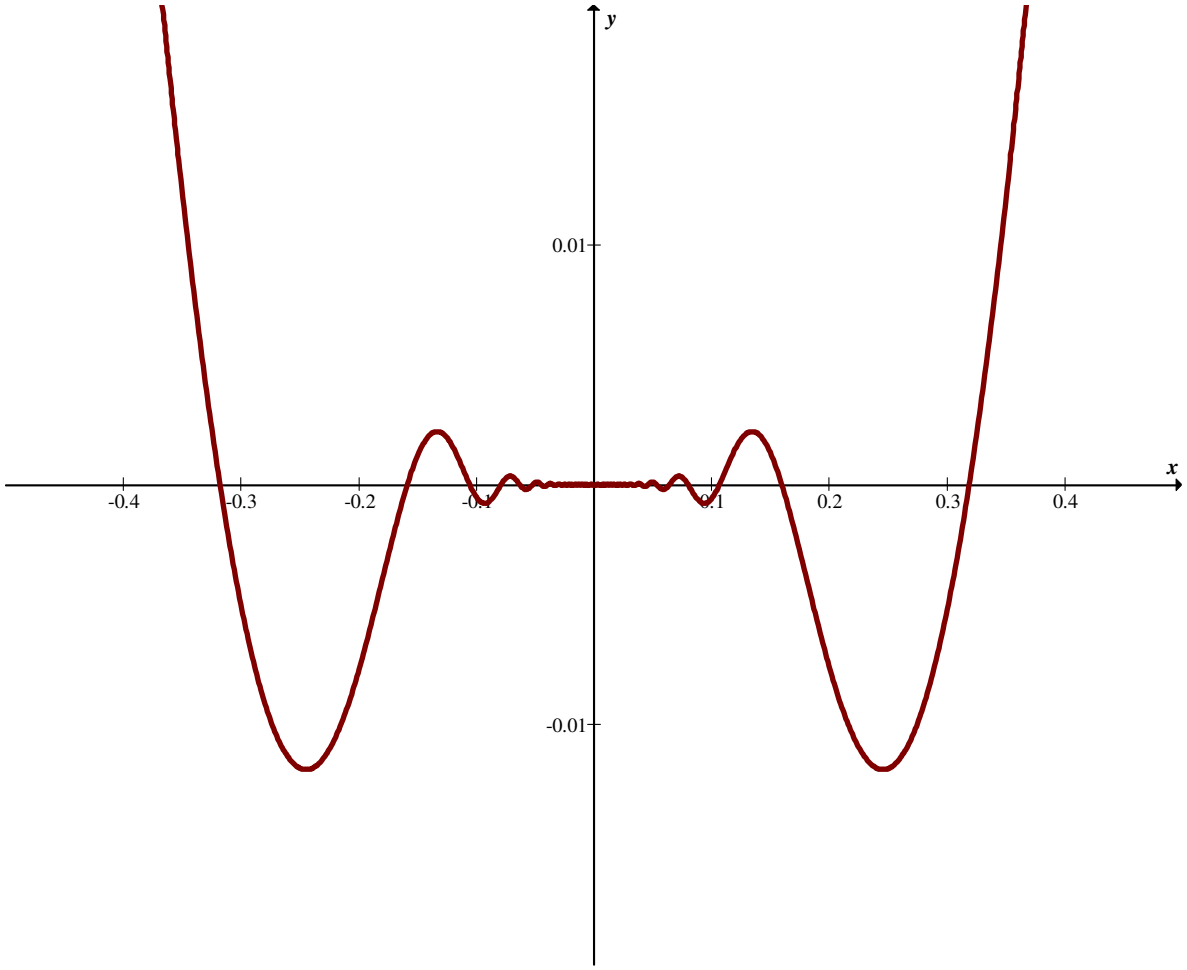
$$-x^2 \le x^2 sen\frac{1}{x} \le x^2,\ \forall\ x \neq 0$$

Como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$, usando a Regra do Sanduíche, concluímos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot sen\frac{1}{x} = 0$$

.

(d) $f(x) = x^3\, sen\frac{1}{x}$



Analisando graficamente, afirmamos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ é igual a zero. Analiticamente, prova-se que $\lim_{x\to 0} x^3 \cdot sen\frac{1}{x} = 0$, da mesma forma utilizada no item (b).

17 - Mostrar que:

(i) Se f é uma função polinomial, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ para todo real a.

Se f é uma função polinomial, pode ser escrita como

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n \text{ com } a_1, a_2, ..., a_n \in R$$

Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)$$

$$\begin{cases} = \lim_{x\to a} a_0 + \lim_{x\to a} a_1x + \lim_{x\to a} a_2x^2 + ... + \lim_{x\to a} a_nx^n \\ = a_0 + a_1 \lim_{x\to a} x + a_2 \lim_{x\to a} x^2 + ... + a_n \lim_{x\to a} x^n \\ = a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + ... + a_n a^n \\ = f(a) \end{cases}$$

(ii) Se g é uma função racional e $a \in D(g)$, então $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

Se g é uma função racional ela é da forma

$g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios reais e $D(g) = \{x / x \in R \text{ e } Q(x) \neq 0\}$

Assim,

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to a} P(x)}{\lim_{x\to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

$= g(a)$ já que $a \in D(g)$, e, portanto, $Q(a) \neq 0$.

Calcular os limites nos exercícios 18 a 37 usando as propriedades de Limites.

18 - $\lim_{x\to 0}(3 - 7x - 5x^2) = 3 - 7.0 - 5.0^2 = 3$

19 - $\lim_{x\to 3}(3x^2 - 7x + 2) = 3 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 2$

$= 27 - 21 + 2$

$= 8$

20 - $\lim_{x\to -1}(-x^5 + 6x^4 + 2) = -(-1)^5 + 6(-1)^4 + 2$

$= 1 + 6 + 2$

$= 9$

21 - $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(2x + 7) = 2.\dfrac{1}{2} + 7 = 8$

22 - $\lim_{x\to -1}\left[(x+4)^3 \cdot (x+2)^{-1}\right] = (-1+4)^3 \cdot (-1+2)^{-1}$

$$= 27 \cdot 1 = 27$$

23 - $\lim_{x\to 0}\left[(x-2)^{10}\cdot(x+4)\right] = (0-2)^{10}\cdot(0+4)$

$$= (-2)^{10}\cdot 4$$

$$= 4\cdot 2^{10} = 2^{12} = 4096.$$

24 - $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+4}{3x-1} = \dfrac{2+4}{3\cdot 2-1} = \dfrac{6}{5}$

25 - $\lim_{t\to 2}\dfrac{t+3}{t+2} = \dfrac{2+3}{2+2} = \dfrac{5}{4}$

26 - $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$

27 - $\lim_{t\to 2}\dfrac{t^2+5t+6}{t+2} = \dfrac{2^2+5\cdot 2+6}{2+2} = \dfrac{4+10+6}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$

28 - $\lim_{t\to 2}\dfrac{t^2-5t+6}{t-2} = \lim_{t\to 2}\dfrac{(t-2)(t-3)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t-3) = -1$

29 - $\lim_{s\to \frac{1}{2}}\dfrac{s+4}{2s} = \dfrac{\frac{1}{2}+4}{2\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1+8}{2}}{1} = \dfrac{9}{2}$

30 - $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{2\cdot 4+3} = \sqrt[3]{11}$

31 - $\lim_{x\to 7}(3x+2)^{\frac{2}{3}} = (3\cdot 7+2)^{\frac{2}{3}} = 23^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{23^2}$

32 - $\lim_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^2-x}{3x} = \dfrac{2(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{(4-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{3\cdot 2} = \dfrac{2(2\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

33 - $\lim_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{2}}{3x-4} = \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3\cdot 2-4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

34 - $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[2senx-\cos x+\cot gx\right] = 2\ sen\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{2}+\cot g\dfrac{\pi}{2} = 2\cdot 1-0+0 = 2$

35 - $\lim_{x\to 4}(e^x+4x) = e^4+4\cdot 4 = e^4+16$

36 - $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} (2x+3)^{\frac{1}{4}} = \left(2\cdot -\frac{1}{3}+3\right)^{\frac{1}{4}} = \left(-\frac{2}{3}+3\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{-2+9}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{7}{3}}$

37 - $\lim_{x\to 2} \frac{senhx}{4} = \frac{senh2}{4}$.

3.8 – EXERCÍCIO – pg. 79

1 - Seja $f(x)=\begin{cases} x-1 & , x \le 3 \\ 3x-7 & , x > 3 \end{cases}$

Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x-1) = 3-1 = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(3x-7) = 3\cdot 3-7 = 2$

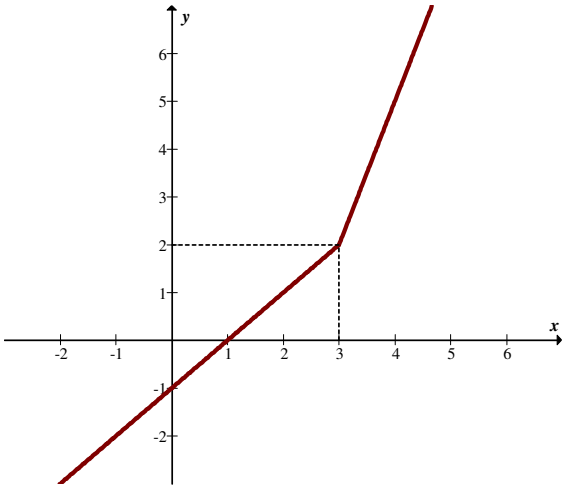
(c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3\cdot 5-7 = 8$

(e) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 8$

(f) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 8$

Esboçar o gráfico de $f(x)$.

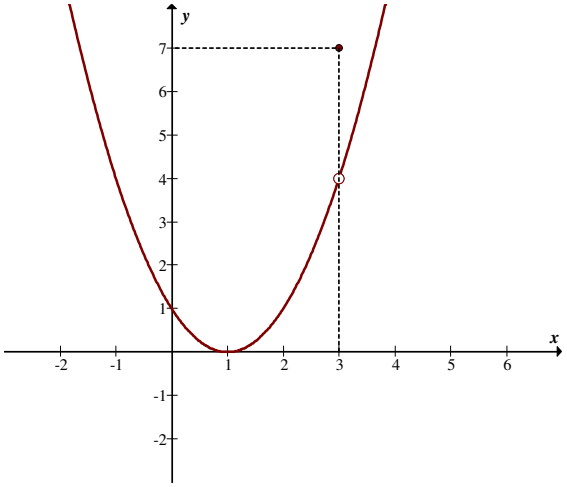


2 – Seja $h(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & , x \ne 3 \\ 7 & , x = 3 \end{cases}$

Calcule $\lim_{x\to 3} h(x)$. Esboce o gráfico de *h(x).*

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^-} h(x) = 4\\ \lim_{x\to 3^+} h(x) = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} h(x) = 4$$

Segue o gráfico



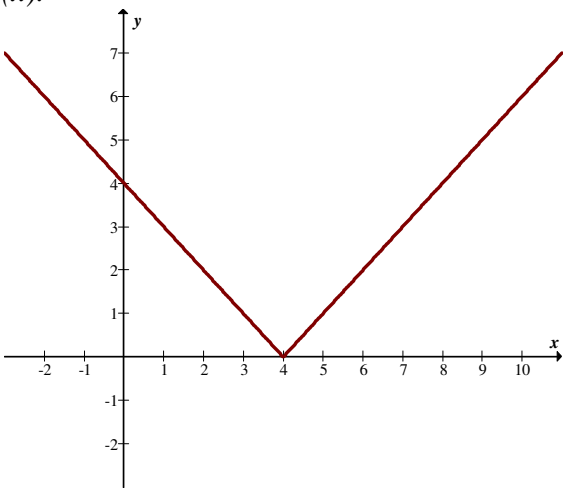
3 – Seja $F(x) = |x-4|$. Calcule os limites indicados se existirem:

(a) $\lim_{x\to 4^+} F(x) = \lim_{x\to 4^+} (x-4) = 0$

(b) $\lim_{x\to 4^-} F(x) = \lim_{x\to 4^-} (-x+4) = 0$

(c) $\lim_{x\to 4} F(x) = 0$

Esboce o gráfico de *F(x).*



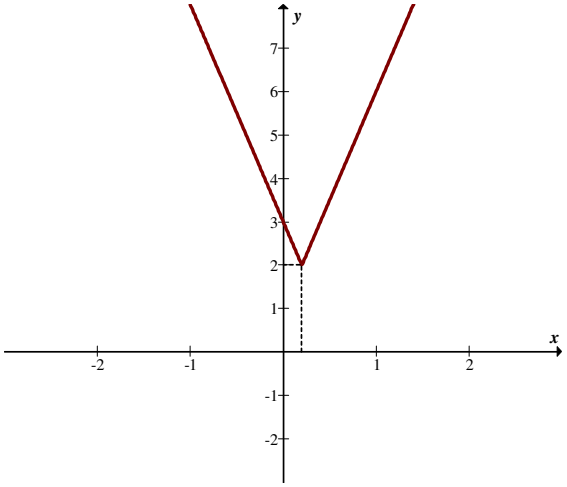
4 – Seja $f(x) = 2 + |5x - 1|$. Calcule se existir:

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^+} [2 + (5x - 1)] = 2 + \cancel{5} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} - 1 = 2$

(b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^-} [2 - (5x - 1)] = 2 - (\cancel{5} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} - 1) = 2 - 0 = 2$

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}} f(x) = 2$

Esboce o gráfico de *f(x).*

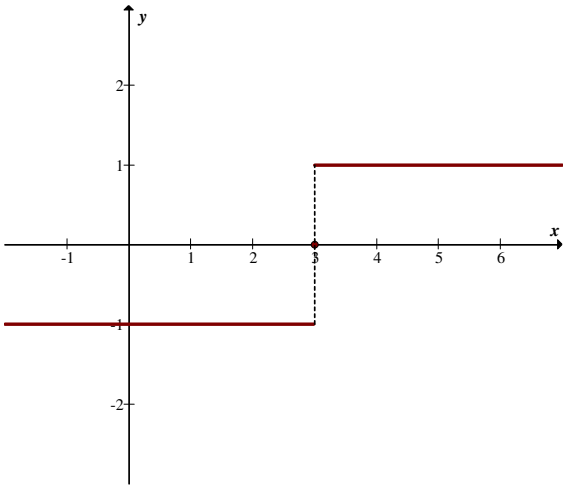


5 - Seja $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$

(a) Esboce o gráfico de *g(x)*

(b) Achar $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$

(a) Segue o gráfico da função dada



(b) $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$; $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$ $\lim_{x\to 3} g(x) \nexists$

6 – Seja $h(x) = \begin{cases} x/|x| & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$

Mostrar que *h(x)* não tem limite no ponto 0.

Temos que:

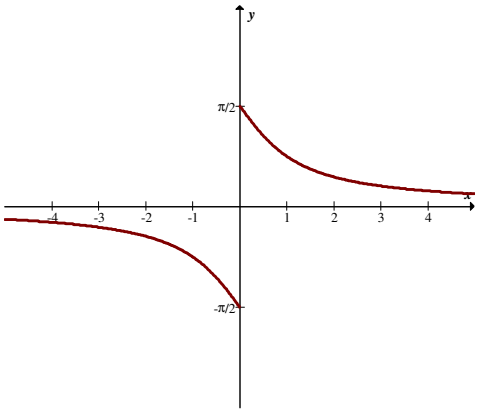
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} h(x), \text{ pois } \lim_{x\to 0^+} h(x) \neq \lim_{x\to 0^-} h(x).$$

7 – Determinar os limites à direita e à esquerda da função $f(x) = arcxtg\frac{1}{x}$ quando $x \to 0$.

Temos que:

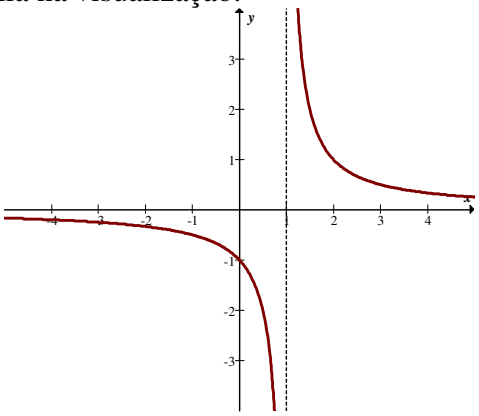
$$\lim_{x\to 0^+} = arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^-} = arctg\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

O gráfico que segue ilustra esse exercício.



8 – Verifique se $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ existe.

O gráfico que segue auxilia na visualização:



Temos que:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

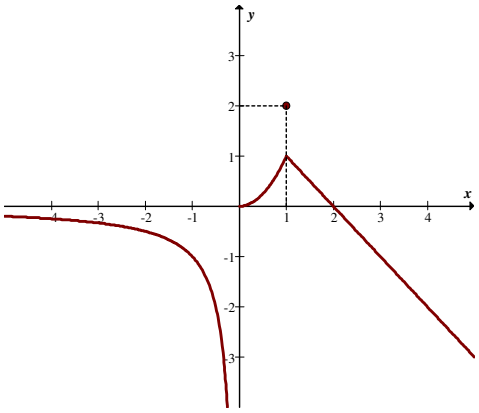
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

Segue que não existe o $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$.

9 – Dada $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ,\ x<0\\ x^2 & ,\ 0\le x<1\\ 2 & ,\ x=1\\ 2-x & ,\ x>1\end{cases}$.

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados, se existirem:

Segue o gráfico



(a) $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x} = -1$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) = \left\{ \begin{matrix} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \end{matrix} \right\} = 1$

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

(d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

(e) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ∄

(f) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

(g) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

(h) $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

10 – Seja $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$.

Calcule os limites indicados, se existirem:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = 5$

(b)

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = 10$

(c) $\lim_{x\to -5^-} f(x) = 0$

(d) $\lim_{x\to 5} f(x) = 10$

(e) $\lim_{x\to -5} f(x) = 0$

4.12 – EXERCÍCIOS – pg. 138

Nos exercícios de 1 à 22 encontrar a derivada das funções dadas. A seguir, comparar os resultados encontrados com os resultados obtidos a partir do uso de um software algébrico.

1- $f(r) = \pi r^2$

$f'(r) = 2\pi r$

2- $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

$f'(x) = 6x + 6$

3- $f(w) = aw^2 + b$

$f'(w) = 2aw$

4- $f(x) = 14 - \frac{1}{2}x^{-3}$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{-4}$

5- $f(x) = (2x+1)\,(3x^2+6)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)\,.\,6x + (3x^2+6).2 \\ &= 12x^2 + 6x + 6x^2 + 12 \\ &= 18x^2 + 6x + 12 \end{aligned}$$

6- $f(x) = (7x-1)\,(x+4)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (7x-1).1 + (x+4).7 \\ &= 7x - 1 + 7x + 28 \\ &= 14x + 27 \end{aligned}$$

7- $f(x) = (3x^5 - 1)\,(2 - x^4)$

$$f'(x) = (3x^5 - 1)\,(-4x^3) + (2 - x^4)\,.\,15x^4$$
$$= -12x^8 + 4x^3 + 30x^4 - 15x^8$$
$$= -27x^8 + 30x^4 + 4x^3$$

8- $f(x) = \frac{4}{6}(5x-3)^{-1}\,(5x+3)$

$$f(x) = \frac{4}{6}\,\frac{(5x+3)}{(5x-3)}$$

$$f'(x) = \frac{4}{6}\,\frac{(5x-3)\,.\,5 - (5x+3)\,.\,5}{(5x-3)^2}$$
$$= \frac{4}{6}\,\frac{25x - 15 - 25x - 15}{(5x-3)^2}$$
$$= \frac{4}{6}\,\frac{-30}{(5x-3)^2} = \frac{-20}{(5x-3)^2}$$

9- $f(x) = (x-1)\,(x+1)$

$$f'(x) = (x-1).1 + (x+1).1$$
$$= x - 1 + x + 1$$
$$= 2x$$

10- $f(s) = (s^2 - 1)\,(3s-1)\,(5s^3 + 2s)$

$$f'(s) = (s^2 - 1)\left[(3s-1)\,(15s^2 + 2) + (5s^3 + 2s)3\right] + (3s-1)\,(5s^3 + 2s)2s$$
$$= (s^2 - 1)\,(3s-1)\,(15s^2 + 2) + 3(s^2 - 1)\,(5s^3 + 2s) + 2s(3s-1)\,(5s^3 + 2s)$$

11- $f(x) = 7(ax^2 + bx + c)$

$$f'(x) = 7(2ax + b)$$

12- $f(u) = (4u^2 - a)\,(a - 2u)$

$$f'(u) = (4u^2 - a)\,(-2) + (a - 2u)8u$$
$$= -8u^2 + 2a + 8au - 16u^2$$
$$= -24u^2 + 8au + 2a$$

13- $f(x)=\dfrac{2x+4}{3x-1}$

$$f'(x)=\frac{(3x-1).2-(2x+4).3}{(3x-1)^2}$$
$$=\frac{6x-2-6x-12}{(3x-1)^2}$$
$$=\frac{-14}{(3x-1)^2}$$

14- $f(t)=\dfrac{t-1}{t+1}$

$$f'(t)=\frac{(t+1).1-(t-1).1}{(t+1)^2}$$
$$=\frac{t+1-t+1}{(t+1)^2}=\frac{2}{(t+1)^2}$$

15. $f(t)=\dfrac{3t^2+5t-1}{t-1}$

$$f'(t)=\frac{(t-1)\,(6t+5)-(3t^2+5t-1).1}{(t-1)^2}$$
$$=\frac{3t^2-6t-4}{(t-1)^2}$$

16- $f(t)=\dfrac{2-t^2}{t-2}$

$$f'(t)=\frac{(t-2)\,(-2t)-(2-t^2).1}{(t-2)^2}$$
$$=\frac{-2t^2+4t-2+t^2}{(t-2)^2}$$
$$=\frac{-t^2+4t-2}{(t-2)^2}$$
$$=\frac{-t^2+4t-2}{t^2-4t+4}$$

17- $f(x)=\dfrac{4-x}{5-x^2}$

$$f'(x)=\frac{(5-x^2)\,(-1)-(4-x)\,(-2x)}{(5-x^2)^2}$$
$$=\frac{-5+x^2+8x-2x^2}{(5-x^2)^2}$$
$$=\frac{-x^2+8x-5}{(5-x^2)^2}$$

18- $f(x)=\dfrac{5x+7}{2x-2}$

$$f'(x)=\frac{(2x-2).5-(5x+7).2}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{10x-10-10x-14}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{-24}{(2x-2)^2}$$

19- $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)(3x^2+6x)$

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)(6x+6)+(3x^2+6x)\,\frac{(x+2).1-(x+1).1}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x+1}{x+2}.(6x+6)+(3x^2+6x)\,\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{(x+1)\,(6x+6)}{x+2}+\frac{3x^2+6x}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{(x+2)(x+1)(6x+6)+3x^2+6x}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{6x^3+24x^2+30x+12+3x^2+6x}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{6x^3+27x^2+36x+12}{(x+2)^2}$$

20- $f(t)=\dfrac{(t-a)^2}{t-b}$

$$f'(t) = \frac{t^2 - 2at + a^2}{t - b}$$

$$= \frac{(t-b)\,(2t-2a) - (t^2 - 2at + a^2)}{(t-b)^2}$$

$$= \frac{2t^2 - 2at - 2bt + 2ab - t^2 + 2at - a^2}{(t-b)^2}$$

$$= \frac{t^2 - 2bt - a^2 + 2ab}{(t-b)^2}$$

21- $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5}$

$$f'(x) = \frac{-3.4x^3}{x^8} + \frac{-5.5x^4}{x^{10}}$$

$$= \frac{-12}{x^5} - \frac{25}{x^6}$$

22- $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{x^6}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}4x^3 + \frac{-2.6x^5}{x^{12}}$$

$$= 2x^3 - \frac{12}{x^7}$$

23- Seja $p(x) = (x-a)\,(x-b)$, sendo a e b constantes. Mostrar que, se $a \neq b$, então $p(a) = p(b) = 0$ mas $p'(a) \neq 0$ e $p'(b) \neq 0$.

$$p(a) = (a-a)\,(a-b) = 0$$

$$p(b) = (b-a)\,(b-b) = 0$$

$$p'(x) = (x-a).1 + (x-b).1$$

$$= x - a + x - b$$

$$= 2x - a - b$$

$$p'(a) = 2.a - a - b = a - b \neq 0 \quad p/\, a \neq b$$

$$p'(b) = 2.b - a - b = b - a \neq 0 \quad p/\, a \neq b.$$

24- Dadas as funções $f(x)=x^2+Ax$ e $g(x)=Bx$, determinar A e B de tal forma que

$$\begin{cases} f'(x)+g'(x)=1+2x \\ f(x)-g(x)=x^2 \end{cases}$$

Temos,

$f'(x)=2x+A$

$g'(x)=B$

$$\begin{cases} f'(x)+g'(x)=2x+A+B=1+2x \\ f(x)-g(x)=x^2+Ax-Bx=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} A+B=1 \\ A-B=0 \\ \hline 2A=1 \therefore A=\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

25- Dada a função $f(t)=3t^3-4t+1$, encontrar $f(0)-tf'(0)$

$f'(t)=9t^2-4$

$f'(0)=-4$

$f(0)=1$

$$f(0)-t\ f'(0)=1-t\ (-4)$$
$$=4t+1$$

26- Encontrar a equação da reta tangente à curva $y=\frac{2x+1}{3x-4}$ no ponto de abscissa $x=-1$. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico da função e da reta tangente.

$$y=\frac{2x+1}{3x-4}$$

$$y'=\frac{(3x-4)2-(2x+1)3}{(3x-4)^2}$$
$$=\frac{6x-8-6x-3}{(3x-4)^2}$$
$$=\frac{-11}{(3x-4)^2}$$

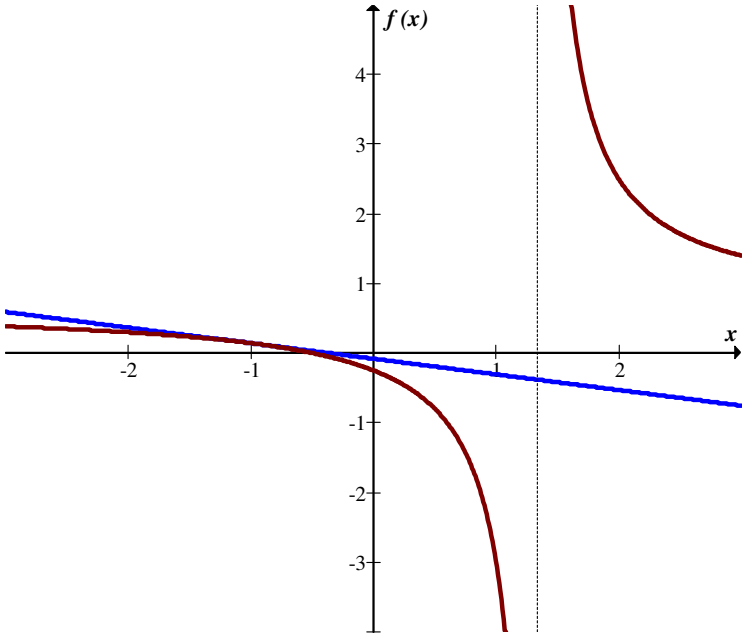
$$m(-1) = \frac{-11}{(-3-4)^2} = \frac{-11}{49}$$

$$x = -1 \Rightarrow \quad y = \frac{-2+1}{-3-4} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

$$y - \frac{1}{7} = \frac{-11}{49}(x+1)$$

$$49y - 7 = -11x - 11$$

$$11x + 49y + 4 = 0$$



27- Encontrar a equação da reta normal a curva $y = (3x^2 - 4x)^2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

$$y = (3x^2 - 4x)^2 = 9x^4 - 24x^3 + 16x^2$$

$$y' = 36x^3 - 72x^2 + 32x$$

$$m(2) = 36.2^3 - 72.2^2 + 32.2$$
$$= 64$$

$$m_n = -\frac{1}{64}$$

$$p/\, x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = (3.2^2 - 4.2)^2 = 16$$

Equação da reta normal:

$$y-16=-\frac{1}{64}(x-2)$$
$$x+64y-1026=0$$

28- Encontrar as equações das retas tangentes à curva $y=\frac{x-1}{x+1}$ que sejam paralelas a reta $y=x$. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico da curva, da reta data e das tangentes encontradas.

$$y=\frac{x-1}{x+1}$$

$$y'=\frac{(x+1).1-(x-1).1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$m_t=1$$

$$m(x)=\frac{2}{(x+1)^2}=1$$
$$(x+1)^2=2$$
$$x^2+2x+1-2=0$$
$$x^2+2x-1=0$$

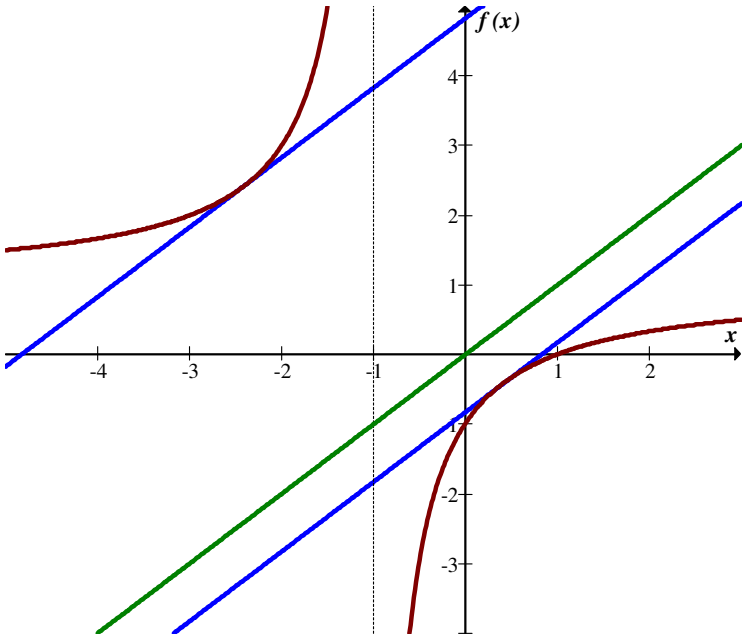
$$\begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$p/\,x=-1+\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-1+\sqrt{2}-1}{-1+\sqrt{2}+1}=\frac{-2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+1$$
$$p/\,x=-1-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-1-\sqrt{2}-1}{-1-\sqrt{2}+1}=\frac{-2-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$$
$$y-(-\sqrt{2}+1)=1(x+1-\sqrt{2})$$
$$x-y+2-2\sqrt{2}=0$$

Para a segunda reta temos:

$$y-(\sqrt{2}+1)=1(x+1+\sqrt{2})$$

$x - y + 2 + 2\sqrt{2} = 0.$



29- Em que pontos o gráfico da função $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$ tem tangente horizontal? Esboçar o gráfico e analisar o resultado obtido.

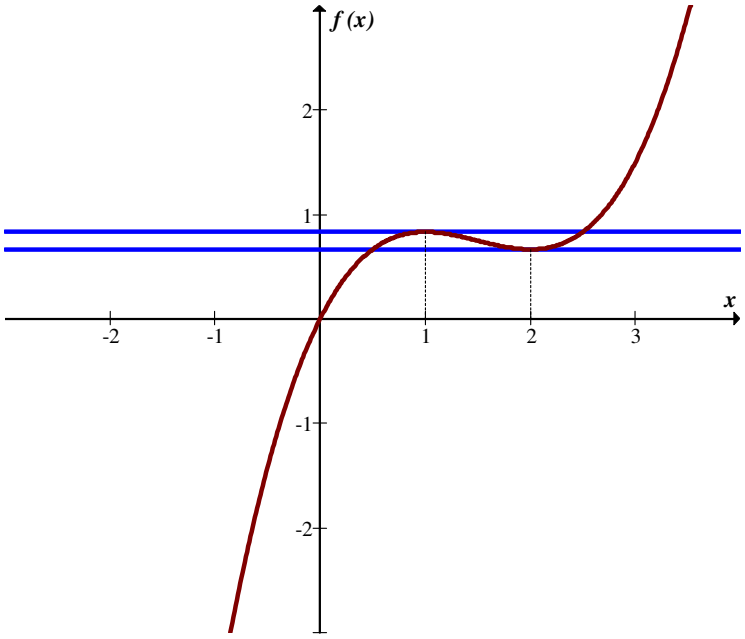
$$y' = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{3}{2}2x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

$$y' = x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

Pontos $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ $\left(1, \frac{5}{6}\right)$



30- Seja $y = ax^2 + bx$. Encontrar os valores de a e b, sabendo que a tangente à curva no ponto $(1,5)$ tem inclinação $m = 8$.

$$y' = 2ax + b$$

$$\begin{cases} m(1) = 2a + b = 8 \\ f(1) = a + b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ -a - b = -5 \end{cases} \Rightarrow b = 5 - a$$

$$a = 3$$

$$b = 5 - 3$$

$$b = 2$$

4.16 – EXERCÍCIOS – pg. 159

1. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

(a) $f(x)=\frac{1}{x}$; $x=\frac{1}{3}, x=3.$

$m(x)=f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

Considerando $x=\frac{1}{3}$,

$m\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{-1}{\left(\frac{1}{9}\right)}=-9$.

$p/\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3$.

Assim,

$y-3=-9\left(x-\frac{1}{3}\right)$

$y-3=-9x+3$

$9x+y-6=0$

Considerando $x=3$,

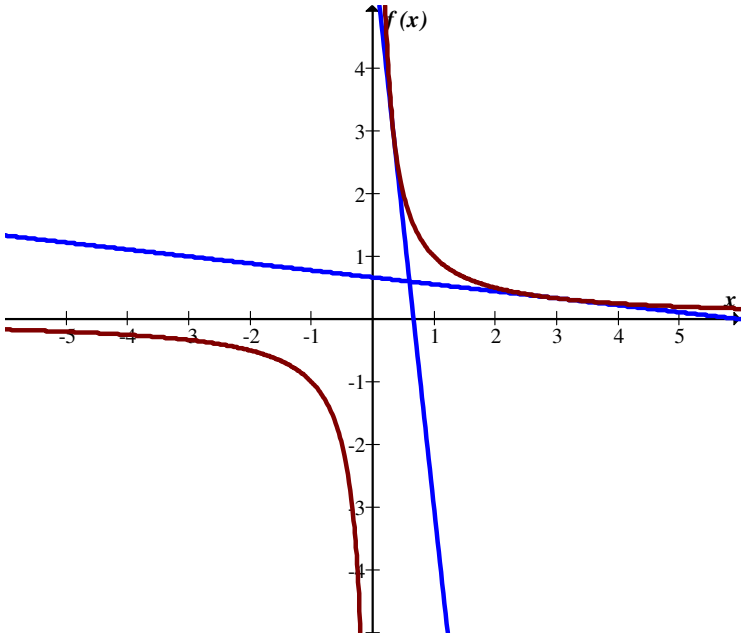
$m(3)=\frac{-1}{3^2}=\frac{-1}{9}$ $\qquad$ $p/\ x=3\Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$y-\frac{1}{3}=\frac{-1}{9}(x-3)$

$9y-3=-x+3$

$x+9y-6=0$

Segue o gráfico:



(b) $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$, $a\in R-\{-2,4\}$; $x=-2, x=4$.

Temos que:

$$m(x)=f'(x)=\frac{-1}{(x-a)^2}.$$

Para $x=-2$ temos:

$$m(-2)=\frac{-1}{(-2-a)^2}=\frac{-1}{(2+a)^2}.$$

$$p/\,x=-2\Rightarrow y=\frac{1}{-2-a}=\frac{-1}{2+a}$$

Assim,

$$y+\frac{1}{2+a}=\frac{-1}{(2+a)^2}(x+2)$$

$$(2+a)^2 y+2+a=-x-2$$

$$x+(2+a)^2 y+4+a=0.$$

Para $x=4$ temos:

$$m(4)=\frac{-1}{(4-a)^2}$$

$$p/\,x=4\Rightarrow y=\frac{1}{4-a}$$

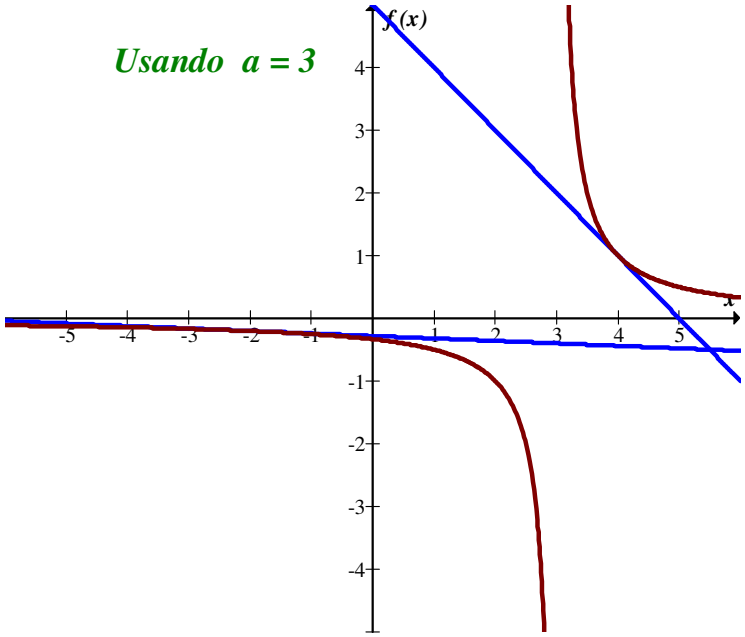
Assim,

$$y-\frac{1}{4-a}=\frac{-1}{(4-a)^2}(x-4)$$

$$(4-a)^2 y-(4-a)=-x+4$$

$$x+(4-a)^2 y-8+a=0.$$

Segue o gráfico:



(c) $f(x)=2\sqrt{x}\,;\ x=0, x=3, x=a, a>0.$

Temos que:

$$m(x)=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Para $x=0$, temos

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2\sqrt{\Delta x}-0}{\Delta x}=\infty$$

Portanto, usando 4.1.2, segue que $x=0$ é a equação da reta tangente.

Para $x=3$ temos:

$$m(3)=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{e}$$

$$p/\,x=3\Rightarrow y=2\sqrt{3}\,.$$

Assim,

$$y-2\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)$$

$$\sqrt{3}y-6=x-3$$

$$x-\sqrt{3}y+3=0$$

Para $x=a$ temos:

$m(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}$ e

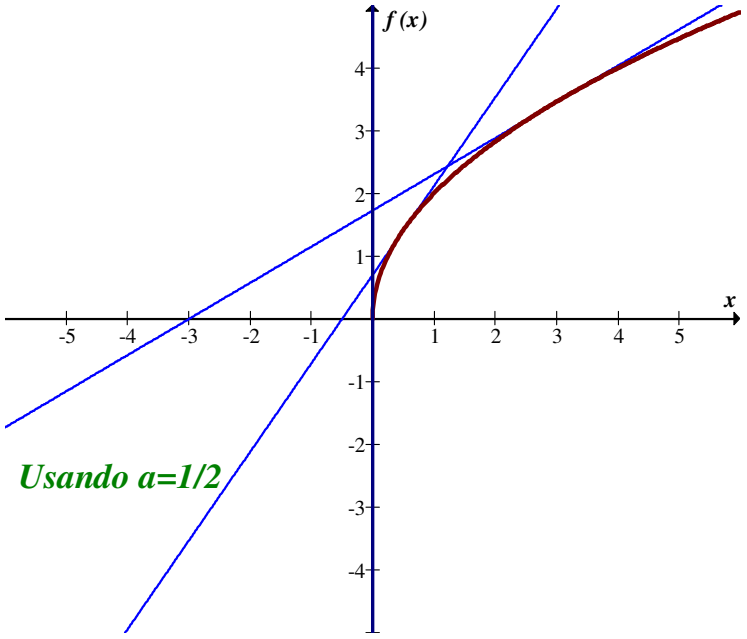
$p/\ x=a \Rightarrow y=2\sqrt{a}, \qquad a>0.$

Assim,

$$y-2\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}(x-a)$$

$\sqrt{a}\,y-2a=x-a \quad ou \quad x-\sqrt{a}\,y+a=0.$

Segue o gráfico.



2. Encontrar a equação da reta tangente à curva $y=x^3-1,$ que seja perpendicular à reta $y=-x.$

$m\,(x)=3x^2$

A declividade da reta dada é $m=-1$. Assim a declividade da perpendicular à reta $y=-x$ será $m=1$. Temos,

$$3x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{3}$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p/\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-1$$
$$y-\frac{1}{3\sqrt{3}}+1=1\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$3\sqrt{3}y-1+3\sqrt{3}=x.3\sqrt{3}-3$$
$$3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}y-3\sqrt{3}-2=0$$

$$p/\,x=\frac{-1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3-1$$
$$y+\frac{1}{3\sqrt{3}}+1=1\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$3\sqrt{3}y+1+3\sqrt{3}=3\sqrt{3}\;x+3$$
$$3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}y-3\sqrt{3}+2=0.$$

3. A posição de uma partícula que se move no eixo dos x depende do tempo de acordo com a equação $x(t)=3t^2-t^3$, em que x vem expresso em metros e t em segundos.

(a) Qual é o seu deslocamento depois dos primeiros 4 segundos?

$$x(t)=3t^2-t^3$$
$$x(4)=3.4^2-4^3=3.16-64=-16m.$$

(b) Qual a velocidade da partícula ao terminar cada um dos 4 primeiros segundos?

$$v(t)=x^{'}(t)=6t-3t^2$$

$v(0) = 0\,m/s$
$v(1) = 6 - 3 = 3\,m/s$
$v(2) = 6.2 - 3.4 = 0\,m/s$
$v(3) = 6.3 - 3.9 = -9\,m/s$
$v(4) = 6.4 - 3.16 = -24\,m/s$.

(c) Qual é a aceleração da partícula em cada um dos 4 primeiros segundos?

$a(t) = v'(t) = 6 - 6t$
$a(0) = 6\,m/s^2$
$a(1) = 6 - 6 = 0\,m/s^2$
$a(2) = 6 - 6.2 = -6\,m/s^2$
$a(3) = 6 - 6.3 = -12\,m/s^2$
$a(4) = 6 - 6.4 = -18\,m/s^2$.

4. Um corpo cai livremente partindo do repouso. Calcule sua posição e sua velocidade depois de decorridos 1 e 2 segundos. (Da Física, use a equação $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ para determinar a posição y do corpo, onde v_0 é a velocidade inicial e $g \cong 9{,}8\ m/s^2$).

$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$
$y(1) = 0 - \frac{1}{2}.9.8.1 = -4{,}9m$
$v = \frac{dy}{dt} = v_o - gt = 0 - 9{,}8t$
$v(1) = 0 - 9{,}8.1 = -9{,}8\,m/s$
$y(2) = 0 - \frac{1}{2}.\ 9{,}8\ .\ 4$
$y(2) = -19{,}6m$
$v(2) = 0 - 9{,}8\ .\ 2$
$= -19{,}6\,m/s$

Nos exercícios de 5 a 42 calcular a derivada.

5. $f(x) = 10\,(3x^2 + 7x - 3)^{10}$

$f'(x) = 100\,(3x^2 + 7x - 3)^9\,(6x + 7)$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{a}(bx^2 + ax)^3$

$f'(x) = \dfrac{1}{a}.3\,(bx^2 + ax)^2\,(2bx + a)$.

7. $f(t) = (7t^2 + 6t)^7 (3t - 1)^4$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (7t^2 + 6t)^7 .4.\,(3t - 1)^3 .3 + (3t - 1)^4 .7\,(7t^2 + 6t)^6\,(14t + 6) \\ &= 12\,(7t^2 + 6t)^7\,(3t - 1)^3 + 7\,(3t - 1)^4\,(7t^2 + 6t)^6\,(14t + 6) \\ &= (7t^2 + 6t)^6\,(3t - 1)^3 \left[12\,(7t^2 + 6t) + 7(3t - 1)\,(14t + 6)\right] \end{aligned}$$

8. $f(t) = \left(\dfrac{7t + 1}{2t^2 + 3}\right)^3$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\left(\frac{7t + 1}{2t^2 + 3}\right)^2 .\frac{(2t^2 + 3)\,7 - (7t + 1)\,(4t)}{(2t^2 + 3)^2} \\ &= 3\,\frac{(7t + 1)^2}{(2t^2 + 3)^2} .\frac{14t^2 + 21 - 28t^2 - 4t}{(2t^2 + 3)^2} \\ &= \frac{3(7t + 1)^2 - (14t^2 - 4t + 21)}{(2t^2 + 3)^4} \end{aligned}$$

9. $f(x) = \sqrt[3]{\left(3x^2 + 6x - 2\right)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}\,(3x^2 + 6x - 2)^{\frac{-1}{3}}\,(6x + 6) \\ &= \frac{4\,(x + 1)}{\sqrt[3]{3x^2 + 6x - 2}} \end{aligned}$$

10. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3x-1}\,.\,2 - 2x\,.\,\frac{1}{2}\,(3x-1)^{-\frac{1}{2}}\,.\,3}{3x-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3x-1} - 3x\,(3x-1)^{-\frac{1}{2}}}{3x-1}$$

$$= \frac{3x-2}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$$

11. $f(t) = \sqrt{\dfrac{2t+1}{t-1}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2t+1}{t-1}\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{(t-1)\,.\,2 - (2t+1)\,.\,1}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2t-2-2t-1}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-3}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{(t-1)^{\frac{3}{2}}(2t+1)^{\frac{1}{2}}}$$

12. $f(x) == \dfrac{1}{3}e^{3-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,e^{3-x}\,(-1)$$

13. $f(x) = 2^{3x^2+6}$

$f'(x) = 2^{3x^2+6x} \,.\, (6x+6) \,.\, \ln 2$

14. $f(s) = \left(7s^2 + 6s - 1\right)^3 + 2e^{-3s}$

$$f'(s) = 3\,(7s^2+6s-1)^2\,(14s+6) + 2\,e^{-3s} \,.\, (-3)$$
$$= 3\,(7s^2+6s-1)^2\,(14s+6) - 6\,e^{-3s}$$

15. $f(t) = e^{t/2}\left(t^2 + 5t\right)$

$$f'(t) = e^{\frac{t}{2}} .(2t+5) + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}(t^2+5t)$$
$$f'(t) = e^{\frac{t}{2}} .\left[2t + 5 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t\right]$$
$$= e^{\frac{t}{2}} .\left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{9}{2}t + 5\right]$$

16. $f(x) = \log_2(2x+4)$

$$f'(x) = \frac{2}{2x+4} \,.\, \log_2 e$$

17. $f(s) = \log_3 \sqrt{s+1}$

$$f'(s) = \frac{\frac{1}{2}(s+1)^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{s+1}} \,.\, \log_3 e$$
$$= \frac{1}{2} \,.\, \frac{\log_3 e}{\sqrt{s+1} \,.\, \sqrt{s+1}}$$
$$= \frac{\log_3 e}{2\,(s+1)}$$

18. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{-x-2}{x^3}}{\frac{x+1}{x^2}}$$

$$= \frac{-x-2}{x^3} \cdot \frac{x^2}{x+1}$$

$$= \frac{-x-2}{x\,(x+1)}$$

19. $f(x) = \dfrac{a^{3x}}{b^{3x^2-6x}}$

$$f'(x) = \frac{b^{3x^2-6x} \,.\, a^{3x} \,.\, 3 \,.\, \ln a - a^{3x} \,.\, b^{3x^2-6x} \,.\, (6x-6) \ln b}{b^{2\,(3x^2-6x)}}$$

$$= \frac{b^{3x^2-6x} \left[3a^{3x} \ln a - a^{3x}\,(6x-6) \ln b\right]}{b^{2\,(3x^2-6x)}}$$

$$= \frac{3\,(\ln a)\, a^{3x} - a^{3x}\,(6x-6) \ln b}{b^{\,(3x^2-6x)}}$$

20. $f(t) = (2t+1)^{t^2-1}$

$$f'(t) = (2t+1)^{t^2-1} \,.\, \ln\,(2t+1) \,.\, 2t + (2t+1)^{t^2-2}\,(t^2-1) \,.\, 2$$

21. $f(s) = \dfrac{1}{2}(a+bs)^{\ln(a+bs)}$

$$f'(s) = \frac{1}{2}\,(a+bs)^{\ln\,(a+bs)} \,.\, \ln\,(a+bs).\frac{b}{a+bs} + \frac{1}{2} \ln\,(a+bs) \,.\, (a+bs)^{[\ln\,(a+bs)]-1} \,.\, b$$

$$= \frac{b\,(a+bs)^{\ln\,(a+bs)} \,.\, \ln\,(a+bs) + \ln\,(a+bs) \,.\, (a+bs)^{\ln\,(a+bs)} \,.\, b}{2\,(a+bs)}$$

$$= \frac{b\,(a+bs)^{\ln\,(a+bs)} \,.\, \ln\,(a+bs)}{a+bs}$$

22. $f(u) = \cos(\pi/2 - u)$

$$f'(u) = +sen\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

23. $f(\theta) = 2\cos\theta^2 .\, sen\, 2\theta$

$$f'(\theta) = 2\cos\theta^2 . \cos 2\theta . 2 + sen\ 2\theta . 2 . (-sen\ \theta^2) . 2\theta$$
$$= 4\cos\theta^2\ \cos 2\theta - 4\theta\ sen\ 2\theta\ sen\ \theta^2$$

24. $f(x) = sen^3(3x^2 + 6x)$

$$f'(x) = 3\ sen^2\ (3x^2 + 6x) . \cos (3x^2 + 6x) . (6x + 6)$$

25. $f(x) = 3\ tg\ (2x+1) + \sqrt{x}$

$$f'(x) = 3\sec^2(2x+1) . 2 + \frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$= 6\sec^2\ (2x+1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

26. $f(x) = \dfrac{3\sec^2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x . 3 . 2 . \sec x . \sec x . tg\ x - 3\sec^2 x}{x^2}$$
$$= \frac{6x\sec^2 x\ \ tg\ x - 3\sec^2 x}{x^2}$$

27. $f(x) = e^{2x}\cos 3x$

$$f'(x) = -e^{2x}\ sen\ 3x . 3 + \cos\ 3x . e^{2x} . 2$$
$$= -3\ e^{2x}\ sen\ 3x + 2\ e^{2x}\ \cos 3x$$
$$= e^{2x}\ [2\cos 3x - 3\ sen\ 3x]$$

28. $f(\theta) = -\cos ec^2\theta^3$

$$f'(\theta) = -2\cos\sec\theta^3\ (-\cos\sec\theta^3)\cot g\theta^3 . 3\theta^2$$
$$= 6\theta^2\ \cos\sec^2\theta^3 . \cot g\theta^3$$

29. $f(x) = a\sqrt{\cos bx}$

$$f'(x) = a . \frac{1}{2}(\cos b\,x)^{-1/2}\ (-sen\,b\,x) . b$$
$$= \frac{-ab}{2}\frac{sen\,b\,x}{\sqrt{\cos b\,x}}$$

30. $f(u) = (u\ tg\ u)^2$

$$f'(u) = 2\,(u\ tg\,u)\,.\,[u\,.\,\sec^2 u + tg\,u]$$
$$= 2\,u^2 \sec^2 u\,.\,tg\,u + 2u\ tg^2\,u$$

31. $f(\theta) = a^{\cot g\theta}, \quad a > 0$

$$f'(\theta) = a^{\cot g\theta}\,.\ln a\,.\,(-\cos sc^2\theta)$$

32. $f(x) = (arc\ sen\ x)^2$

$$f'(x) = 2\,(arc\ sen\,x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

33. $f(t) = t\ arc\cos 3t$

$$f'(t) = t\,\frac{-3}{\sqrt{1-9t^2}} + arc\cos 3t\,.1$$

34. $f(t) = arc\cos(sen\ t)$

$$f'(t) = \frac{-\cos t}{\sqrt{1-sen^2\ t}}$$
$$= \frac{-\cos t}{\cos t}$$
$$= -1$$

35. $f(x) = arc\sec\sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\,x^{-1/2}}{\left|\sqrt{x}\right|\sqrt{x-1}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\left|\sqrt{x}\right|\sqrt{x-1}}$$
$$= \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

36. $f(t) = t^2 arc\cos ec\,(2t+3) \qquad \left|2t+3\right| \geq 1$

$$f'(t) = t^2 . \frac{-2}{|2t+3|\sqrt{(2t+3)^2 - 1}} + arc\ \cos\sec\ (2t+3)\ .\ 2t$$

37. $f(x) = \dfrac{\ln\ (sen\ hx)}{x}$

$$f'(x) = \frac{x\ \dfrac{\cosh x}{senh\, x} - \ln\ (senh\, x)\ .1}{x^2}$$

$$= \frac{x\ \cot gh - \ln\ (senh\, x)}{x^2}$$

38. $f(t) = \left[\cot gh\ (t+1)^2\right]^{1/2}$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left[\cot gh\ (t+1)^2\right]^{-1/2} . -\cos\sec h^2\ (t+1)^2\ .\ 2\ (t+1)$$

$$= -\frac{(t+1)\ \cos\sec h^2\ (t+1)^2}{\sqrt{\cot gh\ (t+1)^2}}$$

39. $f(x) = \left[\cos\sec h\ \dfrac{(3x+1)}{x}\right]^3$

$$f'(x) = 3\left[\cos\sec h\ \frac{3x+1}{x}\right]^2 . \left[-\cos\sec h\ \frac{3x+1}{x}\ \cot gh\ \frac{3x+1}{x} . \frac{x\ .\ 3 - (3x+1)}{x^2}\right]$$

$$= 3\ \frac{1}{x^2}\left[\cos\sec h\ \frac{3x+1}{x}\right]^3 . \cot gh\left(\frac{3x+1}{x}\right)$$

40. $f(x) = x\ \arg\cosh\ x - \sqrt{x^2 - 1}$

$$f'(x) = x\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \arg\cosh x - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

41. $f(x) = x\ \arg\cot gh\ x^2$

$$f'(x) = x\ \frac{2x}{1-x^4} + \arg\cot gh\ x^2\ .1$$

$$= \frac{2x^2}{1-x^4} + \arg\cot gh\ x^2$$

42. $f(x) = \frac{1}{2}\left[\arg\cos gh\ x^2\right]^2$

$f'(x) = \frac{1}{2} . 2 \arg\cosh x^2 . \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 1}} \qquad ; x^2 > 1$

Nos exercícios 43 a 79, calcular a derivada. A seguir, usando um software algébrico, comparar os resultados.

43. $f(x) = \frac{1}{3}(2x^5 + 6x^{-3})^5$

$f'(x) = \frac{1}{3}.5\,(2x^5 + 6x^{-3})^4 . (10x^4 - 18x^{-4}) .$

44. $f(x) = (3x^2 + 6x)^{10} - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 10(3x^2 + 6x)^9(6x + 6) + \frac{2}{x^3} .$

45. $f(x) = (5x - 2)^6(3x - 1)^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x-2)^6 3\,(3x-1)^2 .3 + (3x-1)^3 .6\,(5x-2)^5 .5 \\ &= 9\,(5x-2)^6\ (3x-1)^2 + 30\,(3x-1)^3 .(5x-2)^5 \\ &= (5x-2)^5\ (3x-1)^2\ [9\,(5x-2) + 30\,(3x-1)] \\ &= (5x-2)^5\ (3x-1)^2\ [45x - 18 + 90x - 30)] \\ &= (5x-2)^5\ (3x-1)^2\ [135x - 48)] \end{aligned}$$

46. $f(x) = (2x - 5)^4 + \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}$

$$f'(x) = 4\,(2x-5)^3.2 + \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= 8\,(2x-5)^3 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

47. $f(t) = \left(4t^2 - 5t + 2\right)^{-1/3}$

$$f'(t) = -\frac{1}{3}\,(4t^2 - 5t + 2)^{-\frac{4}{3}}\,(8t-5)$$

48. $f(x) = \dfrac{7x^2}{2\sqrt[5]{3x+1}} + \sqrt{3x+1}$

$$f'(x) = \frac{7}{2}x^2 \,.\, \frac{-1}{5}\,(3x+1)^{\frac{-6}{5}} \,.\, 3 + \frac{7}{2}\,(3x+1)^{\frac{-1}{5}} \,.\, 2x + \frac{1}{2}\,(3x+1)^{\frac{-1}{2}} \,.\, 3$$

$$= -\frac{21}{10}x^2\,(3x+1)^{\frac{-6}{5}} + 7x\,(3x+1)^{\frac{-1}{5}} + \frac{3}{2}\,(3x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

49. $f(x) = 2e^{3x^2} + 6x + 7$

$$f'(x) = 2\,e^{3x^2+6x+7}\,.(6x+6)$$

50. $f(x) = \left(e^{\sqrt{x}}\right)$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \,.\, \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

51. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\ln 2x}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\ln 2x} . \frac{-2}{2x} . \ln\frac{1}{2}$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{-\ln 2x} . \frac{1}{x} . -\ln 2$$
$$= \frac{2^{\ln 2x} . \ln 2}{x}$$

52. $f(t) = \dfrac{e^{-t^2}+1}{t}$

$$f'(t) = \frac{t\left(e^{-t^2} . (-2t)\right) - (e^{-t^2}+1) . 1}{t^2}$$
$$= \frac{-2t^2\ e^{-t^2} - e^{-t^2} - 1}{t^2}$$

53. $f(t) = \dfrac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt{e^t + 1}}$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1}{e^t + 1}\right)^{\frac{-1}{2}} . \frac{(e^t+1) . e^t - (e^t - 1) . e^t}{(e^t+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1}{e^t + 1}\right)^{\frac{-1}{2}} . \frac{e^{2t} + e^t - e^{2t} + e^t}{(e^t+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^t+1}{e^t-1}} . \frac{2\,e^t}{(e^t+1)^2}$$

54. $f(x) = \dfrac{1}{a}\left(bx^2 + c\right) - \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{a}(2bx) - \frac{1}{x}$$

55. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(7x^2 - 4\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14x}{7x^2 - 4}$$
$$= \frac{7x}{7x^2 - 4}$$

56. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f'(x) = \frac{(1-x)1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{1+x}$$
$$= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{1+x}$$
$$= \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

57. $f(t) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$

$$f'(t) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}} . \ln\left(\frac{a}{b}\right) . \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

58. $f(x) = \left(e^{x^2} + 4\right)^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = (e^{x^2} + 4)^{\sqrt{x}} . \ln(e^{x^2} + 4) . \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,(e^{x^2} + 4)^{\sqrt{x}-1} . e^{x^2} . 2x$$

59. $f(x) = sen(2x + 4)$

$$f'(x) = 2\cos(2x + 4)$$

60. $f(\theta) = 2\cos(2\theta^2 - 3\theta + 1)$

$$f'(\theta) = -2\,sen\,(2\theta^2 - 3\theta + 1)\,[4\theta - 3]$$

61. $f(\alpha) = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$$f'(\alpha) = \frac{-2\,sen\,2\alpha}{2} = -sen\,2\alpha$$

62. $f(\theta) = sen^2\theta + \cos^2\theta$

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2\,sen\theta\cos\theta + 2\cos\theta\,(-sen\theta) \\ &= 2\,sen\theta\cos\theta - 2\,sen\theta\cos\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

63. $f(s) = \cot g^4\,(2s-3)^2$

$$\begin{aligned} f'(s) &= -4\cot g^3\,(2s-3)^2\,.\cos\sec^2\,(2s-3)^2\,.\,2\,(2s-3)\,.\,2 \\ &= -16\,(2s-3)\cot g^3\,(2s-3)^2\,.\cos\sec^2\,(2s-3)^2 \end{aligned}$$

64. $f(x) = \left(\dfrac{1}{sen\,x}\right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,\frac{1}{sen\,x}\,.\,\frac{-\cos x}{sen^2\,x} \\ &= \frac{-2\cos x}{sen^3 x} \end{aligned}$$

65. $f(x) = \dfrac{sen\,(x+1)}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{e^x \cos(x+1) - sen(x+1)\, e^x}{e^{2x}}$$
$$= \frac{[\cos(x+1) - sen(x+1)]}{e^x}$$

66. $f(x) = sen^2(x/2)\cos^2(x/2)$

$$f'(x) = sen^2\left(\frac{1}{2}x\right).2.\cos\left(\frac{x}{2}\right).\left(-sen\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} + \cos^2 x\,.\,2\,sen\frac{1}{2}x\,.\cos\frac{1}{2}x\,.\frac{1}{2}$$
$$= -sen^3\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{2} + \cos^3\frac{x}{2}\,.\,sen\frac{x}{2}$$

67. $f(t) = \ln\cos^2 t$

$$f'(t) = \frac{-2\cos t\,.\,sen t}{\cos^2 t}$$
$$= \frac{-2\,sen t}{\cos t}$$
$$= -2\,tg\,t$$

68. $f(x) = \log_2(3x - \cos 2x)$

$$f'(x) = \frac{3 + (sen\,2x)\,2}{3x - \cos 2x}\,.\log_2 e$$

69. $f(t) = e^{2\cos 2t}$

$$f'(t) = e^{2\cos 2t}\,.\,2\,(-sen\,2t)\,2$$
$$= -4\,(sen\,2t)\,e^{2\cos 2t}$$

70. $f(x) = arc\cos\frac{2x}{3}$

$$f'(x) = \frac{-2/3}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}} = \frac{-2/3}{\sqrt{\frac{9-4x^2}{9}}}$$

$$= \frac{-2/3}{\sqrt{9-4x^2}} . 3 = \frac{-2}{\sqrt{9-4x^2}}$$

71. $f(s) = \dfrac{arc\ sen\, s/2}{s+1}$

$$f'(s) = \frac{(s+1)\dfrac{1/2}{\sqrt{1-\frac{s^2}{4}}} - arc\ sen\frac{s}{2}}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{(s+1)\dfrac{1/2}{\sqrt{4-s^2}} . 2 - arc\ sen\frac{s}{2}}{(s+1)^2}$$

$$= \left(\frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}} - arc\ sen\frac{s}{2} \right) . \frac{1}{(s+1)^2}$$

72. $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{1}{1-x^2}$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-1 . (-2x)}{(1-x^2)^2}}{1+\dfrac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} . \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+1}$$

$$= \frac{2x}{(1-x^2)^2+1} = \frac{2x}{1-2x^2+x^4+1}$$

$$= \frac{2x}{x^4-2x^2+2}$$

73. $f(x) = senh(2x-1)$

$$f'(x) = 2\cosh(2x-1)$$

74. $f(t) = \ln\left[\cosh\left(t^2 - 1\right)\right]$

$$f'(t) = \frac{senh\,(t^2-1)\,.\,2t}{\cosh\,(t^2-1)}$$
$$= 2t\; tgh\,(t^2-1)$$

75. $f(t) = tgh\,(4t^2-3)^2$

$$f'(t) = \sec h^2\,(4t^2-3)^2\,.\,2\,(4t^2-3)\,.\,8t$$
$$= 16t\,(4t^2-3)\,.\,\sec h^2\,(4t^2-3)^2$$

76. $f(x) = \sec h\,[\ln x]$

$$f'(x) = -\sec h\,[\ln x]\,.\,tgh\,[\ln x]\,.\,\frac{1}{x}$$

77. $f(x) = (\arg\; senh\; x)^2$

$$f'(x) = 2\arg\; senh\, x\,.\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

78. $f(x) = \arg\; tgh\,\frac{1}{2}\,x^2$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\,.\,2x}{1-\frac{x^4}{4}}$$
$$= \frac{x}{\frac{4-x^4}{4}} = \frac{4x}{4-x^4}$$

79. $f(x) = (x+1)\arg\sec h\; 2x$

$$f'(x) = (x+1)\frac{-2}{2x\sqrt{1-4x^2}} + \arg\sec h\, 2x \qquad ; 0 < 2x < 1$$

80. Encontrar $f'(x)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

No ponto $x = 0$, temos

$f'(0+) = f'(0-) = -1$. Portanto, $f'(0) = -1$.

(b) $f(x) = \ln|3-4x)$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(3-4x); & x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \\ \ln(4x-3); & x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \end{cases}$$

Temos:

$$y' = \begin{cases} \frac{-4}{3-4x} = \frac{4}{4x-3}; & x < \frac{3}{4} \\ \frac{4}{4x-3}; & x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$= \frac{4}{4x-3} \quad se \quad x \in R - \left\{\frac{3}{4}\right\}$$

(c) $f(x) = e^{|2x-1|}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x-1}; & x \geq \dfrac{1}{2} \\ e^{1-2x}; & x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$y'=\begin{cases} \quad 2e^{2x-1}; & x > \dfrac{1}{2} \\ -2e^{1-2x}; & x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

No ponto $x=\dfrac{1}{2}$, $y'\left(\dfrac{1}{2}+\right)=2$ e $y'\left(\dfrac{1}{2}-\right)=-2$. Logo, $f(x)$ não é derivável nesse ponto.

81. Calcular $f'(0)$, se $f(x)=e^{-x}\cos 3x$.

$f'(x)=e^{-x}\,.(-3sen\,3x)+\cos 3x\,.\,e^{-x}\,(-1)=-3e^{-x}sen\,3x-e^{-x}\cos 3x$.

$f'(0)=0-1=-1$.

82. Calcular $f'(1)$, se $f(x)=\ln(1+x)+arc\ sen\ x/2$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}$$

$$f'(1)=\frac{1}{1+1}+\frac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$$

83. Dada $f(x)=e^{-x}$, calcular $f(0)+x\,f'(0)$.

$f'(x)=-e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=-1$

$f(0)+x\ f'(0)=1+x\ (-1)=1-x$.

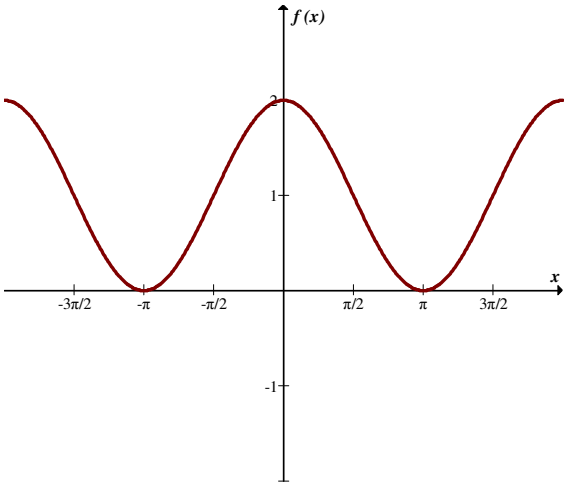
84. Dada a $f(x)=1+\cos x$, mostrar que $f(x)$ é par e $f'(x)$ é Ímpar. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico de $f(x)$ e $f'(x)$ observando as simetrias.

$f(x)=1+\cos x$
$f'(x)=-sen\,x$

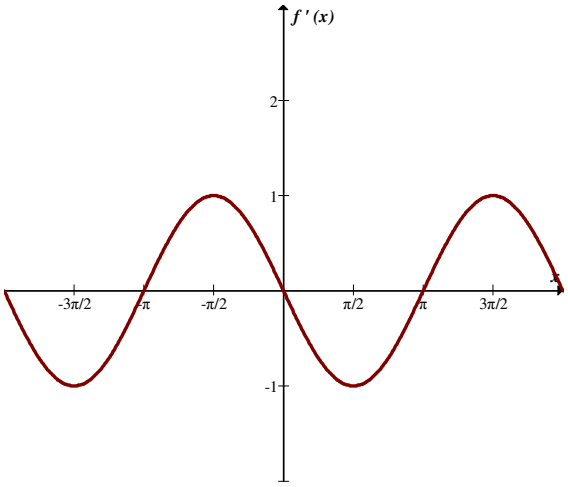
$f(-x)=1+\cos(-x)=1+\cos x=f(x)\Rightarrow f(x)$ *é par* .

$f'(-x)=-sen\,(-x)=sen\,x=-f'(x)\Rightarrow f'(x)$ *é ímpar* .

Segue o gráfico de $f(x)$, observando-se a simetria em relação ao eixo dos y.



Segue o gráfico de $f'(x)$, observando-se a simetria em relação à origem.



85. Dada a $f(x) = sen\ 2x \cos 3x,$ mostrar que $f(x)$ é ímpar e $f'(x)$ é par.

$f'(x) = sen\,2x\,(-sen\,3x)\,3 + \cos 3x\,.\cos 2x\,.\,2$

$f(-x) = sen\,(-2x)\cos(-3x) = -sen\ 2x\,.\cos 3x = -f(x) \Rightarrow f(x)\ \ é\ ímpar\,.$

$$\begin{aligned} f'(-x) &= -3\ sen\,(-2x)\ sen\,(-3x) + 2\left(\cos(-3x)\right)\cos(-2x) \\ &= -3\,(-sen\,2x)\,(-sen\,3x) + 2\cos 3x\,.\cos 2x \\ &= -3\ sen\,2x\,.\ sen\,3x + 2\cos 3x\,.\cos 2x = f'(x) \Rightarrow f'(x)\ \ é\ \ par \end{aligned}$$

86. Dada a $f(x) = \frac{1}{2} sen\ 2x,$ calcular $f'(x)$ e verificar que f e f' são periódicas de mesmo período. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar os gráficos de $f(x)$ e $f'(x)$ comprovando os resultados.

$f(x) = \frac{1}{2} sen\,2x$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x)\,2 = \cos 2x$

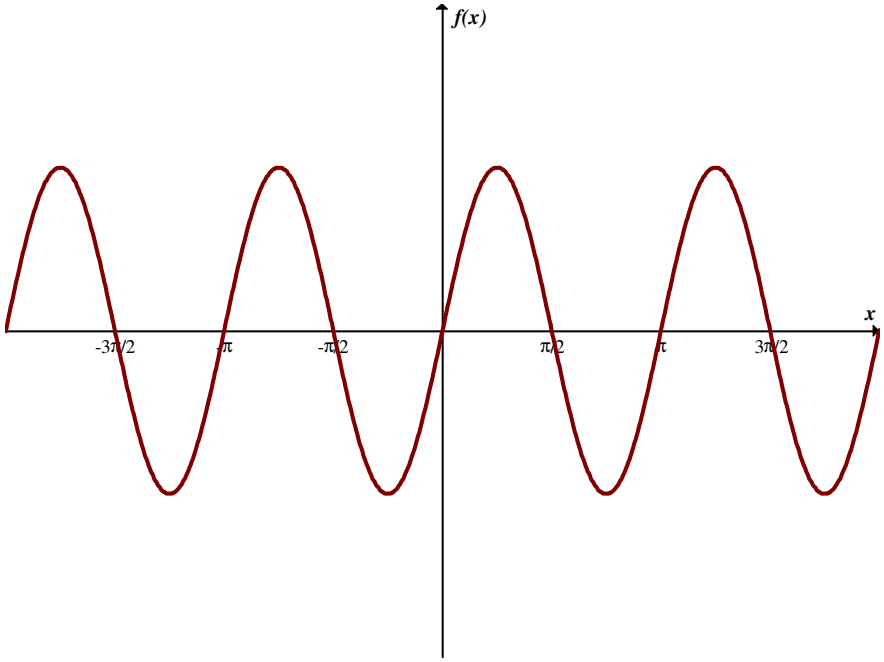
Para verificar a periodicidade temos:

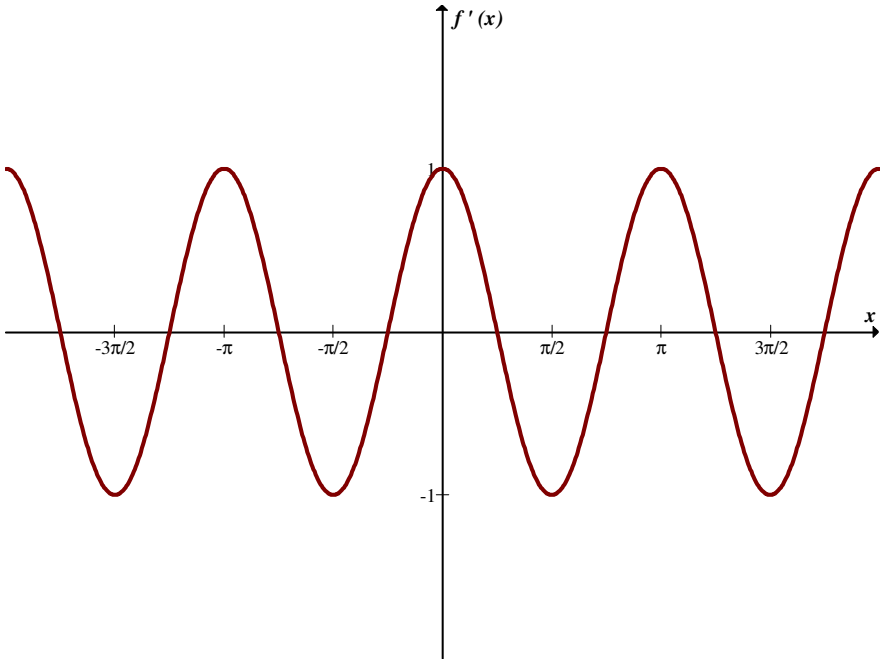
$$f(x+\pi) = \frac{1}{2} sen\,(2x+2\pi)$$

$$= \frac{1}{2} sen\ 2x = f(x).$$

$$f'(x) = \cos\ 2x = \cos 2\,(x+\pi) = f'(x+\pi)\,.$$

Portanto, são periódicas de período π.





87. Seja $f(x)$ derivável e período de período T. Mostrar que f' também é periódica de período T.

Se $f(x)$ é derivável ==> $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Se $f(x)$ é periódica de período T ==> $f(x+T) = f(x)$ e $f(x+\Delta x+T) = f(x+\Delta x)$

Queremos mostrar que

$f'(x+T) = f'(x)$

De fato

$$\begin{aligned} f'(x+T) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+T+\Delta x) - f(x+T)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

88. Mostrar que a função $y = x\,e^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1-x)y$.

$y = x\,e^{-x}$

$y' = x\,e^{-x}\,(-1) + e^{-x}$

Substituindo na equação:

$x\,(-x e^{-x} + e^{-x}) = (1-x)\,(x e^{-x})$

$-x^2\,e^{-x} + x e^{-x} = x e^{-x} - x^2\,e^{-x}$

89. Mostrar que a função $y = x\,e^{-x^2/2}$ satisfaz a equação $xy' = (1-x^2)\,y$.

$y = x e^{\frac{-x^2}{2}}$

$y' = x e^{\frac{-x^2}{2}} \,.\frac{-2x}{2} + e^{\frac{-x^2}{2}}$

$x\left(-x^2\,e^{\frac{-x^2}{2}} + x e^{\frac{-x^2}{2}}\right) = (1-x^2)\,.\,x e^{\frac{-x^2}{2}}$

$-x^3\,e^{\frac{-x^2}{2}} + x e^{\frac{-x^2}{2}} = x e^{\frac{-x^2}{2}} - x^3\,e^{\frac{-x^2}{2}}$

90. Mostrar que a função $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$ satisfaz a equação $xy' = y(\ln x - 1)$.

$y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$

$y' = \dfrac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{(1+x+\ln x)^2}$

$xy' = y\,(y\ln x - 1)$

$x\,.\,\dfrac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{(1+x+\ln x)^2} = \dfrac{\ln x}{(1+x+\ln x)^2} - \dfrac{1}{1+x+\ln x} = \dfrac{\ln x - 1 - x - \ln x}{(1+x+\ln x)^2} = \dfrac{-x-1}{(1+x+\ln x)^2}\,.$

91. Sejam f e g funções tais que $(f_0\ g)(x) = x$ para todo x, e $f'(x)$ e $g'(x)$ existem para todo x.

$f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$, sempre que $g'(x) \neq 0$.

Temos:

$(f \circ g)'(x) = (x)' = 1$.

Pela regra da cadeia,

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$.

Logo,

$f'(g(x)).g'(x) = 1$ ou $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$, $g'(x) \neq 0$.

92. Obtenha a regra do produto para $(uv)'$ derivando o fórmula $\ln(uv) = \ln u + \ln v$.

$$\lg(fg) = \lg f + \lg g$$
$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$
$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} \quad .$$
$$(fg)' = f'g + fg'$$

93. Provar que:

(a) Se $y = \cot g\ x$, então $y' = -\cos ec^2 x$.

$$y = \cot g\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}$$

$$y' = \frac{sen\,x\,(-sen\,x) - \cos x\,.\,\cos x}{sen^2 x}$$
$$= \frac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1}{sen^2 x} = -\cos\sec^2 x$$

(b) Se $y = \sec x,$ então $y' = \sec x\,.\,tg\,x.$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$y' = \frac{-(-sen\,x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos x}\,.\,\frac{sen\,x}{\cos x} = \sec x\,.\,tg\,x$$

(c) Se $y = arc\cot g\ x,$ então $y' = \frac{-1}{1+x^2}.$

$y = arc\cot g\ x \Leftrightarrow x = \cot g\ y,\ \ y \in (0,\pi)\,.$

Como para $y \in (0,\pi)\,,\ (\cot g\ y)' = -\cos\sec^2 y \neq 0$,usando o teorema da função inversa, temos:

$$y' = \frac{1}{(\cot g\ y)'} = \frac{1}{-\cos\sec^2 y}$$
$$= \frac{-1}{1+\cot g^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

(d) Se $y = arc\cos ec\ x, |\,x\,| \geq 1,$ então $y' = \frac{-1}{|\,x\,|\sqrt{x^2-1}}, |\,x\,| > 1.$

$y = arc\cos ec\ x, |\,x\,| \geq 1 \Leftrightarrow x = \cos\sec y, y \in (0,\pi)\,.$

Como $(\cos\sec y)' = -\cos\sec y \cot gy \neq 0, y \in (0,\pi)\,,$ temos

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{cossec} y)'} = \frac{1}{-\operatorname{cossec} y \,.\, \cot g\ y}$$

$$= \frac{1}{-\operatorname{cossec} y \,.\, \sqrt{\operatorname{cossec}^2\ y - 1}} = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| \geq 1$$

(e) Se $y = \cosh\ x,$ então $y' = senh\ x.$

$$y = \cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\, x\,.$$

(f) Se $y = tgh\ x,$ então $y' = \operatorname{sec} h^2\ x.$

$$y = tgh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y' = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \left[\frac{2}{\left(e^x + e^{-x}\right)}\right]^2 = \operatorname{sec} h^2\ x$$

(g) Se $y = \operatorname{sec} h\ x,$ então $y' = -\operatorname{sec} h\ x\,.\,tgh\ x.$

$$y = \operatorname{sec} h\ x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$y' = \frac{-2\,(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{-2}{(e^x + e^{-x})} \cdot \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$$

$$= -\operatorname{sec} h\, x\,.\,tgh\, x$$

(h) Se $y = arc\sec h\, x,$ então $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1.$

$$y = arc\sec h\, x = \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$y' = \frac{x\left(\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x) - \left(1+\sqrt{1-x^2}\right).1\right)}{x^2} \cdot \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \frac{-x^2-\sqrt{1-x^2}-1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \frac{-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = . \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

(i) Se $y = arc\cos ech\, x,$ então $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, x \neq 0.$

$$y = arc\cos ech\, x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right).$$

Vamos mostrar para $x > 0$. Temos,

$$y' = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

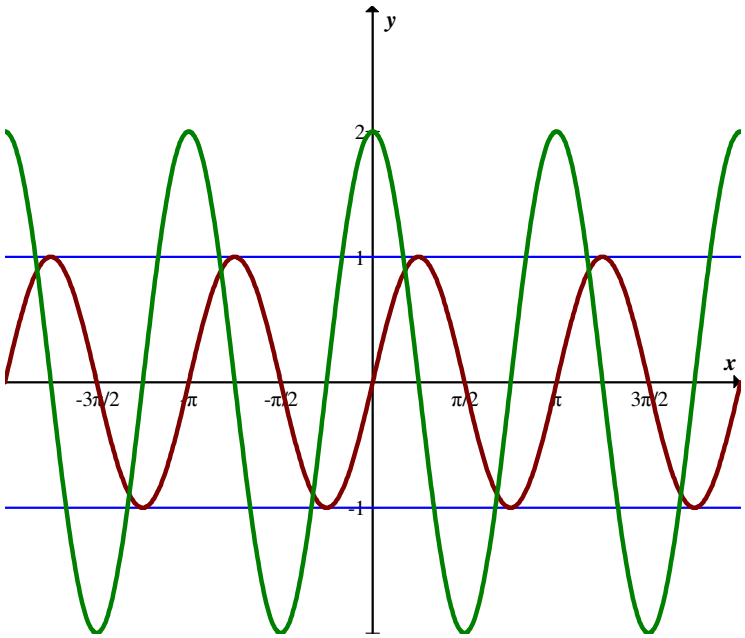
$$= \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

94. Encontrar todos os pontos onde o gráfico de $f(x)$ tem a mesma tangente horizontal. Usando uma ferramenta gráfica esboçar o gráfico de $f(x)$ e $f'(x)$ e comparar os resultados.

(a) $f(x) = sen\,2x;$

$$f'(x) = 2\cos 2x = 0$$
$$\cos 2x = 0$$

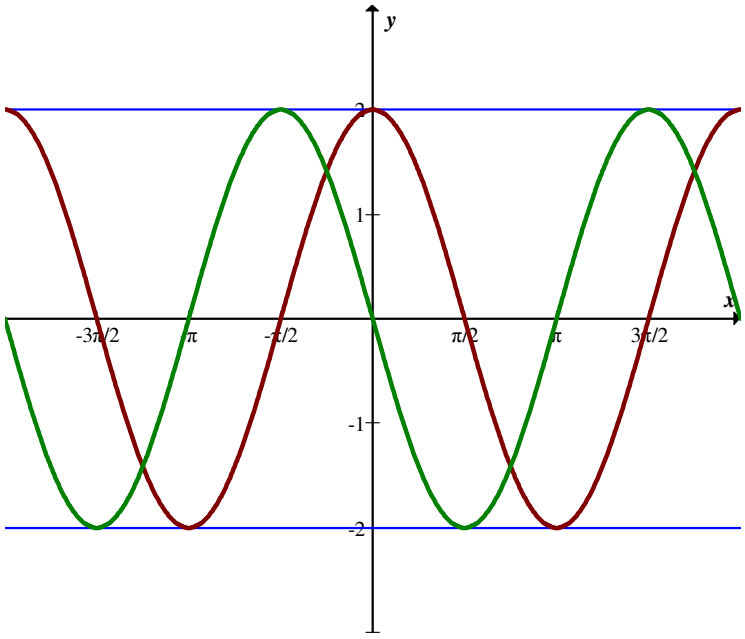
$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z$$
$$x = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi\,(2k+1)}{4}$$



(b) $f(x) = 2\cos x\,;\ f'(x) = -2senx$

$$-2\,sen\,x = 0$$
$$sen\,x = 0$$

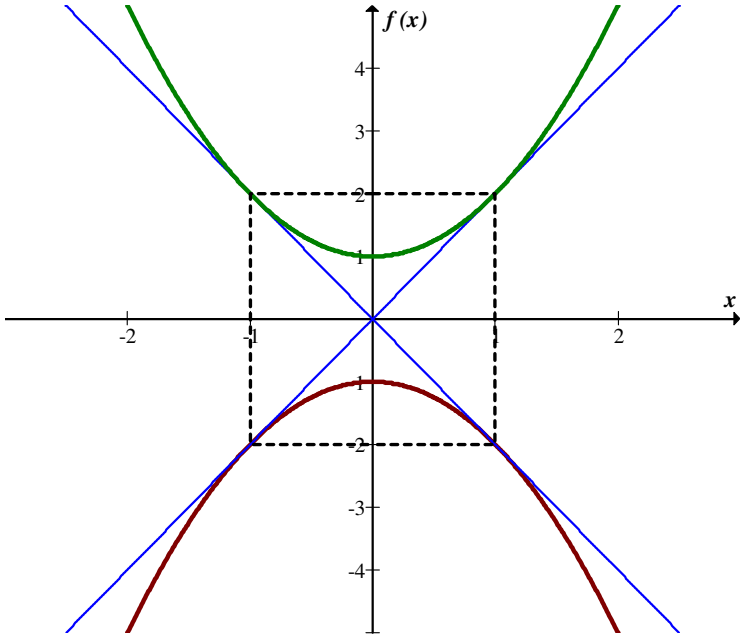
$$x = k\pi, \quad k \in Z$$



95. Traçar num mesmo sistema de coordenadas as funções $y = -1 - x^2$ e $y = 1 + x^2$. Usando a visualização gráfica responder:

(a) Quantas retas são tangentes a ambas as parábolas?
(b) Quais são os pontos de tangência?
(c) É possível encontrar essas retas algebricamente?

Seguem os gráficos em um mesmo sistema de coordenadas.



Respostas:

(a) Duas

(b) Sejam P_1 e P_2 os pontos de tangência da reta que tem inclinação positiva.

$P_1 = (x_1, y_1)$ $\quad$ $P_2 = (x_2, y_2)$ $\quad$ $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$

Temos,

$y' = 2x$ $\quad$ tangente em P_1 : $m = 2x_1$

Equação da reta tangente no ponto P_1 :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - y_1 = 2x_1(x - x_1)$

$y - y_1 = 2x_1(x - x_1)$

Substitui no ponto P_2, vem:

$-y_1 - y_1 = 2x_1(-x_1 - x_1)$

$-2y_1 = -4x_1$

$y_1 = 2x_1$

$y = 1 + x^2$ $\quad$ $2x_1 = 1 + x_1^2$

$x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$

$x_1 = 1$

$y_1 = 2$

$P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (-1, -2)$

Por simetria: $P_3 = (-1, 2)$, $P_4 = (1, -2)$

(c) Equação das tangentes:

$y - 2 = 2 \,.\, 1\,(x - 1)$

$y = 2x$

Por simetria, a outra tangente é $y = -2x$.

96. Dada a função $y = x^2 - 6x + 5$ definida para $x \in [3, +\infty)$, desenvolver os seguintes itens:

(a) Determinar a função inversa $y = g(x) = f^{-1}(x)$ e identificar o domínio.

$y = x^2 - 2\,.\,3x + 9 - 9 + 5$

$= (x-3)^2 - 4, \quad x \in [3, +\infty)$

$(x-3)^2 = y + 4$

$x - 3 = \sqrt{y+4}$

$x = 3 + \sqrt{y+4}$

Portanto, a inversa é dada por $y = 3 + \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$.

(b) Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 5.

Temos:

$x_0 = 5 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 25 - 30 + 5 = 0$

$f'(x) = 2x - 6 \qquad\qquad m = f'(x_0) = 2\,.5 - 6 = 4$

Equação da reta tangente: $y = 4(x-5)$

(c) Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = g(x)$ no ponto de abscissa 0.

Temos:

$y = 3 + \sqrt{x+4}$

$y' = \frac{1}{2}(x+4)^{-1/2}$

$y'(0) = \frac{1}{2}\,.\,4^{-1/2}$

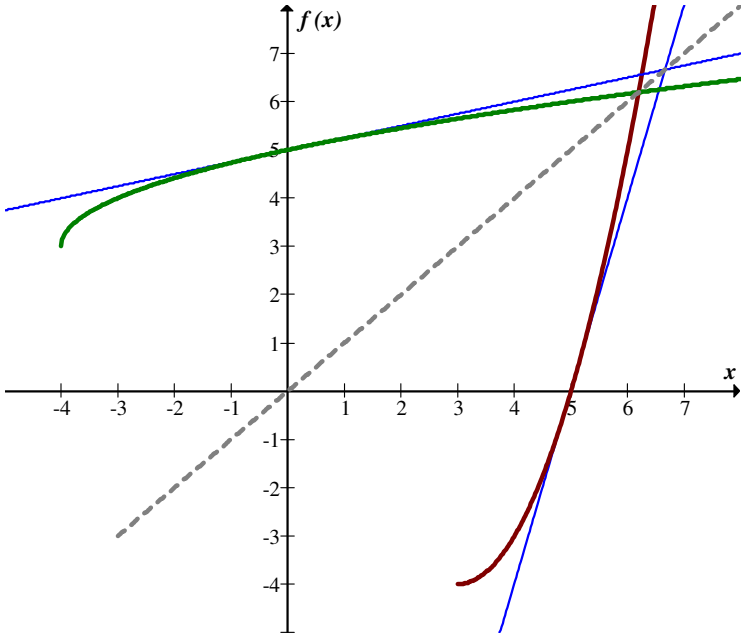
$y'(0) = \frac{1}{4}$

$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 5$

$y - 5 = \frac{1}{4}x$

$y = \frac{1}{4}x + 5$

(d) Fazer uma representação gráfica dos resultados obtidos e identificar a relação estabelecida no Teorema 4.14.


f (x)
x
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7

4.21 – EXERCÍCIOS – pg. 176

Nos exercícios de 1 a 12 calcular as derivadas sucessivas ate ordem n indicada.

1. $y = 3x^4 - 2x$, $n = 5$

$y' = 12x^3 - 2$

$y'' = 36x^2$

$y''' = 72x$

$y^{IV} = 72$

$y^{V} = 0$

2. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $n = 3$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

$y''' = 6a.$

3. $y = 3 - 2x^2 + 4x^5$, $n = 10$

$y' = -4x + 20x^4$

$y'' = -4 + 80x^3$

$y''' = 240x^2$

$y^{IV} = 480x$

$y^{V} = 480$

$y^{VI} = 0$

$y^{(7)} = y^{(8)} = y^{(10)} = 0$

4. $y = \sqrt{3 - x^2}$, $n = 2$

$y' = \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right)^{-1/2} . \left(-2x\right)$

$y'' = \left(3 - x^2\right)^{-1/2} . \left(-1\right) - \left(x\right) . \frac{-1}{2}\left(3 - x^2\right)^{-3/2} . \left(-2x\right)$

$= -\left(3 - x^2\right)^{-1/2} - x^2\left(3 - x^2\right)^{-3/2} = \frac{-3}{\left(3 - x^2\right)\sqrt{3 - x^2}}$

5. $y = \dfrac{1}{x-1}$, $n = 4$

$y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$y''' = \dfrac{-2 \,.\, 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{-6}{(x-1)^4}$

$y^{IV} = \dfrac{6 \,.\, 4(x-1)^3}{(x-1)^8} = \dfrac{24}{(x-1)^5}$

6. $y = e^{2x+1}$, $n = 3$

$y' = e^{2x+1} \,.\, 2$

$y'' = 2\, e^{2x+1} \,.\, 2 = 4\, e^{2x+1}$

$y''' = 8\, e^{2x+1}$

7. $y = \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$, $n = 4$

$y' = -e^{-x}$

$y'' = e^{-x}$

$y''' = -e^{-x}$

$y^{IV} = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

8. $y = \ln 2x$, $n = 2$

$y' = \dfrac{2}{2x}$

$y'' = \dfrac{-1}{x^2}$

9. $y = sen\, ax$, $n = 7$

$$y' = a\cos ax$$
$$y'' = -a^2\ sen\ ax$$
$$y''' = -a^3\cos ax$$
$$y^{IV} = a^4\ sen\ ax$$
$$y^{V} = a^5\cos ax$$
$$y^{VI} = -a^6\ sen\ ax$$
$$y^{VII} = -a^7\cos ax$$

10. $y = -2\cos\frac{x}{2}, \qquad n = 5$

$$y' = -2\,(-sen\,\frac{x}{2}).\frac{1}{2} = sen\,\frac{x}{2}$$
$$y'' = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$y''' = \frac{-1}{4}sen\,\frac{x}{2}$$
$$y^{IV} = \frac{-1}{8}\cos\frac{x}{2}$$
$$y^{V} = \frac{1}{16}sen\,\frac{x}{2}$$

11. $y = tg\ x, \quad n = 3$
$$y' = \sec^2 x$$
$$y'' = 2\sec x\,.\sec x\,.tg\ x$$
$$= 2\sec^2 x\,.tg\ x$$
$$y''' = 2\sec^2 x\,.\sec^2 x + tg\ x\,.4\sec x\,.\sec x\,.tg\ x$$
$$= 2\sec^4 x + 4\sec^2 x\,.tg^2\ x$$

12. $y = ax\,tg\ x, \qquad n = 2$
$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$y'' = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

13. Achar a derivada de ordem 100 das funções:

a) $y = sen\ x$

$y^{(100)} = sen\ x$

b) $y = \cos x$

$y^{(100)} = \cos x$

14. Mostrar que a derivada de ordem n da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é dada por $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = \frac{-2.3x^2}{x^6} = \frac{-2.3}{x^4} = \frac{-3}{x^4}$$

$$y^{IV} = \frac{+3!\,4x^3}{x^8} = \frac{4!}{x^5}$$

$$\vdots$$

$$y^n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

15. Mostrar que a derivada de ordem n da função $f(x) = e^{ax}$ é dada por $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

$$y = e^{ax}$$

$$y' = a\, e^{ax}$$

$$y'' = a^2 e^{ax}$$

$$y''' = a^3 e^{ax}$$

$$\vdots$$

$$y^n = a^n e^{ax}$$

16. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis ate 3ª ordem. Mostrar que:

a) $(f\ g)'' = gf'' + 2f'g' + fg''$.

$$(f\,g)' = f\,g' + gf'$$
$$(f\,g)'' = f\,g'' + g'f' + g\,f'' + f'g'$$
$$= g\,f'' + 2f'g' + f\,g''$$

b) $(f\,g)''' = g\,f''' + 3f''g' + 3f'g'' + f\,g'''$.

$$(f\,g)''' = g\,f''' + f''g' + 2(f'g'' + g'f'') + fg''' + g''f'$$
$$= g\,f''' + f''g' + 2f'g'' + 2g'f'' + fg''' + g''f'$$
$$= g\,f''' + 3f''g' + 3f'g'' + f\,g'''.$$

17. Mostrar que $x = A\cos(wt + \alpha)$, onde A, w e α são constantes, satisfaz a equação $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, sendo $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Temos:

$$x = A\cos(wt + \alpha)$$
$$\dot{x} = -A\,sen(wt + \alpha).\,w$$
$$\ddot{x} = -A\,w^2\cos(wt + \alpha)$$

Substituindo na equação:

$$-A\,w^2\cos(wt + \alpha) + w^2 A\cos(wt + \alpha) \equiv 0$$

18. Calcular $y' = \dfrac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas implicitamente.

a) $x^3 + y^3 = a^3$

$$3x^2 + 3y^2y' = 0 \quad \therefore \quad y' = \frac{-3x^2}{3y^2} = \frac{-x^2}{y^2}$$

b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

$$3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$$
$$y'(x^2 + 2y) = -3x^2 - 2xy$$
$$y' = \frac{-3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y}$$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}.\,y'=0$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

d) $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$

$$xy^3+y^4=x-y$$

$$y^3+x\,3y^2y'+4y^3y'=1-y'$$

$$\left(3xy^2+4y^3+1\right)y'=1-y^3$$

$$y'=\frac{1-y^3}{3xy^2+4y^3+1}$$

e) $a\cos^2(x+y)=b$

$$-2a\cos^2(x+y).\,sen\,(x+y).\,[1+y']=0$$

$$y'=\frac{-2\,a\cos(x+y)\,sen\,(x+y)}{2\,a\cos(x+y)\,sen\,(x+y)}$$

$$y'=-1$$

f) $tg\ y=x\ y$

$$y'\sec^2 y=x\,y'+y$$

$$y'\left[\sec^2 y-x\right]=y$$

$$y'=\frac{y}{\sec^2 y-x}.$$

g) $e^y=x+y$

$$e^y \,.\, y' = 1 + y'$$
$$y'\left[e^y - 1\right] = 1$$
$$y' = \frac{1}{e^y - 1}.$$

19. Determinar as retas tangente e normal à circunferência de centro $(2, 0)$ e raio 2 nos pontos de abscissa 1.

Temos a circunferência dada:
$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$
$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

Derivando, temos:
$$2x - 4 + 2yy' = 0$$
$$2yy' = 4 - 2x$$
$$y' = \frac{4-2x}{2y}$$
$$y' = \frac{2-x}{y}$$
No ponto $\left(1, \sqrt{3}\right)$, temos:

Declividade da reta tangente:

$$m(1) = \frac{2-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Equação da reta tangente:
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

$$\sqrt{3}y - 3 = x - 1$$
$$x - \sqrt{3y} + 2 = 0$$

Declividade da reta normal:
$$m_n = -\sqrt{3}$$

Equação da reta normal:

$$y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}\,(x-1)$$

$$\sqrt{3}\,x+y-2\sqrt{3}=0$$

No ponto $(1,-\sqrt{3})$, temos:

Declividade da reta tangente:

$$m(1)=\frac{2-1}{-\sqrt{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Equação da reta tangente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+\sqrt{3}=\frac{-1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

$$\sqrt{3}y+3=-x+1$$

$$x+\sqrt{3}y+2=0$$

Declividade da reta normal:

$$m_n=\sqrt{3}$$

Equação da reta normal:

$$y+\sqrt{3}=\sqrt{3}\,(x-1)$$

$$\sqrt{3}\,x-y-2\sqrt{3}=0$$

20. Demonstrar que a reta tangente à elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ no ponto $(x_0,\,y_0)$ tem a equação $\frac{x\,x_0}{a^2}+\frac{y\,y_0}{b^2}=1$.

Temos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Derivando implicitamente:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$$

$$\frac{2yy'}{b^2}=\frac{-2x}{a^2}$$

$$y'=\frac{-2x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2y}=\frac{-b^2x}{a^2y}$$

$$-\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{b^2}{y_0}=m(x_0)$$

$$y-y_1=m\,(x-x_1)$$
$$y-y_0=-\frac{x_0b^2}{a^2y_0}(x-x_0)$$

$$a^2y_0y-a^2{y_0}^2=-b^2x_0(x-x_0)$$
$$a^2yy_0-a^2{y_0}^2=-b^2x_0x+b^2{x_0}^2$$

$$\frac{a^2yy_0}{a^2b^2}+\frac{b^2x\,x_0}{a^2b^2}=\frac{b^2{x_0}^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y_0^2}{a^2\,b^2}$$
$$\frac{yy_0}{b^2}+\frac{x\,x_0}{a^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$
$$\frac{x\,x_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

21. Em que pontos a reta tangente á curva $y^2=2x^3$ é perpendicular a reta $4x-3y+1=0$?

Temos:

$$y^2=2x^3$$
$$2yy'=6x^2$$
$$y'=\frac{6x^2}{2y}=\frac{3x^2}{y}$$

Obtendo a declividade da reta dada para encontrar a declividade da reta perpendicular:

$$4x-3y+1=0$$
$$-3y=-1-4x$$
$$3y=1+4x$$
$$y=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}x$$
$$m(x_1)=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad m_p(x_1)=\frac{-3}{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x_1^2}{y_1} = -\dfrac{3}{4} \\ y_1^2 = 2x_1^3 \end{cases} \quad \therefore \quad y_1 = \frac{12x_1^2}{-3} = -4x_1^2$$

$$\left(-4x_1^2\right)^2 = 2x_1^3 \quad \therefore \quad 16x_1^4 = 2x_1^3$$

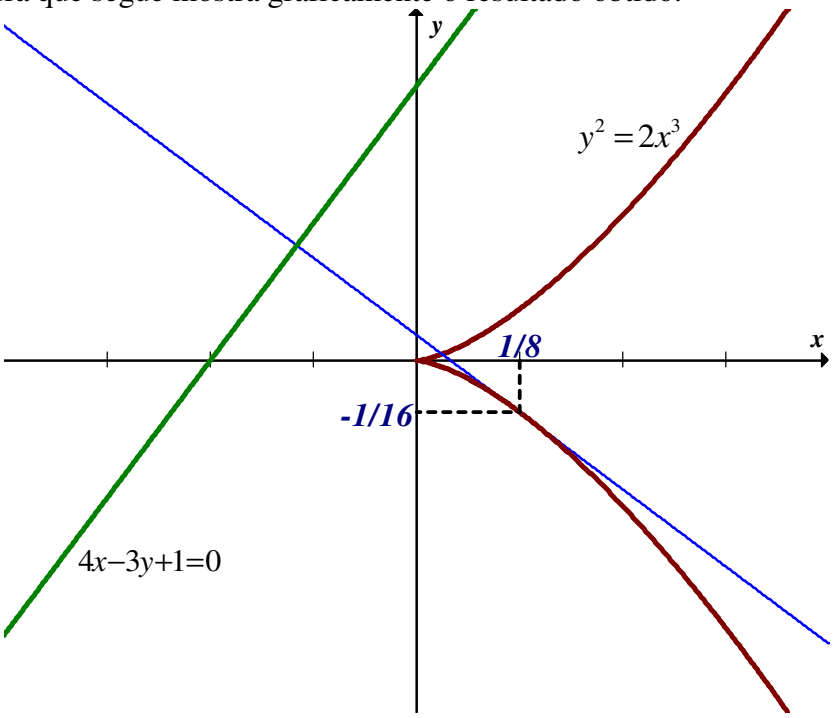
$$16x_1^4 - 2x_1^3 = 0$$
$$x_1^3(16x_1 - 2) = 0$$
$$x_1 = 0$$

Ou,

$$16x_1 = 2$$
$$x_1 = 2/16 = 1/8$$

No pontos $(0, 0)$ não existe reta tangente. Temos então somente $\left(\frac{1}{8}, \frac{-1}{16}\right)$.

A figura que segue mostra graficamente o resultado obtido.



22. Mostre que as curvas cujas equações são $2x^2 + 3y^2 = 5$ e $y^2 = x^3$ interceptam-se no ponto $(1, 1)$ e que suas tangentes nesse ponto são perpendiculares

Verificando a intersecção:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ y^2 = x^3 \end{cases}$$

O ponto $(1,1)$ pertence ao gráfico das duas curvas, pois:
$2.1^2 + 3.1^2 = 5$ e $1^2 = 1^3$.

Analisando as tangentes:

$2x^2 + 3y^2 = 5$ $\qquad$ $y^2 = x^3$

$4x + 6yy' = 0$ $\qquad$ $2yy' = 3x^2$

$y' = \dfrac{-4x}{6y} = -\dfrac{2x}{3y}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{3x^2}{2y}$

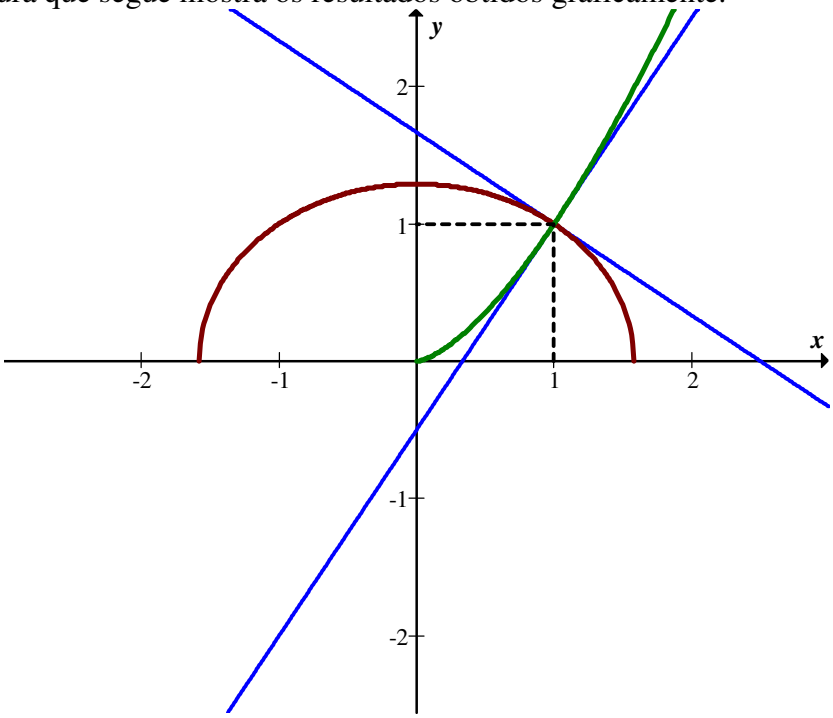
$y'\big|_{(1,1)} = \dfrac{-2}{3}$ $\qquad$ $y'\big|_{(1,1)} = \dfrac{3}{2}$

Assim as retas

$y - 1 = \dfrac{-2}{3}(x-1)$ e $y - 1 = \dfrac{3}{2}(x-1)$

são perpendiculares.

A Figura que segue mostra os resultados obtidos graficamente.



23. Calcular a derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas na forma paramétrica. Para quais valores de t, y' está definida?

a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3,\ t \in (0,+\infty) \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$ para $t > 0$.

b) $\begin{cases} x = \cos\ 2t \\ y = sen\ 2t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2\cos 2t}{-2sen2t} = -\cot g\, 2t$ com $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4sen\, t,\ t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4\cos t}{-3sent} = -4/3 \cot gt$ para $t \in (\pi, 2\pi)$.

d) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = sen^3 t,\ t \in \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3sen^2 t \cdot \cos t}{-3\cos^2 t \cdot sent} = -tg\, t$ com $t \in \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$.

e) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 + 5,\ -\infty < t < +\infty \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2}{2}$ para $-\infty < t < +\infty$.

f) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8sen^3 t,\ t \in [0, \pi] \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{24sen^2t\cdot\cos t}{-24\cos^2 t\cdot sent}=-tg\,t \text{ para } t\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)..$$

24. Determinar a equação da reta tangente à elipse

$$\begin{cases}x=2\cos t\\ y=3sent, t\in[0,2\pi]\end{cases}$$

no ponto $P\left(\sqrt{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

No ponto $P\left(\sqrt{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. temos que

$$\begin{cases}x=2\cos t=\sqrt{2}\\ y=3sent=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases}\cos t=\sqrt{2}/2\\ sent=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Assim, temos que $t=\frac{\pi}{4}$.

Calculando a declividade:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3\cos t}{-2sent}$$

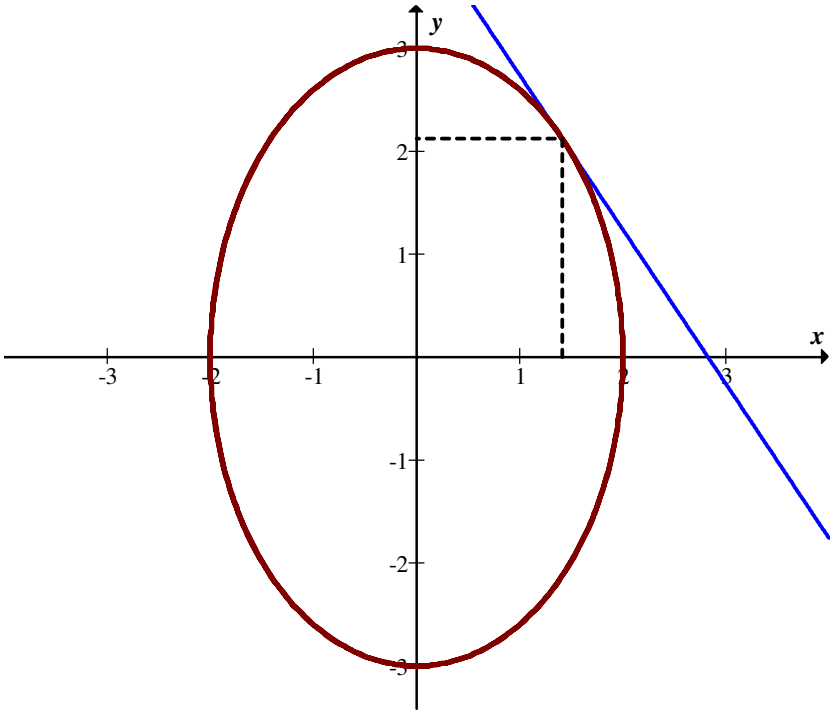
Considerando $t=\frac{\pi}{4}$ temos $m=\frac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{3}{2}$.

A equação da reta tangente é dada por:

$$y-\frac{3\sqrt{2}}{2}=-\frac{3}{2}(x-\sqrt{2})$$

$$2y+3x-6\sqrt{2}=0.$$

A figura que segue mostra os resultados obtidos.



25. Determinar as equações da reta tangente e da reta normal à astróide

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = sen^3 t, t \in [0,2\pi] \end{cases}$$

no ponto $P\left(\frac{-1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

Calculando a declividade da reta tangente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3sen^2 t \cos t}{-3\cos^2 t\, sent} = -tgt$$

O ponto P corresponde a $t = \frac{2\pi}{3}$. Portanto, $m = -tg\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$.

A equação da reta tangente no ponto P é dada por:

$$y - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}\left(x + \frac{1}{8}\right)$$

$$2\sqrt{3}x - 2y + \sqrt{3} = 0.$$

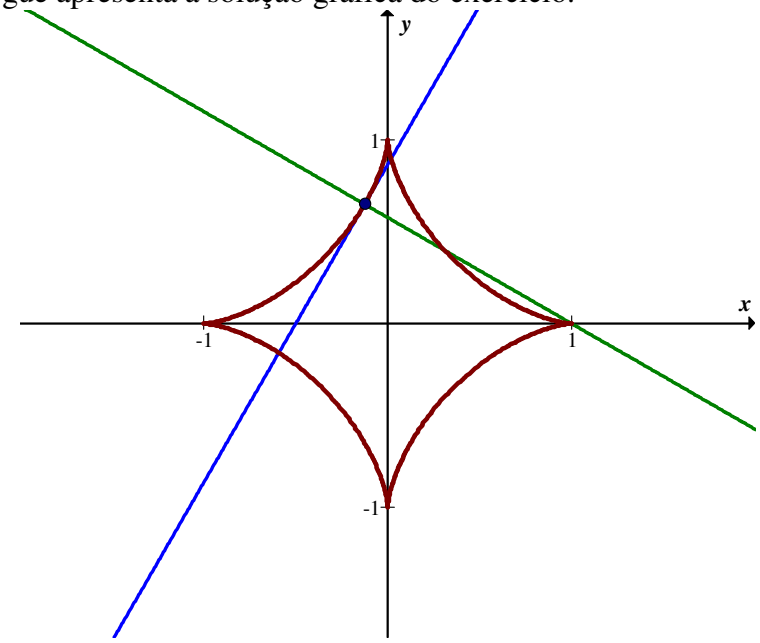
A declividade da reta normal é dada por $m_n = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A equação da reta normal no ponto P é dada por:

$$y-\frac{3\sqrt{3}}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{8}\right)$$

$$x+\sqrt{3y}-1=0.$$

A Figura que segue apresenta a solução gráfica do exercício.



26. Encontrar $\Delta y - dy$ das funções dadas

a) $y = 3x^2 - x + 1$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x)\\ &= 3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) + 1 - 3x^2 + x - 1\\ &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - 3x^2 + x\\ &= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - \Delta x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy &= y'.\Delta x\\ &= (6x-1)\Delta x = 6x\Delta x - \Delta x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta y - dy &= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - \Delta x - 6x\Delta x + \Delta x\\ &= 3(\Delta x)^2\end{aligned}$$

b) $y = 2\sqrt{x}$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= 2\sqrt{x+\Delta x} - 2\sqrt{x}$$

$$dy = y'.\Delta x$$
$$= 2.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\Delta x$$

$$\Delta y - dy = \left(2\sqrt{x+\Delta x} - 2\sqrt{x}\right) - \frac{\Delta x}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2(x+\Delta x-x)}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} - \frac{\Delta x}{\sqrt{x}} = \frac{2\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} - \frac{\Delta x}{\sqrt{x}}$$
$$= \Delta x\left(\frac{2}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

c) $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= \frac{x+\Delta x+1}{2(x+\Delta x)-1} - \frac{x+1}{2x-1}$$
$$= \frac{(2x-1)(x+\Delta x+1) - (x+1)(2x+2\Delta x-1)}{(2x+2\Delta x-1)(2x-1)}$$
$$= \frac{2x\Delta x - \Delta x - 2x\Delta x - 2\Delta x}{(2x+2\Delta x-1)(2x-1)}$$
$$= \frac{-3\Delta x}{(2x+2\Delta x-1)(2x-1)}$$

$$dy = y'.\Delta x = \frac{(2x-1).1 - (x+1).2}{(2x-1)^2}\Delta x$$
$$= \frac{2x-1-2x-2}{(2x-1)^2}\Delta x$$
$$= \frac{-3}{(2x-1)^2}.\Delta x$$

$$\Delta y - dy = \frac{-3\Delta x}{(2x+2\Delta x-1)(2x-1)} + \frac{3\Delta x}{(2x-1)^2}$$

27. Encontrar Δy e dy para os valores dados

a) $y = \frac{1}{2x^2}$; $\Delta x = 0{,}001$; $x = 1$

$$\Delta y = \frac{1}{2(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{2x^2}$$
$$= \frac{1}{2\,(x+0{,}001)^2} - \frac{1}{2x^2}$$
$$= \frac{1}{2\,(1+0{,}001)^2} - \frac{1}{2.1^2}$$
$$= -0{,}000998$$

$$dy = \frac{-1}{x^3}\Delta x = \frac{-0{,}001}{1} = -0{,}001$$

b) $y = 5x^2 - 6x$; $\Delta x = 0{,}02$; $x = 0$

$$\Delta y = 5(x+\Delta x)^2 - 6(x+\Delta x) - 5x^2 + 6x$$
$$\Delta y = 5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 6x - 6\Delta x - 5x^2 + 6x$$
$$\Delta y = 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 6\Delta x$$

$$\Delta y = 10\,.\,x\,.\,0{,}02 + 5(0{,}02)^2 - 6\,.\,0{,}02$$
$$= (10x-6)\,.\,0{,}02 + 5(0{,}02)^2$$
$$= -6\,.\,0{,}02 + (0{,}02)^2 = -0{,}12 + 0{,}002 = -0{,}018$$

$$dy = (10x-6)\,\Delta x = (10x-6)\,.\,0{,}02$$
$$= -6\,.\,0{,}02 = -0{,}12$$

c) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; $\Delta x = 0{,}1$; $x = -1$.

$$\Delta y = \frac{2(x+\Delta x)+1}{x+\Delta x-1} - \frac{2x+1}{x-1}$$
$$= \frac{(x-1)(2x+2\Delta x+1)-(x+\Delta x-1)(2x+1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$
$$= \frac{2x^2+2x\,\Delta x+x-2x-2\Delta x-1-2x^2-x-2x\,\Delta x-\Delta x+2x+1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$
$$= \frac{-3\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$\Delta y = \frac{-3.0{,}1}{(-1+0{,}1-1)(-1-1)} = -0{,}078$$

$$dy = \frac{(x-1).2-(2x+1).1}{(x-1)^2}\Delta x$$
$$= \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}\Delta x$$
$$\frac{-3}{(x-1)^2}\Delta x$$

$$dy = \frac{-3.0{,}1}{(-1-1)^2} = \frac{-0{,}3}{4} = -0{,}075.$$

28. Calcule um valor aproximado para as seguintes raízes, usando diferenciais.

a) $\sqrt{50}$

$\sqrt{50} = \sqrt{49+1}$

$y = \sqrt{x}$, $x = 49$, $\Delta x = 1$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\Delta x$$
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{49}}.1 \qquad\qquad y+\Delta y = \sqrt{x+\Delta x}$$
$$= \frac{1}{2.7} = \frac{1}{14}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y\cong dy$$
$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+dy$$
$$\sqrt{50}\cong\sqrt{49}+\frac{1}{14}$$
$$\sqrt{50}\cong 7+\frac{1}{14}\cong 7+0{,}071.$$

b) $\sqrt[3]{63{,}5}$

$$y=\sqrt[3]{x}\ ,\ x=64,\ \Delta x=-0{,}5$$

$$dy=\frac{1}{3}x^{-2/3}\Delta x$$
$$=\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$
$$=\frac{-0{,}5}{3\sqrt[3]{64^2}}=\frac{-0{,}5}{3\,.16}=\frac{-0{,}5}{48}=-0{,}010416$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y\cong dy$$
$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+dy$$
$$\sqrt[3]{63{,}5}\cong\sqrt[3]{64}+dy=4-0{,}104=3{,}9895$$

c) $\sqrt[4]{13}$

$$y=\sqrt[4]{x}\ ,\ x=16,\ \Delta x=-3$$

$$dy=\frac{1}{4}x^{-3/4}\Delta x$$
$$=\frac{\Delta x}{4\sqrt[4]{x^3}}$$
$$=\frac{-3}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{-3}{32}=-0{,}09375$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y\cong dy$$
$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+dy$$

$\sqrt[4]{13} \cong \sqrt[4]{16} + (-0{,}09375) \cong 2 - 0{,}09375 \cong 1{,}906.$

29. Calcular a diferencial das seguintes funções

a) $y = \ln(3x^2 - 4x)$

$$dy = \frac{6x-4}{3x^2-4x} \,.\, dx$$

b) $y = \frac{x+1}{e^x}$

$$dy = \frac{e^x \,.1 - (x+1)e^x}{e^{2x}} \,.\, dx$$

$$= \frac{e^x - xe^x - e^x}{e^{2x}} \,.\, dx$$

$$= \frac{-x}{e^x} \,.\, dx$$

c) $y = sen\,(5x^2 + 6)$

$$dy = 10x\cos(5x^2+6)\,dx$$

30. A área s de um quadrado de lado x é dada por $S = x^2$. Achar o acréscimo e a diferencial desta função e determinar o valor geométrico desta última.

$S = x^2$

Calculando o acréscimo:

$\Delta s = (x + \Delta x)^2 - x^2$

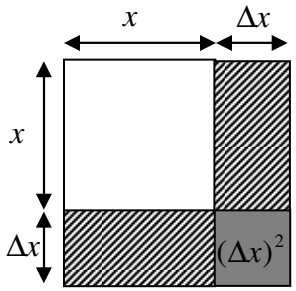
$\Delta s = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$

$\Delta s = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

Calculando a diferencial:

$ds = 2x\Delta x$

A Figura que segue mostra a interpretação geométrica.



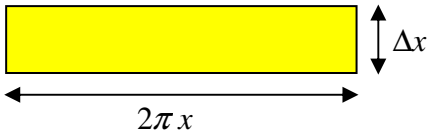
31. Dar a interpretação geométrica do acréscimo e da diferencial da função $s = \pi x^2$ (área do círculo).

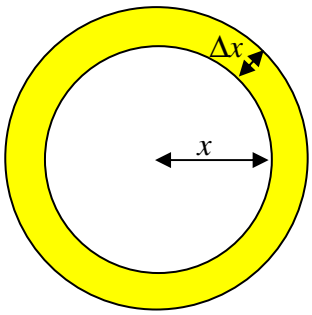
$ds = 2\pi x \,.\, \Delta x$

$\Delta s = \pi(x + \Delta x)^2 - \pi\, x^2$

$= \pi\, x^2 + 2x\Delta x\pi + \pi(\Delta x)^2 - \pi\, x^2 = 2x\Delta x\pi + \pi(\Delta x)^2$

As figuras que seguem mostram uma interpretação geométrica da diferencial e do acréscimo.





32. Uma caixa em forma de cubo deve ter um revestimento externo com espessura de $1/4cm$. Se o lado da caixa é de $2\,m$, usando diferencial, encontrar a quantidade de revestimento necessária.

Volume do cubo:

$V = x^3$

Diferencial da função no ponto $x = 200\,cm$ para uma espessura de ¼ cm ou seja

$\Delta x = 0{,}25\,cm..$

$dV = 3x^2 \,.\, \Delta x$

$= 3 \,.\, 200^2 \,.\, 0{,}25$

$= 3 \,.\, 40000 \,.\, 0{,}25\,cm^3$

$= 30000\,cm^3.$

33. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio da base. Se em dado instante o raio é ½ cm, use diferenciais para obter a variação do raio que origina um aumento de $2\,cm^3$ no volume da pilha.

$h = r = 12\,cm$

$V = \frac{\pi\, r^2 h}{3} = \frac{\pi\, r^3}{3}$

$dV = \frac{3\pi\, r^2}{3}\Delta r = \pi\, r^2 . \Delta r$

Aplicando os dados:

$2 = \pi . 12^2 . \Delta r$

$2 = \pi . 144 . \Delta r$

$\Delta r = \frac{2}{\pi . 144} = \frac{2}{452,389} = 0,0044209$

34. Use diferenciais para obter o aumento aproximado do volume da esfera quando o raio varia de 3 cm a 3,1 cm.

$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$

$dV = \frac{4}{3}\pi . 3r^2\ dr$

$dV = \frac{4}{3}\pi . 3^2 . 0,1$

$= 3,6 \times \pi$

$\cong 11,309733\,cm^3$

35. Um terreno, em desapropriação para reforma agrária tem a forma de um quadrado. Estima-se que cada um de seus lados mede $1200\,m$, com um erro máximo de $10\,m$. Usando diferencial, determine o possível erro no calculo da área do terreno.

$A = x^2$

$dA = 2x\Delta x$

$dA = 2 . 1200 . (\pm 10)$

$dA = 2400 . (\pm 10)$

$= \pm\, 24000$

36. Um pintor é contratado para pintar ambos os lados de 50 placas quadradas com 40 cm de lados. Depois de receber as placas verificou que os lados das placas tinham $\frac{1}{2} cm$ a mais. Usando diferencial encontre o aumento aproximado da porcentagem de tinta a ser usada.

$A = x^2$

$dA = 2x\,\Delta x$

Para $x = 40\,cm$ e $\Delta x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad dA = 2\,.\,40\,.\,0{,}5 = 40 cm^2$

1 lado de 1 placa: $40\,cm^2$

2 lados de 1 placa: $80\,cm^2$

50 Placas → $80 \times 50 = 4000\,cm^2$

1 placa → $x^2 = 40^2 = 1600\,cm^2$

50 placas → $50 \times 1600 = 80\,000\,cm^2$

Considerando os dois lados temos $160\,000\,cm^2$.

Fazendo o percentual vem:

$160\,000\,cm^2 \rightarrow 100\%$

$4000\,cm^2 \rightarrow x$

$$x = \frac{4000 \times 100}{160\,000} = \frac{40}{16} = 2{,}5\%.$$

CAPÍTULO 4

4.7 – EXERCÍCIOS – pg. 127

1. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

(a) $f(x) = x^2 - 1;\ x = 1,\ x = 0,\ x = a,\ a \in R.$

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 1 - x^2 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

$m\,(1) = 2.1 = 2$

$y - y_1 = m\,(x - 1)$

$y - 0 = 2\,(x - 1)$

$y = 2x - 2$

$m\,(0) = 2.0 = 0$

$y + 1 = (x - 0)$

$y + 1 = 0$

$y = -1$

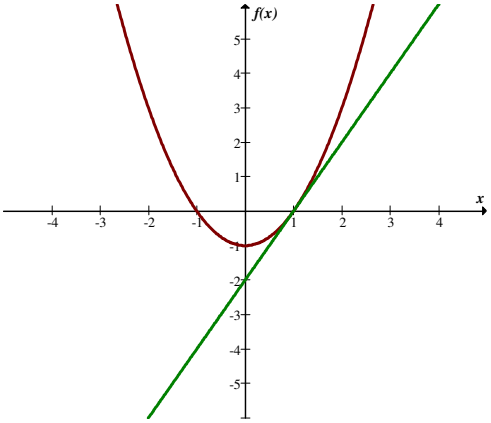
$m\,(a) = 2a$

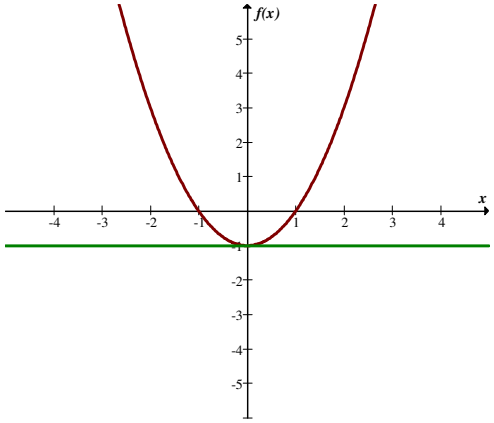
$y - a^2 + 1 = 2a\,(x - a)$

$y - a^2 + 1 = 2ax - 2a^2$

$y = 2ax - a^2 - 1$

As figuras que seguem mostram as retas tangentes para os pontos $x = 1$ e $x = 0$. Como o valor de *a* é genérico o gráfico só pode ser apresentado com o valor definido.





(b) $f(x) = x^2 - 3x + 6;\ x = -1,\ x = 2.$

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 6 - x^2 + 3x - 6}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x - 3)}{\Delta x} = 2x - 3$$

Temos:

$m(-1) = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$

$y - 10 = -5x - 5$

$y = -5x + 5$

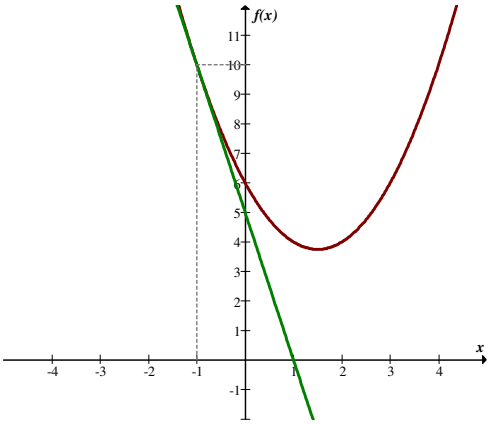
$m(2) = 2.2 - 3 = 4 - 3 = 1$

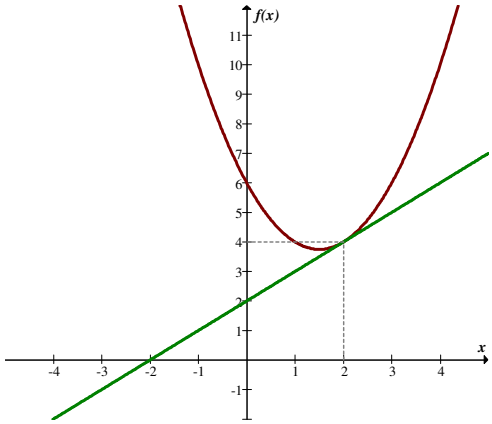
$y - 4 = 1(x - 2)$

$y = x - 2 + 4$

$y = x + 2$

Seguem os gráficos.





(c) $f(x) = x(3x-5);\ x = \dfrac{1}{2}, x = a,\ a \in IR.$

$f(x) = 3x^2 - 5x$

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x) - 3x^2 + 5x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x - 3x^2 + 5x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 5)}{\Delta x} = 6x - 5$$

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = 6.\frac{1}{2} - 5 = 3 - 5 = -2$$

Temos:

$$y + \frac{7}{4} = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{7}{4} = -2x + 1$$

$$4y + 7 = -8x + 4$$

$$8x + 4y + 3 = 0$$

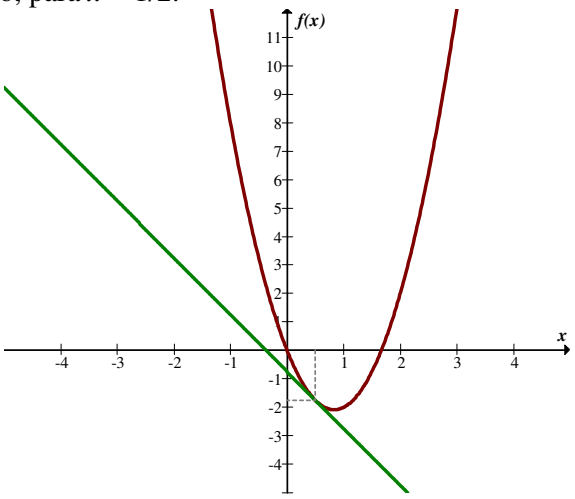
$$m(a) = 6a - 5$$

$$y - 3a^2 + 5a = (6a-5)(x-a)$$

$$y - 3a^2 + 5a = 6ax - 6a^2 - 5x + 5a$$

$$y = (6a-5)x - 3a^2.$$

Segue o gráfico, para $x = 1/2$.



2. Em cada um dos itens do exercício (1), determine a equação da reta normal à curva, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

(a) $f(x) = x^2 - 1$

$x = 1$

Temos que:

$m(1) = 2$

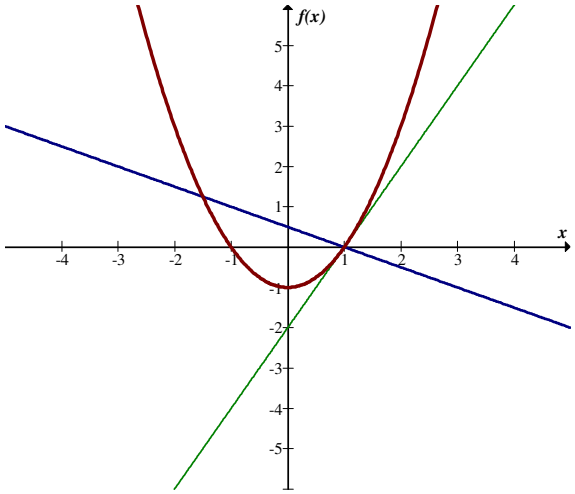
$$m_{normal} = -\frac{1}{2}$$

Assim,

$$y - 0 = \frac{-1}{2}(x - 1)$$

$$2y = -x + 1 \quad ou \quad x + 2y - 1 = 0$$

Segue o gráfico com a reta tangente incluída para facilitar a visualização.

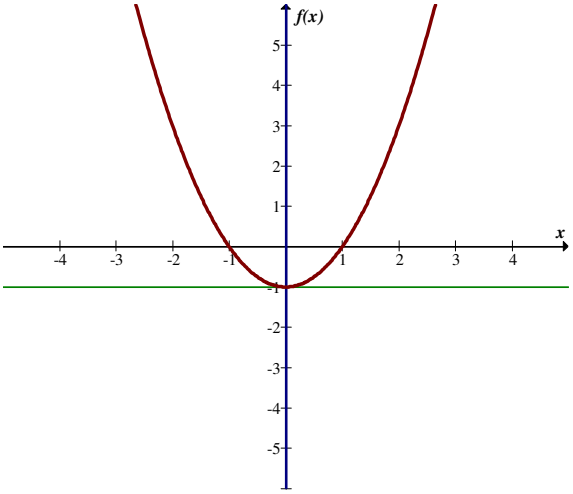


$x = 0$

$m(0) = 0$

Neste caso a reta tangente é horizontal e a reta normal coincide com o eixo dos y, ou seja, $x = 0$.

Segue o gráfico com a reta tangente incluída para facilitar a visualização.



$x = a$

$m(a) = 2a \qquad m_n = -\dfrac{1}{2a}$

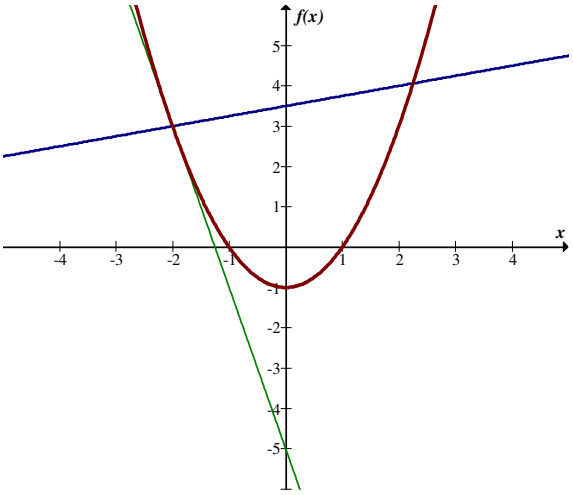
Assim,

$$(y - a^2 + 1) = \frac{-1}{2a}(x - a)$$

$$2ay - 2a^3 + 2a = -x + a$$

$$x + 2ay - 2a^3 + a = 0$$

Segue o gráfico com a reta tangente incluída para facilitar a visualização e usando-se o valor de $a = -2$.



b) $f(x) = x^2 - 3x + 6; \quad x = -1, x = 2.$

$x = -1$

Temos:

$$m(-1) = -5$$

$$m_n = \frac{1}{5}$$

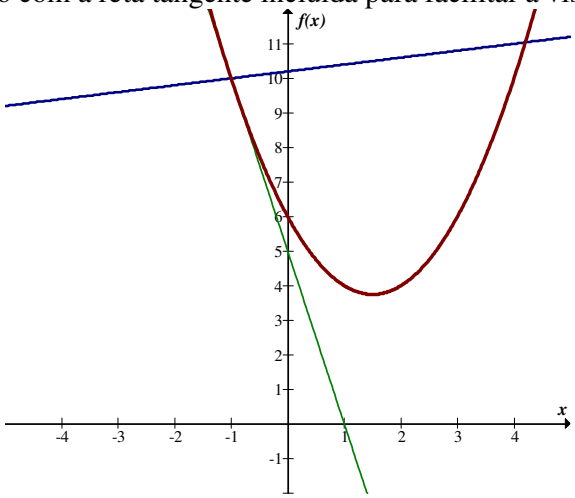
Assim,

$$y - 10 = \frac{1}{5}(x + 1)$$

$$5y - 50 = x + 1$$

$$x - 5y + 51 = 0$$

Segue o gráfico com a reta tangente incluída para facilitar a visualização.



$$x = 2$$

Temos:

$$m(2) = 1$$

$$m_n = -1$$

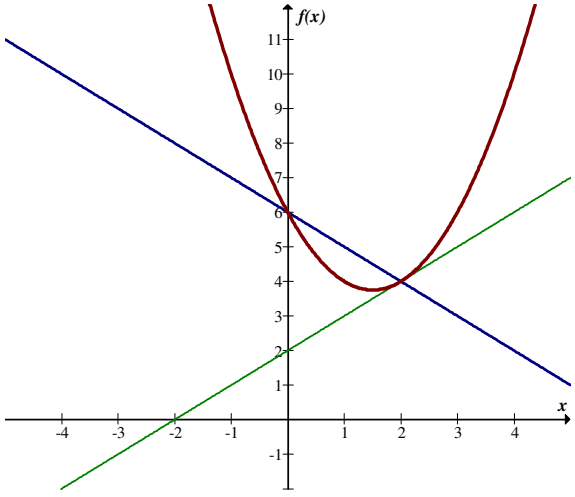
Assim,

$$y - 4 = -1(x - 2)$$

$$y - 4 = -x + 2$$

$$x + y - 6 = 0.$$

Segue o gráfico com a reta tangente incluída para facilitar a visualização.



c) $f(x) = x(3x-5); \quad x = \frac{1}{2}, x = a, a \in R.$

Temos:

$$m(1/2) = -2$$

$$m_n = \frac{1}{2}$$

Assim,

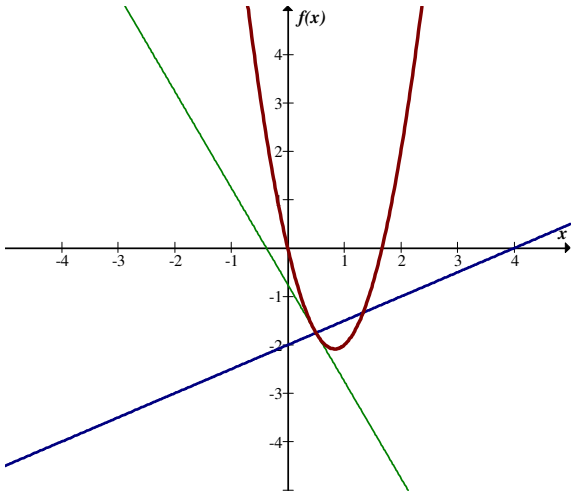
$$y + \frac{7}{4} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$4y + 7 = 2x - 1$$

$$2x - 4y - 8 = 0$$

$$x - 2y - 4 = 0.$$

Segue o gráfico com a reta tangente incluída para facilitar a visualização.



Temos:

$$m(a) = 6a - 5$$

$$m_n = \frac{1}{6a-5} = \frac{1}{5-6a}, a \neq \frac{5}{6}$$

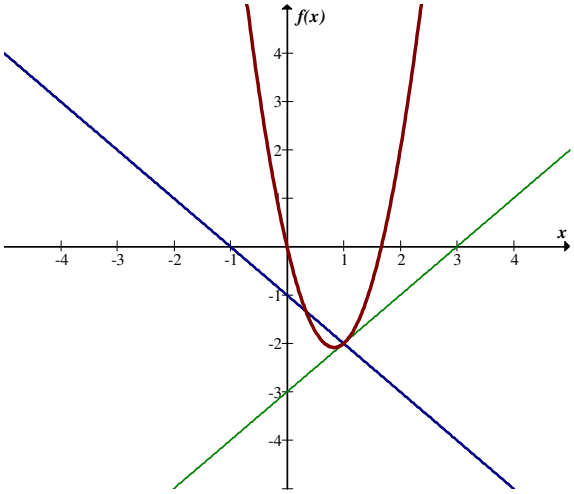
Assim,

$$y - 3a^2 + 5a = \frac{1}{5-6a}(x-a)$$

$$(5-6a)y - 3a^2(5-6a) + 5a(5-6a) = (x-a)$$

$$x - (5-6a)y - 18a^3 + 45a^2 - 26a = 0$$

Segue o gráfico com a reta tangente incluída para facilitar a visualização, usando-se como exemplo valor de $a = 1$.



3. Determinar a equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^2$, que seja paralela à reta $y = 1 - x$. Esboçar os gráficos da função, da reta dada e da reta tangente encontrada.

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - (x + \Delta x)^2 - 1 + x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - x^2 - 2x\Delta x \ - (\Delta x)^2 - 1 + x^2}{\Delta x}$$

$$= -2x$$

$$y = 1 - x \Rightarrow m = -1$$

$$-2x = -1$$

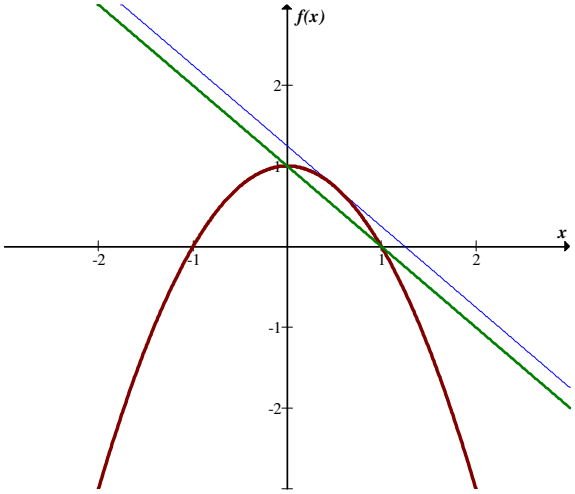
$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Assim,

$$y - \frac{3}{4} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$4y - 3 = -4x + 2$$

$$4x + 4y - 5 = 0.$$



4. Encontrar as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(-2,9)$.

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1 - x^2 + 2x - 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 1 - x^2 + 2x - 1}{\Delta x}$$
$$= 2x - 2$$

$$m(-2) = 2(-2) - 2 = -4 - 2 = -6$$

$$m_n = \frac{1}{6}$$

Equação da reta tangente:

$$y - 9 = -6(x + 2)$$
$$y - 9 = -6x + 12$$
$$6x + y + 3 = 0$$

Equação da reta normal:

$$y - 9 = \frac{1}{6}(x + 2)$$
$$6y - 54 = x + 2$$
$$x - 6y + 56 = 0$$

5. Um corpo se move em linha reta, de modo que sua posição no instante t é dada por $f(t) = 16t + t^2, 0 \le t \le 8,$ onde o tempo é dado em segundos e a distância em metros.

(a) Achar a velocidade média durante o intervalo de tempo $[b, b+h]$, $0 \le b < 8$.

$$f(t) = 16t + t^2, \quad 0 \le t \le 8$$

$$v_m = \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

$$= \frac{16(b+h) + (b+h)^2 - 16\,b - b^2}{h}$$

$$= \frac{16b + 16h + b^2 + 2bh + h^2 - 16\,b - b^2}{h}$$

$$= \frac{16h + 2bh + h^2}{h} = \frac{h(16 - 2b + h)}{h}$$

$$v_m = 16 + 2b + h; \qquad 0 \le b < 8$$

(b) Achar a velocidade média durante os intervalos $[3;3,1], [3;3,01]$ *e* $[3;3,001]$.

$$v_m = 16 + 2b + h$$

[3;3,1]

$$v_m = 16 + 2.3 + 0,1$$
$$= 16 + 6 + 0,1$$
$$= 22,1\ m/seg$$

[3;3,01]

$$v_m = 16 + 2.3 + 0,01$$
$$= 16 + 6 + 0,01$$
$$= 22,01\ m/seg$$

[3;3,001]

$$v_m = 16 + 2.3 + 0,001$$
$$= 16 + 6 + 0,001$$
$$= 22,001\ m/seg$$

(c) Determinar a velocidade do corpo num instante qualquer t.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} v_m$$
$$= \lim_{h \to 0} (16 + 2t + h)$$
$$v(t) = 16 + 2t$$

(d) Achar a velocidade do corpo no instante $t = 3$.

$$\begin{aligned} v(3) &= 16 + 2.3 \\ &= 16 + 6 \\ &= 22\ m/seg \end{aligned}$$

(e) Determinar a aceleração no instante t.

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16 + 2(t+\Delta t) - 16 - 2t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t}{\Delta t} = 2m/seg^2 \end{aligned}$$

6. Influências externas produzem uma aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento retilíneo é $y = \frac{b}{t} + ct$, onde y é o deslocamento e t o tempo.

(a) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 2$?

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{b}{t+\Delta t} + c(t+\Delta t) - \frac{b}{t} - ct}{\Delta t} = \frac{-b}{t^2} + c\ .$$

$v(2) = \frac{-b}{4} + c$ unidade de velocidade.

(b) Qual é a equação da aceleração?

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{-b}{(t+\Delta t)^2} + c - \frac{b}{t^2} - c}{\Delta t} = \frac{2b}{t^3}$$ unidades de aceleração.

7. Dadas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:

(a) $f'(1) + g'(1)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5 - 2(x + \Delta x) - 5 + 2x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5 - 2x - 2\Delta x - 5 + 2x}{\Delta x}$$
$$= -2$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 1 - 3x^2 + 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 1 - 3x^2 + 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6x + 3\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 6x$$

$f'(1) + g'(1) = -2 + 6.1 = -2 + 6 = 4$.

(b) $2f'(0) - g'(-2)$.

$$2(-2) - 6(-2) = -4 + 12 = 8.$$

(c) $f(2) - f'(2)$.

$$f(2) - f'(2). = 5 - 2.2 + (-2) = 5 - 4 - 2 = -1$$

(d) $[g'(0)]^2 + \frac{1}{2}g'(0) + g(0)$.

$$[g'(0)]^2 + \frac{1}{2}g'(0) + g(0) = [6.0]^2 + \frac{1}{2}.6.0 + 3.0^2 - 1 = -1.$$

(e) $f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{f'(5/2)}{g'(5/2)} = 5 - 2.\frac{5}{2} - \frac{-2}{6.\frac{5}{2}} = 0 + \frac{2}{15} = \frac{2}{15}.$$

8. Usando a definição, determinar a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 1 - 4x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 4(x+\Delta x)^2 - 1 - 4x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 4x^2 - 8x\Delta x - 4(\Delta x)^2 - 1 + 4x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} = (-8x - 4\Delta x) = -8x$$

(b) $f(x) = 2x^2 - x - 1.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - 1 - 2x^2 + x + 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - x - \Delta x - 2x^2 + x}{\Delta x}$$
$$= 4x - 1$$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+2}.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x+2} - \frac{1}{x+2}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+2-x-\Delta x-2}{(x+\Delta x+2)(x+2)} . \frac{1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

(d) $f(x) = \frac{1-x}{x+3}.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1-x-\Delta x}{x+\Delta x+3} - \frac{1-x}{x+3}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+3)(1-x-\Delta x) - (x+\Delta x+3)(1-x)}{(x+\Delta x+3)(x+3)} . \frac{1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+3-x^2-3x-x\Delta x-3\Delta x-x+x^2-\Delta x+x\Delta x-3+3x}{(x+\Delta x+3)(x+3)\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-x-3-1+x)}{\Delta x(x+\Delta x+3)(x+3)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{-4}{(x+3)^2}$$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2(x+\Delta x)-1}}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}\,\sqrt{2x-1}} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x-1-2(x+\Delta x)+1}{\left(\sqrt{2x-1}\,\sqrt{2(x+\Delta x)-1}\right)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{-1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x+3} - \sqrt[3]{x+3}}{\Delta x}$$

Fazendo:

$x + \Delta x + 3 = t^3$

$x + 3 = a^3 \Rightarrow \Delta x = t^3 - a^3$

Temos:

$$f'(x) = \lim_{t \to a} \frac{t-a}{t^3 - a^3}$$

$$= \lim_{t \to a} \frac{t-a}{(t-a)\,(t^2 + at + a^2)}$$

$$= \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

9. Dadas as funções $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = 2x^2 - 3,$ determinar os itens que seguem e, usando uma ferramenta gráfica, fazer um esboço do gráfico das funções obtidas, identificando o seu domínio.:

(a) $f_0\, f'$

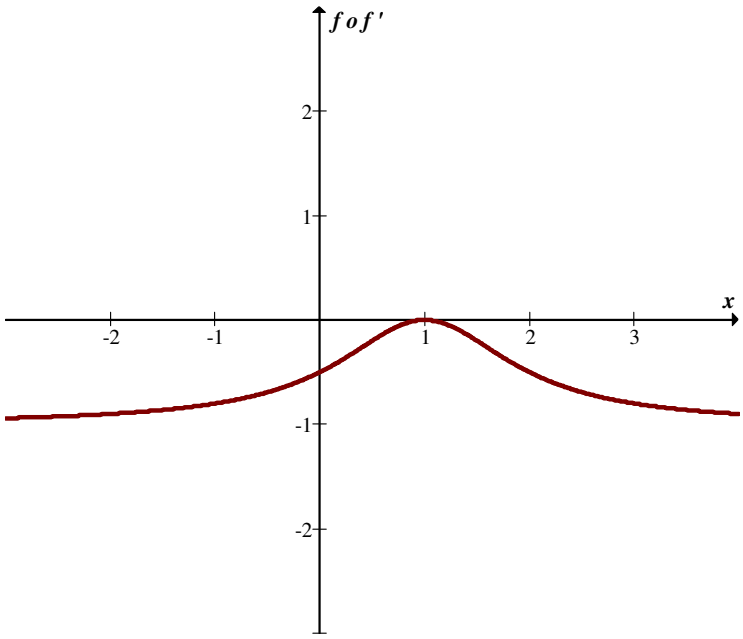
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x-1} - \dfrac{1}{x-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x-1) - x - \Delta x + 1}{(x+\Delta x-1)\,(x-1)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f_0 f' = f\,[f'] = f\left[\frac{-1}{(x-1)^2}\right] = \frac{1}{\dfrac{-1}{(x-1)^2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1-(x-1)^2}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{-1-x^2+2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-x^2-2}$$

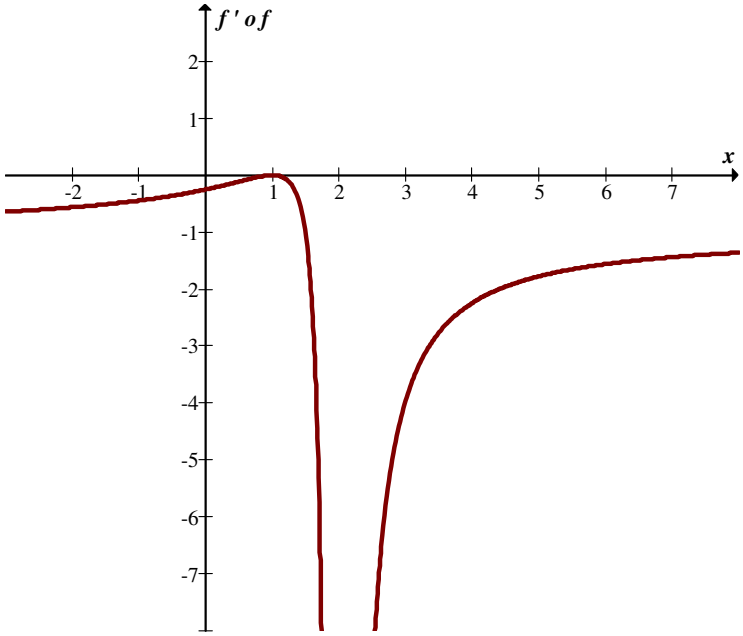


(b) $f'_0 f$

$$f'[f] = f'\left[\frac{1}{x-1}\right]$$

$$= \frac{-1}{\left(\dfrac{1}{x-1}-1\right)^2} = \frac{-1}{\left(\dfrac{1-x+1}{x-1}\right)^2} =$$

$$= -\frac{(x-1)^2}{(2-x)^2} = -\left(\frac{x-1}{2-x}\right)^2$$



(c) $g_0 f'$

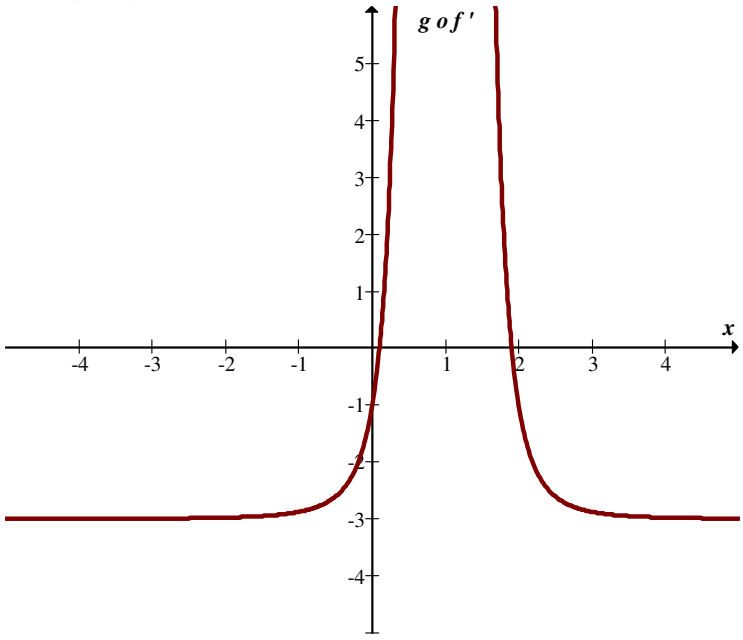
$$g_0 f' = g\,[f']$$

$$= g\left[\frac{-1}{(x-1)^2}\right]$$

$$= 2\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)^2 - 3$$

$$= 2\,\frac{1}{(x-1)^4} - 3$$

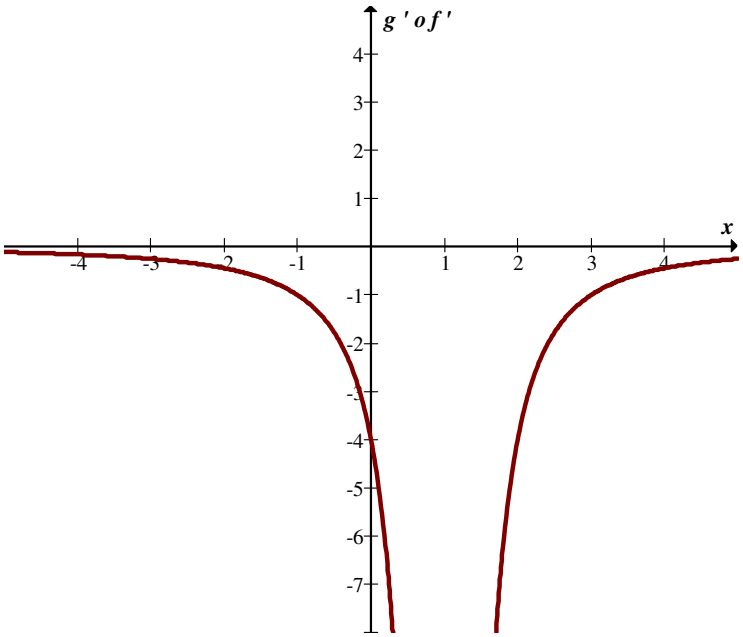
$$= \frac{2}{(x-1)^4} - 3$$



(d) $g' \circ f'$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 - 3 - 2x^2 + 3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4x$$

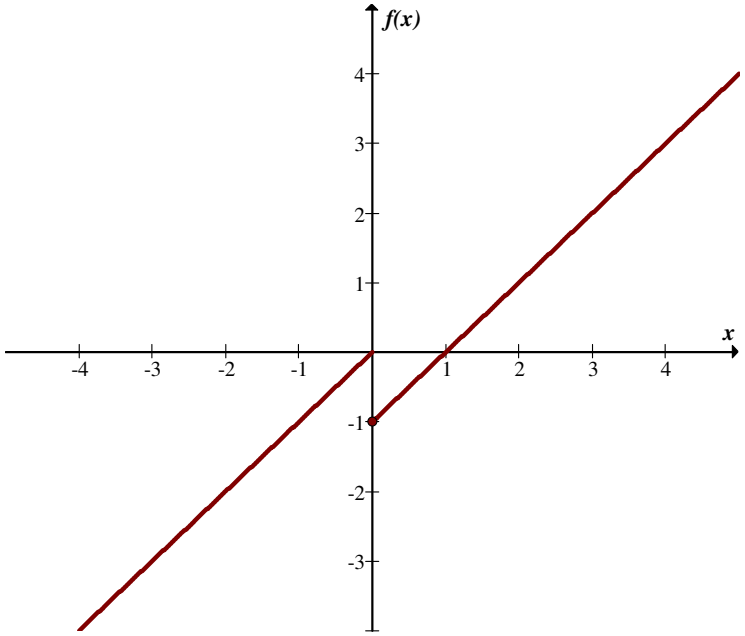
$$g' \circ f' = g'[f'] = g'\left[\frac{-1}{(x-1)^2}\right]$$
$$= 4.\frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}.$$



Obs.:É inadequado visualizar o domínio através do gráfico das funções compostas. No item (a) $-x^2 + 2x - 2$ não tem raízes reais, induzindo o aluno a achar que o domínio é R

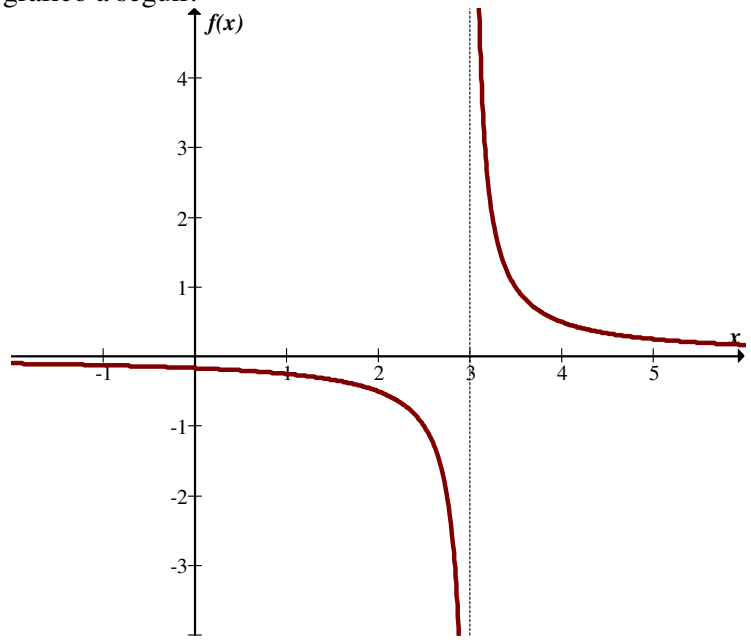
10. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, verificar se existe $f'(0)$. Esboçar o gráfico.

Não existe $f'(0)$, porque f não é contínua em $x = 0$. Veja o gráfico a seguir.



11. Dada a função $f(x)=\dfrac{1}{2x-6}$, verificar se existe $f'(3)$. Esboçar o gráfico.

Não existe $f'(3)$, porque f não é contínua (não é definida) em $x=3$. Veja o gráfico a seguir.



12. Dada a função $f(x)=2x^2-3x-2$, determinar os intervalos em que:

(a) $f'(x)>0$.
(b) $f'(x)<0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - 2 - 2x^2 + 3x + 2}{\Delta x} = 4x - 3$$

$4x - 3 > 0$ $\qquad$ $4x - 3 < 0$

$4x > 3$ $\qquad$ $4x < 3$

$x > \frac{3}{4}$ $\qquad$ $x < \frac{3}{4}$

(a) $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

(b) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

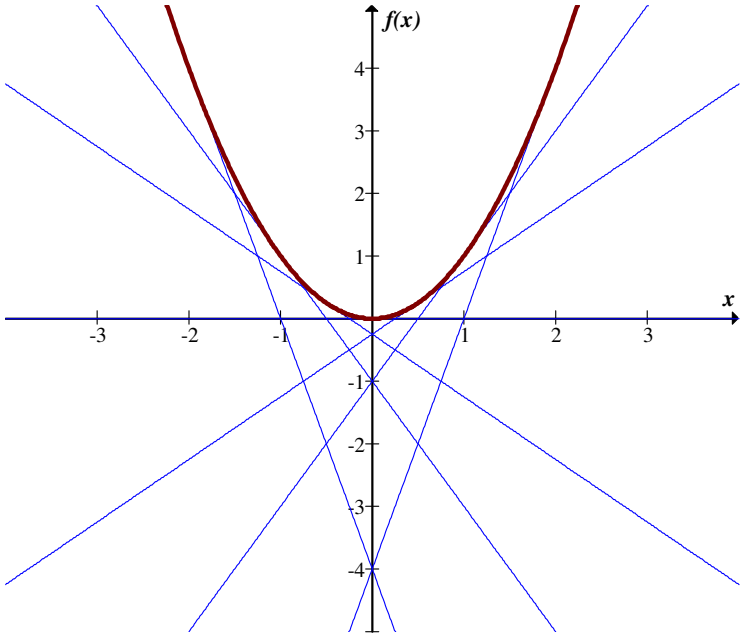
13. Simular graficamente diferentes tangentes à curva $y = x^2$. Supondo que existem duas retas tangentes que passam pelo ponto $P(0,-4)$, encontrar o ponto de tangência e as equações das retas.

A declividade das retas tangentes em $x = a$ são dadas por:

$$y' = 2x$$

$$y'(a) = 2a = m$$

O gráfico que segue mostra a simulação para a assumindo os valores: -2, -1, -1/2, 0, ½, 1 e 2.



Observamos as duas retas que passam pelo ponto $P(0,-4)$. A equação da reta tangente é obtida fazendo-se:

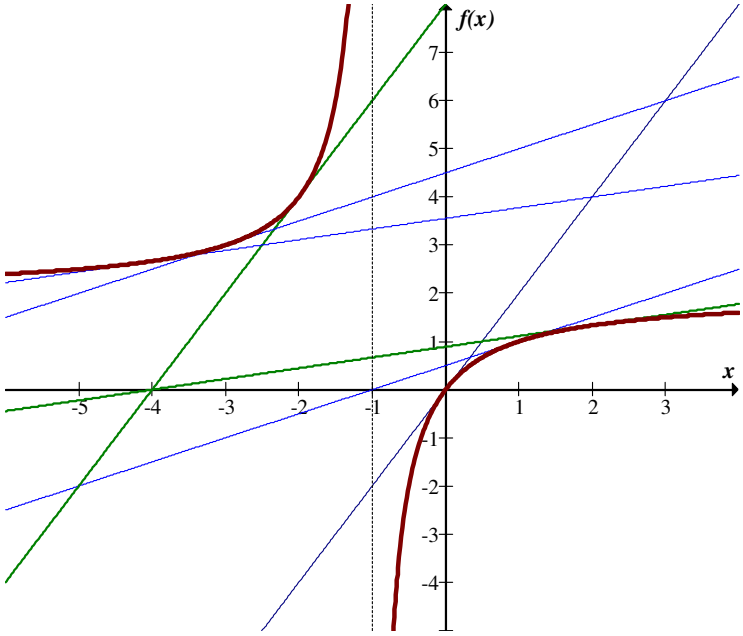
$y - y_0 = m\,(x - x_0)$
$y + 4 = 2a\,(x - 0)$
$y + 4 = 2a\,x$

A reta passa, também em, (a, a^2):

$a^2 + 4 = 2a\,.\,a \Rightarrow a^2 = 4,\ a = \pm 2$
Assim temos:
$a = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 4$ Ponto de tangência: $(2, 4)$
$a = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -4x - 4$ Ponto de tangência: $(-2, 4)$

14. Quantas retas tangentes à curva $y = \dfrac{2x}{x+1}$ passam pelo ponto $P(-4,0)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

O gráfico a seguir mostra uma simulação na qual podemos observar duas retas tangentes que passam por $P(-4,0)$.



Para encontrar o ponto de tangência temos:

$$y' = \left(\frac{2x}{x-1}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Supor (x_1, y_1) o ponto de tangência.

A equação da reta tangente é:: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

$$y - 0 = \frac{2}{(x_1 + 1)^2}(x + 4)$$

Precisamos encontrar x_1. No ponto de tangência: $y_1 = \frac{2x_1}{x_1 + 1}$ e $y_1 = \frac{2}{(x_1 + 1)^2}(x_1 + 4)$.

Então:

$$\frac{2x_1}{x_1 + 1} = \frac{2x_1 + 8}{(x_1 + 1)^2}$$

$$x_1 = \frac{x_1 + 4}{x_1 + 1}$$

$$x_1(x_1 + 1) = x_1 + 4$$

$$x_1^{\,2} + x_1 - x_1 = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1' = -2 \end{cases}$$

$$P_1 = \left(2, \frac{4}{3}\right) \qquad P_2 = (-2, 4)$$

Equações das retas tangentes: $y = \frac{2}{9}(x + 4)$ e $y = 2(x + 4)$.

5.10 – EXERCÍCIO – pg. 215

1. Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b), tal que

$$f(c) = \frac{f(a) - f(a)}{b - a}.$$

a) $f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 2, b = 3$

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $[2,3]$.

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é derivável em $(2,3)$, pois o $\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ existe para todo x no intervalo $(2,3)$.

Temos, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$$f'(c) = \frac{-1}{c^2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a}$$

$$\frac{-1}{c^2} = \frac{\frac{a - b}{ab}}{b - a}$$

$$\frac{-1}{c^2} = \frac{a - b}{ab} \cdot \frac{1}{b - a}$$

$$\frac{-1}{c^2} = \frac{-(b - a)}{ab\,(b - a)}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ab}$$

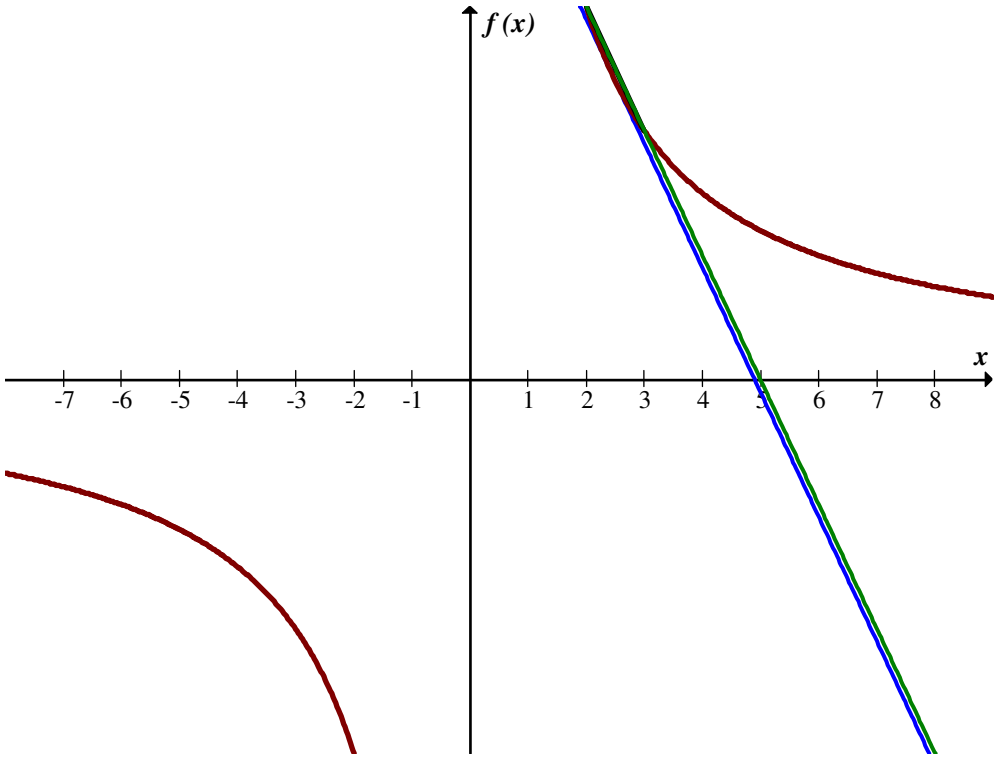
$$c^2 = ab$$

$$c = \sqrt{ab}$$

$$c = \sqrt{2.3}$$

$$c = \sqrt{6}$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



b) $f(x)=\frac{1}{x};\quad a=-1, b=3.$

Não se aplica o Teorema, pois a função não é contínua em $[-1,3]$.

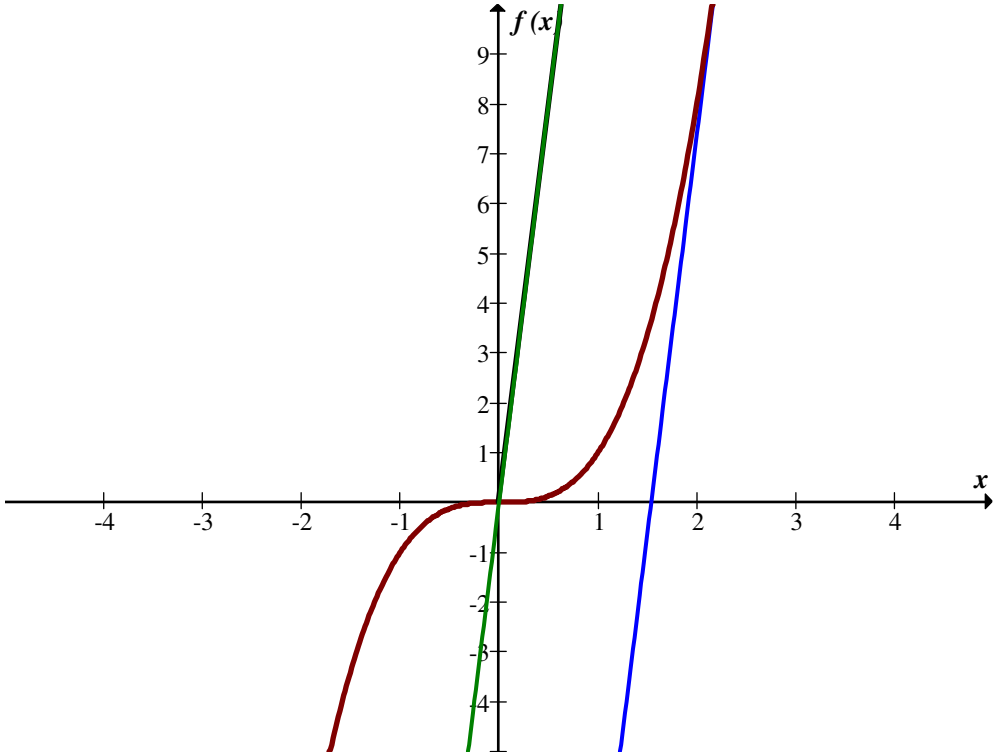
c) $f(\mathrm{x})=x^3;\quad a=0, b=4.$

A função é derivável em $(0,4)$ e contínua em $[0,4]$, pois f é do tipo polinomial.

$\Rightarrow \exists$ c tal que:

$$f'(c)=3c^2=\frac{b^3-a^3}{b-a}\Rightarrow 3c^2=\frac{4^3-0^3}{4-0}\quad\therefore\quad c=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



d) $f(x) = x^3; \quad a = -2, b = 0.$

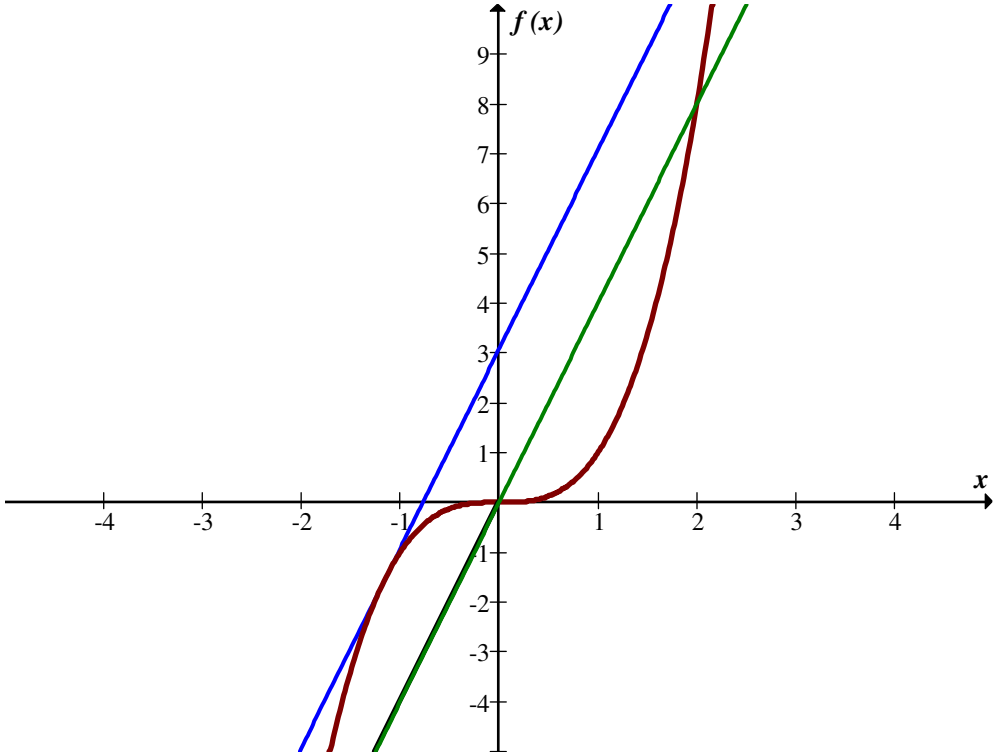
A função é derivável em $(-2,0)$ e é contínua em $[-2,0]$, pois f é do tipo polinomial. Assim,

$$f'(c) = 3c^2 = \frac{0^3 - (-2)^3}{0 - (-2)}$$

$$3c^2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad c = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



e) $f(x) = \cos x; \quad a = 0, b = \pi/2.$

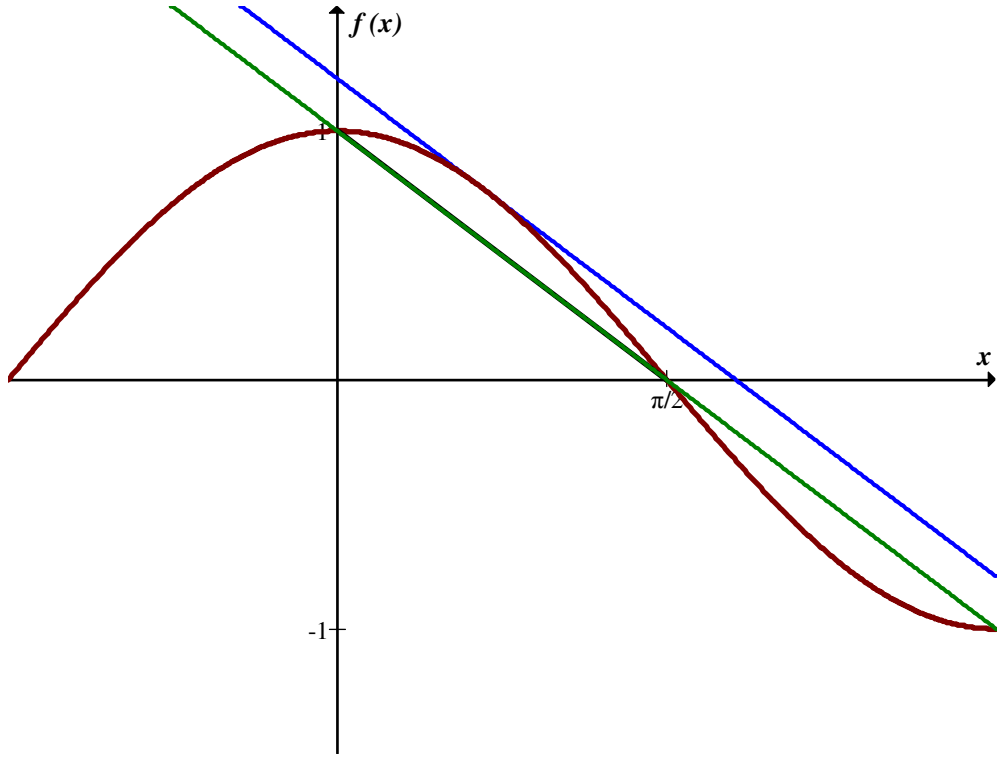
A função f é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e é derivável em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Assim,

$$f'(c) = -sen\ c = \frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0}{\frac{\pi}{2} - 0}$$

$$-sen\ c = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}}$$

$$c = arc\ sen\ \frac{2}{\pi}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



f) $f(x) = tg\, x; \quad a = \pi/4, b = 3\pi/4.$

A função $f(x) = tg\, x$ não é contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Portanto, não se aplica o teorema.

g) $f(\mathrm{x}) = \mathrm{tg\ x}; \quad a = 0, \mathrm{b} = \pi/4.$

A função $f(x) = tg\, x$ é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e é derivável em $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Assim,

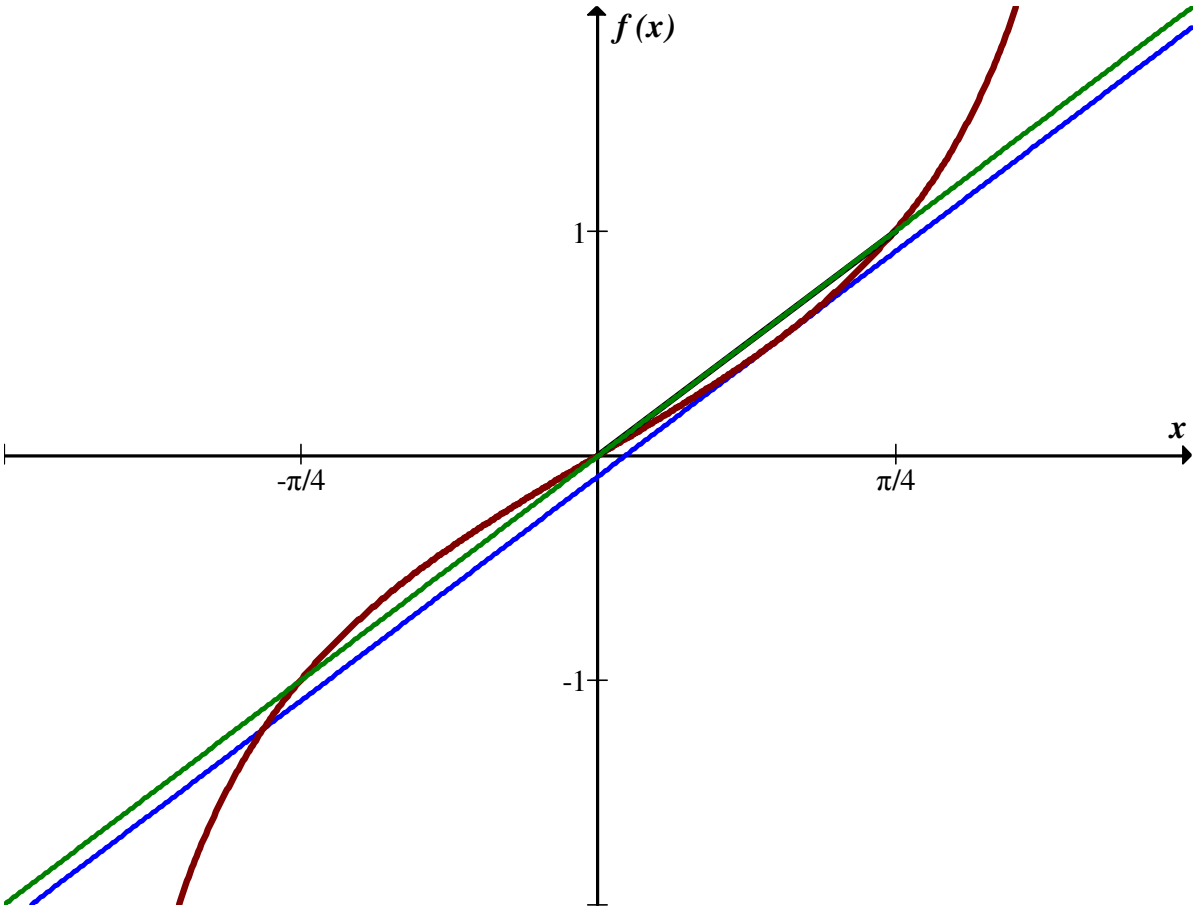
$$f'(c) = \sec^2 c = \frac{tg\ \frac{\pi}{4} - tg\ 0}{\frac{\pi}{4} - 0}$$

$$\sec^2 c = \frac{1-0}{\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad \sec^2 c = \frac{4}{\pi}$$

$$\sec c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$c = arc\ \sec \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



h) $f(x)=\sqrt{1-x^2}; \quad x=-1, b=0.$

A função $f(x)$ é contínua em $[-1,0]$ e derivável em $(-1,0)$. Assim,

$$f'(c)=\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{\sqrt{1-0^2}-\sqrt{1-(-1)^2}}{0-(-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{1-0}{1}$$

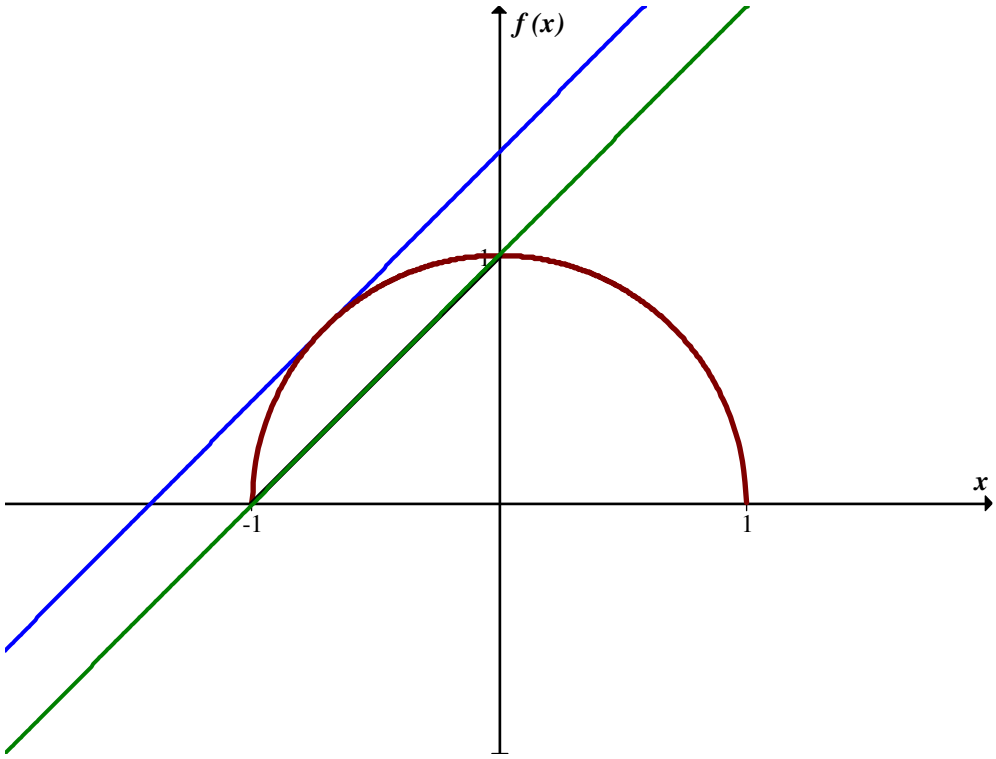
$$-c=\sqrt{1-c^2}$$

$$c^2=1-c^2$$

$$c^2+c^2=1 \quad \Rightarrow \quad 2c^2=1 \quad \therefore \quad c^2=\frac{1}{2}$$

$$c=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



i) $f(\mathrm{x}) = \sqrt[3]{\mathrm{x}}; \quad a = \text{-}1, \mathrm{b} = 1.$

A função é contínua em $[-1,1]$ mas não é derivável em $(-1,1)$. Assim, não se aplica o teorema.

j) $f(\mathrm{x}) = |\,\mathrm{x}\,|; \quad a = \text{-}1, \mathrm{b} = 1$

A função é contínua em $[-1,1]$, mas não é derivável em $(-1,1)$, porque não é derivável em $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-0}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x-0}{x} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(0)$$

Assim, não se aplica o Teorema.

2. A função $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{2/3} - 1$ é tal que $f(x) = f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1,1]$?

$$f(x) = x^{2/3} - 1 = \sqrt[3]{x^2} - 1$$
$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x}$$

A função f não é derivável no intervalo $[-1,1]$, pois não é derivável em 0.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1 - \sqrt[3]{0^2} + 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$$

3. Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3,3]$ e determinar os valores de $c \in (-3,3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.

A função f é função polinomial, portanto é contínua e derivável em qualquer intervalo.

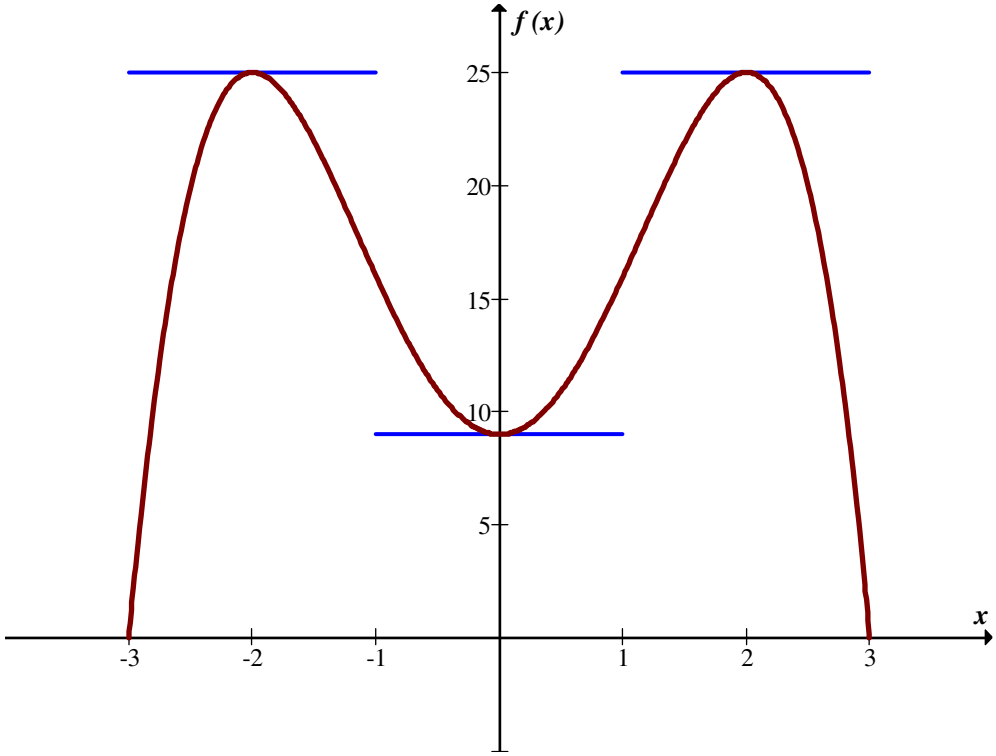
Em particular é contínua em $[-3,3]$ e derivável em $(-3,3)$.

$$\Rightarrow \exists\, c \in (-3,3) \quad / \quad f'(c) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = -81 + 72 + 9 = 0 \\ f(-3) = -81 + 72 + 9 = 0 \end{array}\right\} f(3) - f(-3) = 0$$

$$f'(x) = -4x^3 + 16x$$
$$-4c^3 + 16c = 0$$
$$c = 0 \text{ ou } -4c^2 + 16 = 0$$
$$\Rightarrow c = 0, -2, +2.$$

A figura que segue ilustra a situação apresentada.



4. Usando o teorema do valor médio provar que:

a) $|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\alpha| \le |\theta - \alpha|,\ \forall \theta, \alpha \in R$;

Seja $f(x) = sen\,x$. f é contínua e derivável em R .

Considerando-se f contínua em $[\theta,\alpha]$ e derivável em $(\theta,\alpha) \Rightarrow \exists\, c \in (\theta,\alpha)$ /

$$f'(c) = \frac{f(\alpha) - f(\theta)}{\alpha - \theta}.$$

$$\cos c = \frac{sen\ \alpha - sen\,\theta}{\alpha - \theta}$$

$$|\cos c| = \frac{|sen\ \alpha - sen\,\theta|}{|\alpha - \theta|}$$

$$|\cos c| = \frac{|sen\,\theta - sen\,\alpha|}{|\theta - \alpha|}$$

$$|sen\,\theta - sen\,\alpha| = |\cos c|\,|\theta - \alpha|$$

$$|\cos c| \le 1 \Rightarrow |sen\,\theta - sen\,\alpha| \le |\theta - \alpha|$$

para

$\theta, \alpha \in R$

$\theta < \alpha$

Analogamente, mostra-se para $\theta > c$. Se $\theta = \alpha$ é trivial.

b) $\operatorname{sen}\theta \leq \theta, \theta \geq 0.$

Seja $f(x) = sen\ x - x$. f é continua em $[0,\theta]$, $\theta > 0$.

f é derivável em $(0,\theta)$, $\theta > 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (0,\theta)$

$$f'(c) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\theta - 0}$$

$$f(\theta) - f(0) = (\theta - 0)\ f'(c)$$

$$sen\,\theta - \theta = \theta\,(\cos c - 1)$$

$$\cos c = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos c - 1 < 0$$

$$\theta\,(\cos c - 1) < 0$$

$$\Rightarrow sen\,\theta - \theta < 0 \ \Rightarrow sen\,\theta < \theta$$

$$0 < \cos c < 1 \Rightarrow \cos c - 1 < 0$$

$$\theta(\cos c - 1) < 0$$

$$\Rightarrow sen\,\theta - \theta < 0 \ \Rightarrow sen\,\theta < \theta$$

$$-1 < \cos c < 0 \Rightarrow \cos c - 1 < 0$$

$$\theta\,(\cos c - 1) < 0$$

$$\Rightarrow sen\,\theta - \theta < 0 \ \Rightarrow sen\,\theta < \theta$$

Para $\theta = 0$ temos $sen\,\theta = 0$. Portanto a desigualdade é satisfeita.

5. Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

a) $y = 3x + 4$

$$y' = 3$$

$$y' = 3 \neq 0$$

Portanto, não admite ponto crítico.

b) $y = x^2 - 3x + 8$

$y' = 2x - 3$

$2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3 \quad \therefore \quad x = \frac{3}{2}$

c) $y = 2 + 2x - x^2$

$y' = 2 - 2x$

$2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2x \quad \therefore \quad x = 1$

d) $y = (x - 2)(x + 4)$

$y' = 2x + 2$

$2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -2 \quad \therefore \quad x = -1$

e) $y = 3 - x^3$

$y' = -3x^2$

$-3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \therefore \quad x = 0$

f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

$y' = 3x^2 + 4x + 5$

$3x^2 + 4x + 5 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 60}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{6}$

$\Rightarrow \nexists$ no ponto crítico.

g) $y = x^4 + 4x^3$

$y' = 4x^3 + 12x^2$

$4x^3 + 12x^2 = 0$

$x^2\,(4x + 12) = 0$

$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$4x + 12 = 0$

$4x = -12$

$x = -\dfrac{12}{4} = -3$

Pontos críticos: $0, -3$.

h) $y = \text{sen } x$

$y' = \cos x$

$\cos x = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

i) $y = \cos x$

$y' = -sen\,x$

$-sen\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad sen\,x = 0$

$x = k\pi, \quad k \in Z$

j) $y = \text{sen } x - \cos x$

$y' = \cos x - (-sen\,x)$

$y' = \cos x + sen\,x$

$\cos x + sen\,x = 0$

$\cos x = -sen\,x$

$x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$

k) $y = e^x - x$

$y' = e^x - 1$

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$\ln e^x = \ln 1$

$\ln e^x = 0$

$x \ln e^x = 0$

$x = 0$

l) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$

$$y' = \frac{2}{3}(x^2 - 9)^{-1/3} . 2x$$

$$y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 9}}$$

$$\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 9}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Além disso, nos pontos $x_2 = 3$ e $x_3 - 3$ não existe a derivada.

Pontos críticos: $x_1 = 0, x_2 = 3$ e $x_3 - 3$

m) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

$$y' = \frac{(x^2 - 4) . - x . 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 4 = 0$$

$$-x^2 = 4$$

$$x^2 = -4$$

Não existem pontos críticos.

n) $y = |2x - 3|$

$$y=\begin{cases} 2x-3 & se \quad x\geq \dfrac{3}{2} \\ -2x+3 & se \quad x<\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$y'=\begin{cases} 2 & se \quad x>\dfrac{3}{2} \\ -2 & se \quad x<\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Para $x=\frac{3}{2}$ a derivada não existe $\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ é um ponto crítico.

o) $f(\mathrm{x})=\begin{cases} \mathrm{x}\ , \mathrm{x}<0 \\ \mathrm{x}^2, x\geq 0 \end{cases}$

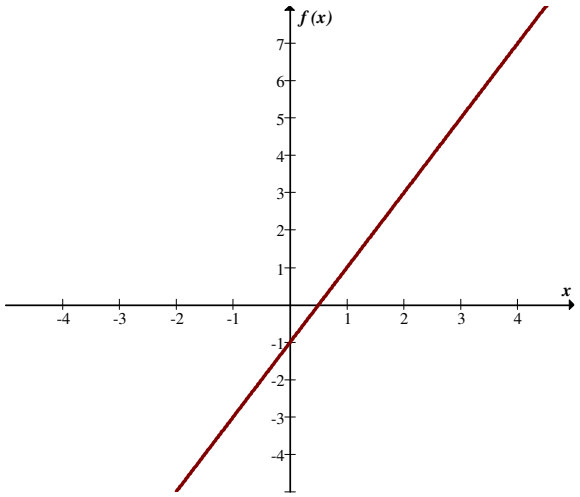
$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ 2x, & x<0 \end{cases}$$

$f'(x)$ não está definida para $x=0 \Rightarrow x=0$ é ponto crítico.

6. Determinar, algebricamente, os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes. Fazer um esboço do gráfico, comparando os resultados.

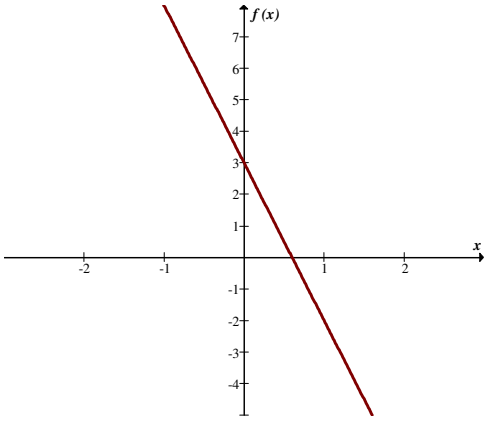
a) $f\ (\ x\ )\ =\ 2\mathrm{x}\ \ -\ 1$

$f'(\mathrm{x})=2>0$ para todo x . A função é crescente $(-\infty,+\infty)$



b) $f(x) = 3 - 5x$

$f'(x) = -5 < 0$, para todo x. A função é decrescente $(-\infty, +\infty)$.



c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

$f'(x) = 6x + 6$

$6x + 6 > 0$

$6x > -6$

$x > -\frac{6}{6}$

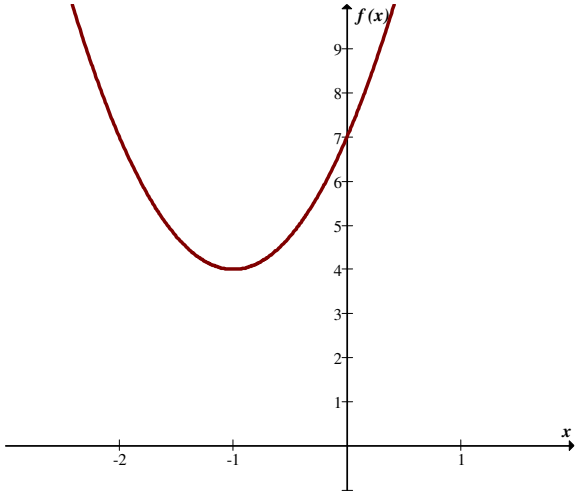
$x > -1$

$6x + 6 < 0$

$\Rightarrow x < -1$

Em $[-1, +\infty]$, $f(x)$ é crescente

Em $[-\infty, -1]$, $f(x)$ é decrescente.



d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

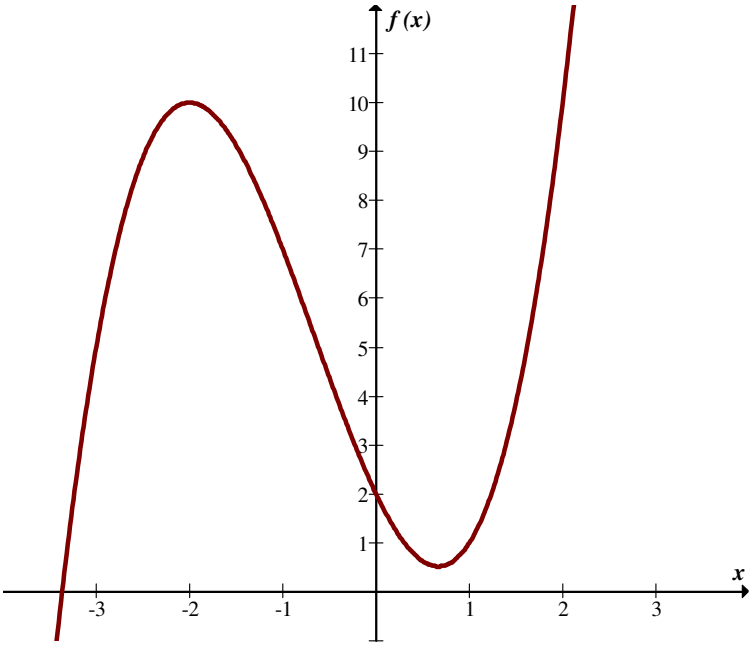
$3x^2 + 4x - 4 > 0$

$x_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = -2$

A função é crescente em $[-\infty,-2] \cup \left[\frac{2}{3},+\infty\right]$.

A função é decrescente em $\left[-2,\frac{2}{3}\right]$ é decrescente.



e) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

$f(x) = x^3 - 7x + 6$

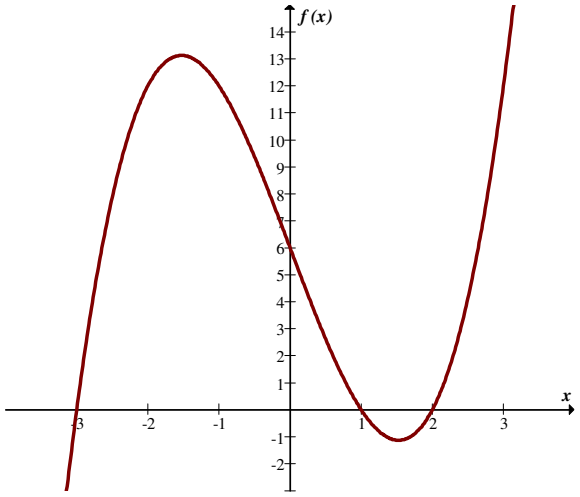
$f'(x) = 3x^2 - 7$

$3x^2 - 7 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

A função é crescente em $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \cup \left[\sqrt{\frac{7}{3}},+\infty\right)$.

A função é decrescente em $\left[-\sqrt{\frac{7}{3}},\sqrt{\frac{7}{3}}\right]$.



f) $f(x)=\frac{x}{2}+\text{sen } x$

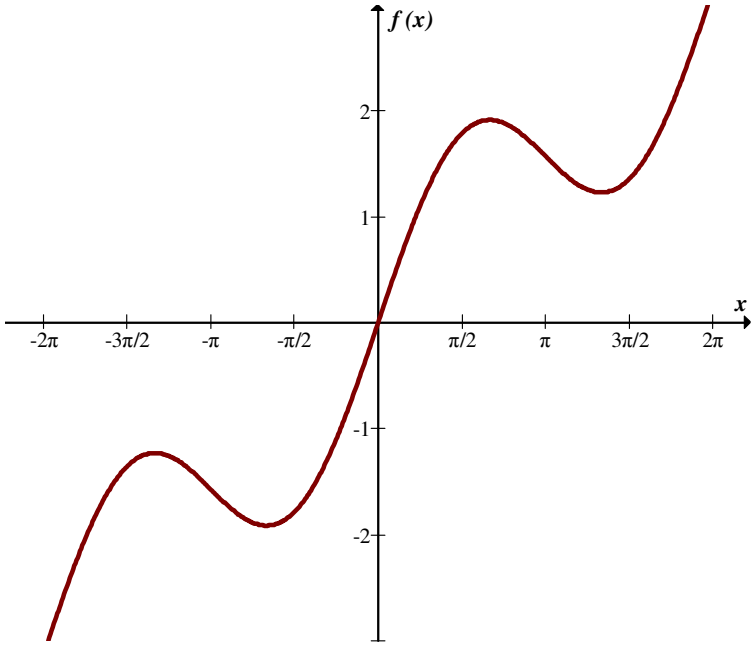
$f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

$\frac{1}{2}+\cos x>0$

$\cos x>-\frac{1}{2}$

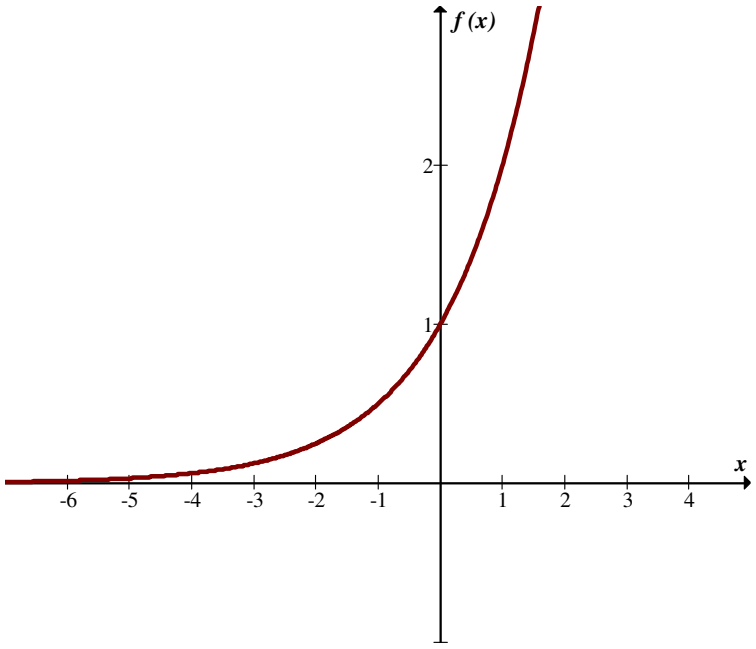
$\left\{\cdots\left[\frac{-4\pi}{3},\frac{-2\pi}{3}\right],\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right],\cdots\right\}=\left[\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\frac{4\pi}{3}+2n\pi\right]$, neste intervalo $\cos x<-\frac{1}{2}$
==> decrescente

$\left\{\cdots\left[\frac{-2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right],\left[\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right],\cdots\right\}=\left[-\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right]$, neste intervalo $\cos x>-\frac{1}{2}$ ==>
crescente



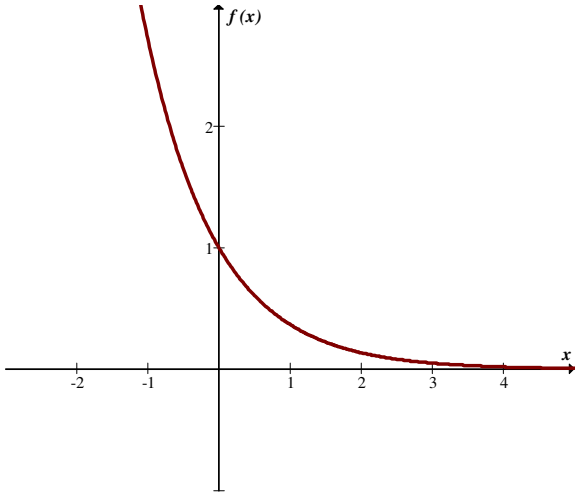
g) $f(x) = 2^x$

$f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$. A função é crescente em $(-\infty,+\infty)$.



h) $f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x} < 0$. A função é decrescente em $(-\infty,+\infty)$.

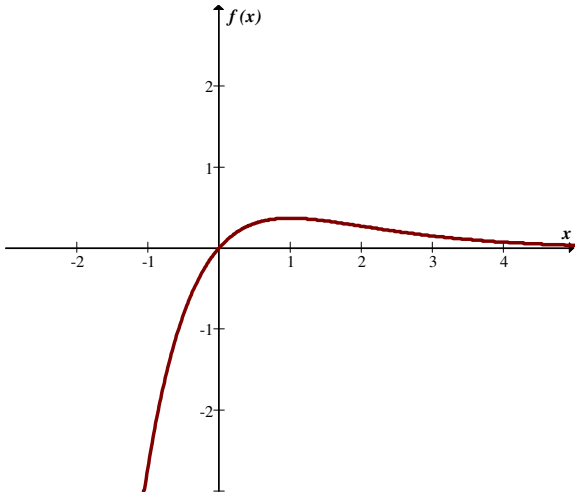


i) $f(x) = xe^{-x}$

$$f'(x) = x \,.\, e^{-x}(-1) + e^{-x}$$
$$= -xe^{-x} + e^{-x}$$
$$= \frac{-x}{e^{x}} + \frac{1}{e^{x}}$$
$$= \frac{1-x}{e^{x}}$$

$$\frac{1-x}{e^{x}} > 0$$
$$1-x > 0$$
$$-x > -1$$
$$x < 1$$

A função é crescente em $(-\infty,1]$ e em $[1,+\infty)$ é decrescente.

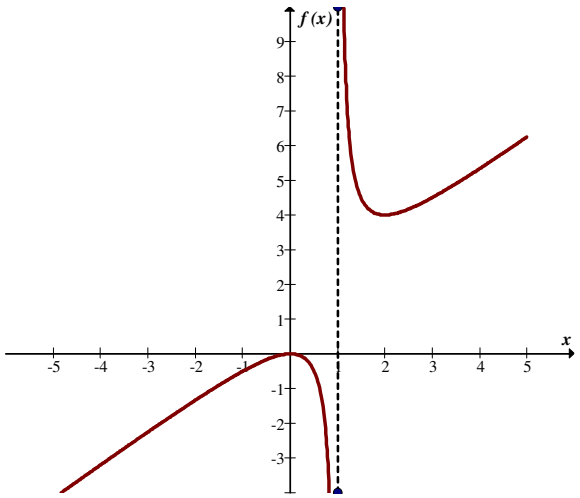


j) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1).2x - x^2.1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x > 0$$
$$x\,(x-2) > 0$$

A função é crescente em $(-\infty,0]$ e $[2,+\infty)$ e é decrescente em $[0,1] \cup [1,2]$.

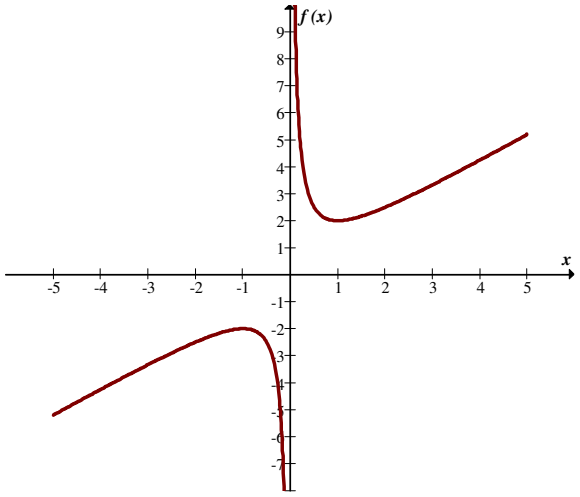


k) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)\,(x+1) > 0$$

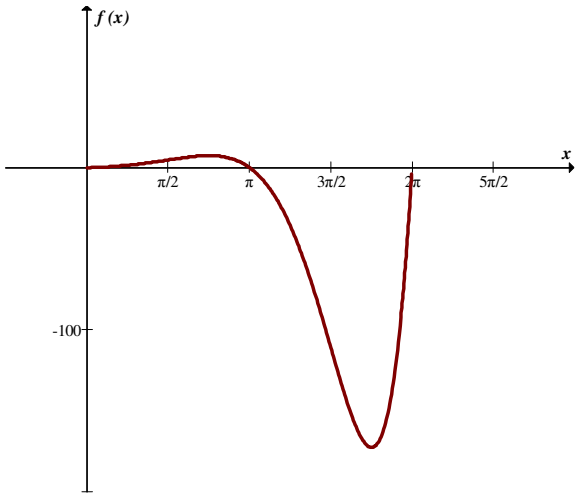
A função é decrescente em $[-1,0] \cup [0,1]$ e é crescente em $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.



l) $f(x) = e^x \text{ sen } x,\ x \in [0,2\pi]$

$$f'(x) = e^x \cos x + sen\ x\ e^x$$
$$= e^x (\cos x + sen\ x)$$

A função é crescente em $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.



7. Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

a) $f(x) = 1 - 3x, \quad [-2,2]$

$f'(x) = -3$

$-3 < 0\ \forall\ x$ ==> a função é decrescente em [-2,2].

$\Rightarrow f(-2) = 1 - 3\,(-2) = 7$ é máximo da função em $[-2,2]$ e $f(2) = 1 - 3.2 = 1 - 6 = -5$ é mínimo da função em $[-2,2]$.

b) $f(x) = x^2 - 4, \quad [-1,3]$

$f'(x) = 2x$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3 \\ f(0) = -4 \\ f(3) = 3^2 - 4 = 5 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} -4 \text{ é mínimo em } [-1,3] \\ 5 \text{ é máximo em } [-1,3] \end{array}$$

c) $f(x) = 4 - 3x + 3x^2, \quad [0,3]$

$f'(x) = -3 + 6x$

$-3 + 6x = 0$

$6x = 3$

$x = \dfrac{1}{2}$ é ponto crítico

$f(0) = 4$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 - 3\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 4 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4}$

$f(3) = 4 - 3\,.\,3 + 3\,.\,3^2 = 4 - 9 + 27 = 22$

==> 22 é máximo em $[0,3]$ e 13/4 é mínimo em $[0,3]$.

d) $f(x) = x^3 - x^2, [0,5]$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 62 = 0$

$x\,(3x - 2) = 3$

$x = 0$ e $x = \dfrac{2}{3}$ são pontos críticos

$f(0)=0$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}=\frac{8-12}{27}=\frac{-4}{27}$

$f(5)=5^3-5^2=125-25=100$

$\left.\begin{array}{l}\frac{-4}{27}\text{ é mínimo da função.}\\ 100\text{ é máximo da função}\end{array}\right\}\text{em }[0,5]$

e) $f(x)=\frac{x}{1+x^2},\quad [-2,2]$

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)\,1-x\,(2x)}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$1-x^2=0$

$x=1$ e $x=-1$ são pontos críticos

$f(-2)=\frac{-2}{1+4}=\frac{-2}{5}$

$f(-1)=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}$

$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$f(2)=\frac{2}{1+4}=\frac{2}{5}$

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\text{ é máximo da função.}\\ \frac{-1}{2}\text{ é mínimo da função}\end{array}\right\}\text{em }[-2,2]$

f) $f(x)=|x-2|,\ [1,4]$

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x\geq 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$$

$f'(2)$ não existe $\Rightarrow$ 2 é ponto crítico

$$f(1) = |1-2| = 1$$
$$f(2) = |2-2| = 0$$
$$f(4) = |4-2| = 2$$

2 é máximo e 0 é mínimo da função em $[1,4]$.

g) $f(x) = \cosh x, [-2,2]$

$f'(x) = sen\ h\, x$

$sen\ h\, x = 0$

$x = 0$ é ponto crítico

$$f(0) = \cosh 0 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$f(-2) = \cosh(-2) = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} = 3{,}76219$$

$$f(2) = \cosh(2) = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} = 3{,}76219$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 \text{ é mínimo} \\ \dfrac{e^2 + e^{-2}}{2} \text{ é máximo} \end{array}\right\} \text{em [-2,2]}$$

h) $f(x) = tgh\ x, [-2,2]$

$$f'(x) = \sec h^2 x = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$\dfrac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} > 0 \quad \forall\, x \quad \Rightarrow$ a função é sempre crescente.

$f(-2) = tgh\,(-2) = \dfrac{e^{-2} - e^{2}}{e^{-2} + e^{2}}$ é mínimo

$f(2) = \text{tgh}(2) = \dfrac{e^{2} - e^{-2}}{e^{2} + e^{-2}}$ é máximo

i) $f(x) = \cos 3x, \quad [0, 2\pi]$

$f'(x) = -3 sen\, 3x$

$-3\, sen\, 3x = 0$

$0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$ são pontos críticos

$\text{f}(0) = \text{f}(\dfrac{2\pi}{3}) = \text{f}(\dfrac{4\pi}{3}) = \text{f}(2\pi) = 1$ é mínimo

$\text{f}(\dfrac{\pi}{3}) = \text{f}(\dfrac{3\pi}{3}) = \text{f}(\dfrac{5\pi}{3}) = -1$ é máximo

j) $f(x) = \cos^2 x, \quad [0, 2\pi]$

$f'(x) = -2 \cos x\, sen\, x$

$-2 \cos x\, sen\, x = 0$

$\cos x = 0$ ou $sen\, x = 0$

$x = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ são pontos críticos

$f(0) = \cos^2 0 = 1$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{\pi}{2} = 0$

$f(\pi) = \cos^2 \pi = 1$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{3\pi}{2} = 0$

$f(2\pi) = 1$

1 é máximo e 0 é mínimo

k) $f(x) = sen^3 x - 1, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$f'(x) = 3\ sen^2\ x\ .\ \cos x$

$3\ sen^2\ x\ .\ \cos x = 0$

$sen\ x = 0$ ou $\cos x = 0$

$x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ são pontos críticos

$f(0) = sen^3\ 0 - 1 = 0 - 1 = -1$ é mínimo

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen^3\ \frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$ é máximo

8. Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções.

a) $f(x) = 2x + 5$

$f'(x) = 2$

$2 > 0 \Rightarrow$ a função é sempre crescente

$\nexists$ máximo e mínimo relativo

b) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$

$f'(x) = 6x + 6$

$6x + 6 > 0$

$6x > -6$

$x > \frac{-6}{6}$

$x > -1$

Em $[-1,+\infty]$ a função é crescente

Em $(-\infty,-1]$ é decrescente

$x = -1$ é ponto crítico (de mínimo)

$f(-1) = 3\ (-1)^2 + 6\ (-1) + 1$

$= 3 - 6 + 1$

$= -2$ é o mínimo da função

c) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$

$g'(x) = 12x^2 - 16x$

$12x^2 - 16x > 0$

$x(12x - 16) > 0$

A função é crescente em $(-\infty,0) \cup \left[\frac{4}{3},+\infty\right)$ e decrescente em $\left[0,\frac{4}{3}\right)$.

0 e $\frac{4}{3}$ são pontos críticos

$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad$ máximo

$f\left(\frac{4}{3}\right) = 4 \cdot \frac{64}{27} - 8 \cdot \frac{16}{9} \quad \rightarrow \quad$ mínimo

d) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5$

$h'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{1}{2}2x - 6$

$= x^2 + x - 6$

$= (x - 2)(x + 3)$

A função é decrescente em $[-3,2]$ e em $(-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$ é crescente.

-3 é ponto de máximo

2 é ponto de mínimo

$h(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 5$

$= \frac{1}{3}(-27) + \frac{9}{2} - 18 + 5$

$= \frac{-54 + 27 + 108 + 30}{6} = \frac{37}{2}$ é máximo

$$h(2) = \frac{1}{3}8 + \frac{1}{2}4 - 6.2 + 5$$
$$= \frac{8}{3} + 2 - 12 + 5$$
$$= \frac{-7}{3} \text{ é mínimo}$$

e) $f(t) = \frac{t-1}{t+1},\ t \neq -1$

$$f'(t) = \frac{(t+1)1 - (t-1)1}{(t+1)^2}$$
$$= \frac{t+1-t+1}{(t+1)^2}$$
$$= \frac{2}{(t+1)^2} > 0$$. A função é sempre crescente. ∄ máximo nem mínimo

f) $f(t) = t + \frac{1}{t},\ t \neq 0$

$$f'(t) = 1 + \frac{-1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$

$$\frac{t^2 - 1}{t^2} > 0$$
$$t^2 - 1 > 0$$
$$(t-1)(t+1) > 0$$

A função é decrescente em $[-1,0) \cup (0,1]$, e é crescente em $(-\infty,-1] \cup [1+\infty)$.

-1 é ponto de máximo

1 é ponto de mínimo.

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2 \text{ é máximo relativo}$$
$$f(1) = 1 + 1 = 2 \text{ é mínimo relativo}$$

g) $g(x) = xe^x$

$g'(x) = x\,e^x + e^x$

$x\,e^x + e^x = e^x(x+1) > 0$

$x+1 > 0$

$x > -1$

Em $[-1,+\infty)$ a função é crescente e em $(-\infty,-1]$ é decrescente

-1 é ponto de mínimo

$g(-1) = (-1)\,e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$ é mínimo.

h) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$h(x)$ é definida para $x > 0$.

$$h'(x) = \frac{-1\,\frac{1}{2}\,x^{-1/2}}{x}$$

$$= \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{-1}{2x\sqrt{x}} < 0, \forall x > 0$$

A função é decrescente em $(0,+\infty)$. ∄ máximo ou mínimo.

i) $f(x) = |\,2 - 6x\,|$

$$f(x) = \begin{cases} 2-6x & se \quad x \le \frac{1}{3} \\ 6x-2 & se \quad x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -6 & se \quad x < \frac{1}{3} \\ 6 & se \quad x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

A função é crescente em $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ e é decrescente em $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

$x=\frac{1}{3}$ é ponto crítico

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$ é mínimo da função.

j) $g(x)=\begin{cases} x+4, & x \le -2 \\ x^2-2, & x > -2 \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} 1, & x < -2 \\ 2x, & x > -2 \end{cases}$

$g'(0)=0$ e $g'(-2)$ não existe. Portanto, -2 e 0 são pontos críticos.

A função é crescente em $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ e decrescente em $[-2,0]$.

$f(-2)=2$ é máximo
$f(0)=-2$ é mínimo

k) $h(t)=\begin{cases} 3-4t, & t > 0 \\ 4t+3, & t \le 0 \end{cases}$

$h'(t)=\begin{cases} -4, & t > 0 \\ 4, & t < 0 \end{cases}$

$h'(0)$ não existe. Portanto, $t=0$ é ponto crítico.

Em $(-\infty,0]$ a função é crescente e em $[0,+\infty)$ é decrescente.

$t=0$ é ponto de máximo

$h(0)=3$ é máximo da função.

1) $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x < -1 \\ 1-x^2, & x \ge -1 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 1, & x < -1 \\ -2x, & x > -1 \end{cases}$

Pontos críticos: $x=-1$ e $x=0$.

A função é crescente em $(-\infty,0]$ e é decrescente em $[0,+\infty)$.

$x=0$ é ponto de máximo

$x=-1$ não é um extremo

$f(0)=1-0^2=1$ é máximo da função.

m) $g(x)=\begin{cases}10-(x-3)^2 & , \quad x\le -2\\ 5(x-1) & , \quad -2<x\le -1\\ -\sqrt{91+(x-2)^2} & , \quad x>-1\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}-2(x-3)=-2x+6, & x<-2\\ 5, & -2<x<-1\\ -\sqrt{91+(x-2)^2}, & x>-1\end{cases}$

$-2(x-3)>0$

$2(x-3)<0$

$x-3<0$

$x<3$

$\dfrac{x-2}{-\sqrt{91+(x-2)^2}}>0$

$x-2<0$

$x<2$

Em $(-\infty,+2]$ a função é crescente e em $[2,+\infty)$ é decrescente.

$x=2$ é ponto de máximo.

$g(2)=-\sqrt{91+(2-2)^2}=-\sqrt{91}$ é máximo.

9. Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem. Fazer um esboço do gráfico e comparar os resultados.

a) $f(x)=7x^2-6x+3$

$$f'(x) = 14x - 6$$

$$14x - 6 = 0$$

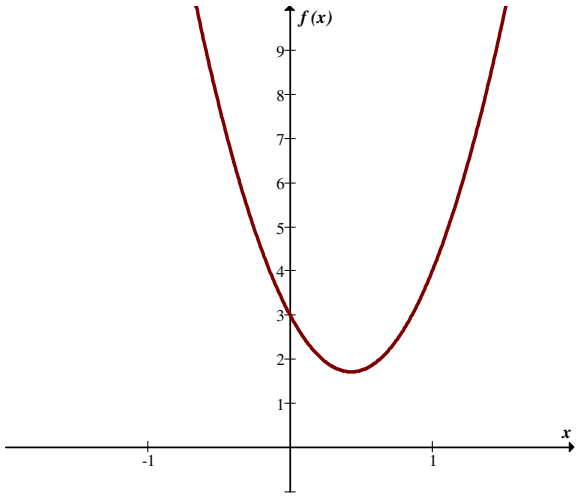
$$14x = 6$$

$$x = \frac{6}{14}$$

$x = \frac{3}{7}$ é ponto crítico

$$f''(x) = 14$$

$f''\left(\frac{3}{7}\right) = 14 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{7}$ é ponto de mínimo relativo



b) $g(x) = 4x - x^2$

$$g'(x) = 4 - 2x$$

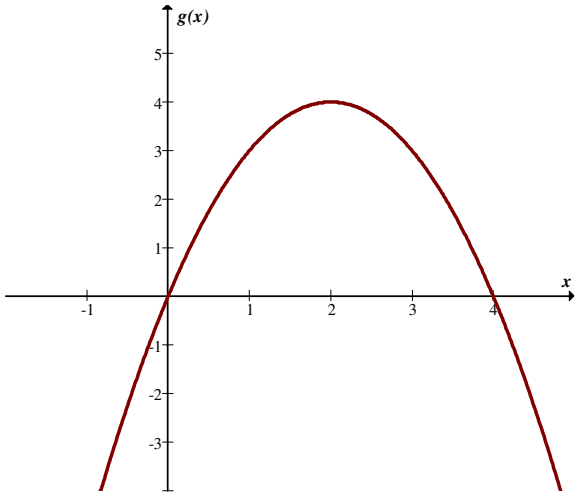
$$4 - 2x = 0$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$g''(x) = -2$$

$g''(2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ é ponto de máximo relativo.



c) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$

$h'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + 6x - 7$

$x^2 + 6x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2}$

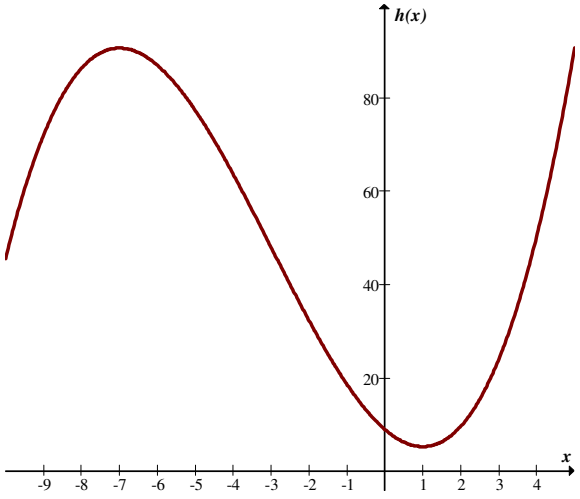
$x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$

$x_1 = 1$ e $x_2 = -7$ são pontos críticos

$h''(x) = 2x + 6$

$h''(1) = 2 + 6 = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad 1$ é ponto de mínimo

$h''(-7) = 2\,(-7) + 6 = -14 + 6 = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad -7$ é ponto de máximo.



d) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8$

$h'(x) = \frac{1}{4}4x^3 - \frac{5}{3}3x^2 + 8x - 4$

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

$x = 1$ e $x = 2$ são pontos críticos .

$h''(x) = 3x^2 - 10x + 8$

$h''(1) = 3 - 10 + 8 = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ é ponto de mínimo

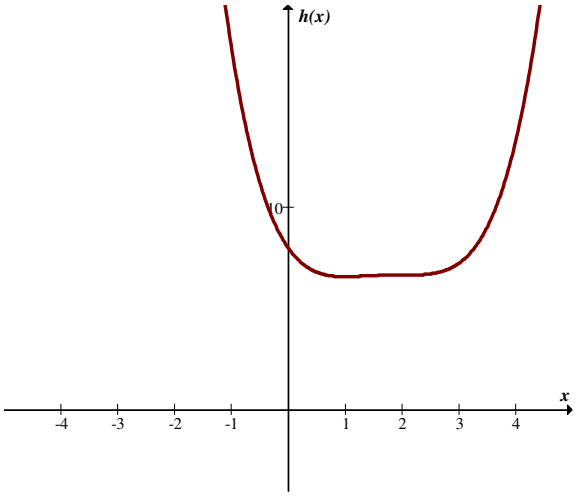
$$\begin{aligned} h''(2) &= 34 - 10x + 8 \\ &= 12 - 20 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nada se pode afirmar usando o teste da derivada segunda.

Analisando a derivada primeira

$h'(x) = (x-1)(x-2)^2$,

temos que $h'(x) \geq 0$ para $x > 1$. Portanto, h é crescente em $[1,+\infty)$ e $x = 2$ não é máximo nem mínimo relativo.

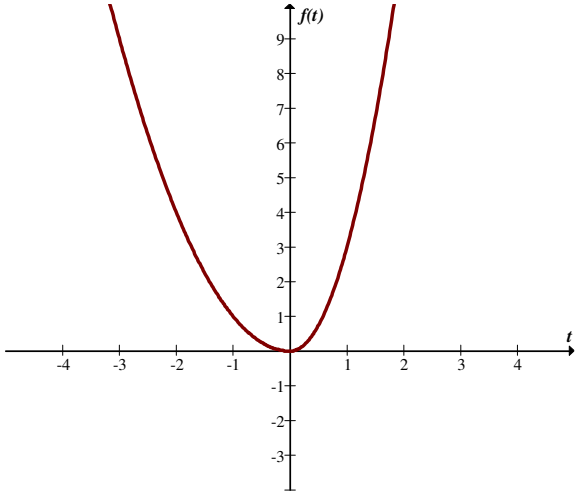


e) $f(t)=\begin{cases} t^2 \ , & t<0 \\ 3t^2, & t\geq 0 \end{cases}$

$f(t)=\begin{cases} 2t, & t<0 \\ 6t, & t>0 \end{cases}$

Em $(-\infty,0)$, $f'(t)<0$ e em $(0,+\infty)$, $f'(t)>0$.

Pelo teste da derivada primeira, $t=0$ é ponto de mínimo.



f) $f(x)=6x^{2/3}-2x$

$$f'(x)=6\frac{2}{3}x^{-1/3}-2$$
$$=4x^{-1/3}-2$$
$$=\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-2$$

$4x^{-1/3}-2=0$

$4x^{-1/3}=2$

$\left(x^{-1/3}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$x^{-1}=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{8}$ $\therefore$ $x=8$ é ponto crítico

$$f''(x) = 4\,\frac{-1}{3}\,x^{-4/3} = \frac{-4}{3}\,x^{-4/3}$$

$$f''(8) = \frac{-4}{3}.\,8^{-4/3}$$

$$= \frac{-4}{3}.\,\frac{1}{16} = \frac{-1}{12}$$

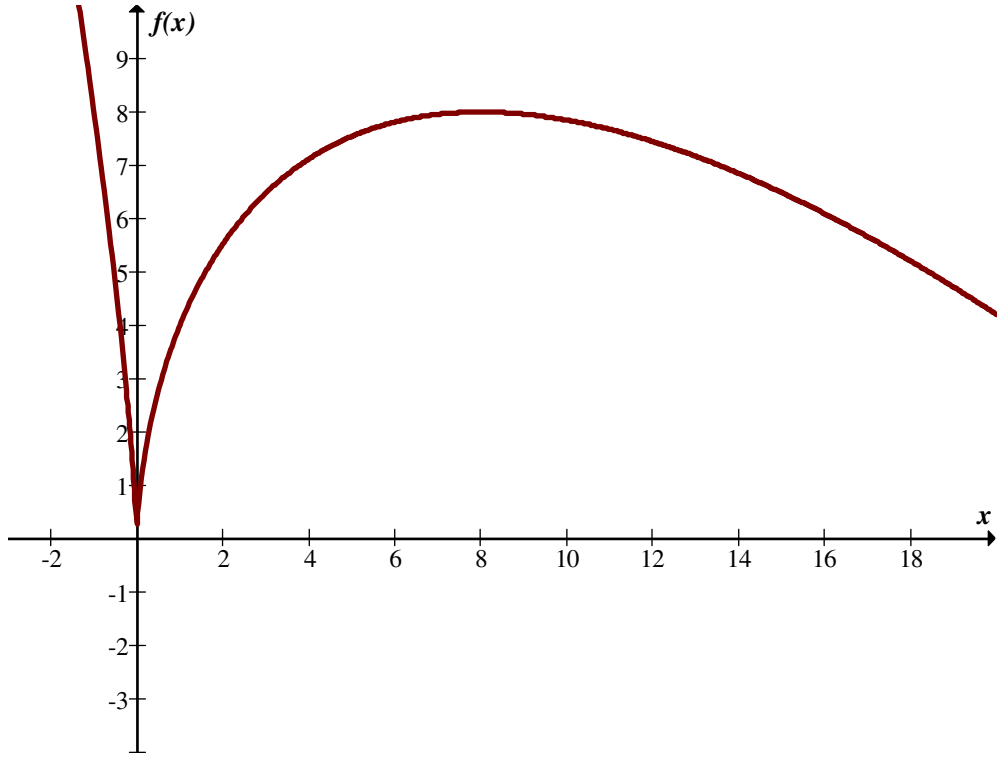
$\Rightarrow 8$ é ponto de máximo

$f'(0)$ não existe. Portanto, $x = 0$ também é ponto crítico.

Para $x < 0, f'(x) < 0.$

Para $0 < x < 8, f'(x) > 0.$

Portanto, usando o teste da derivada primeira, segue que $x = 0$ é um ponto de mínimo.



g) $f(x) = 5 + (x-2)^{7/5}$

$$f'(x) = \frac{7}{5}\,(x-2)^{2/5}$$

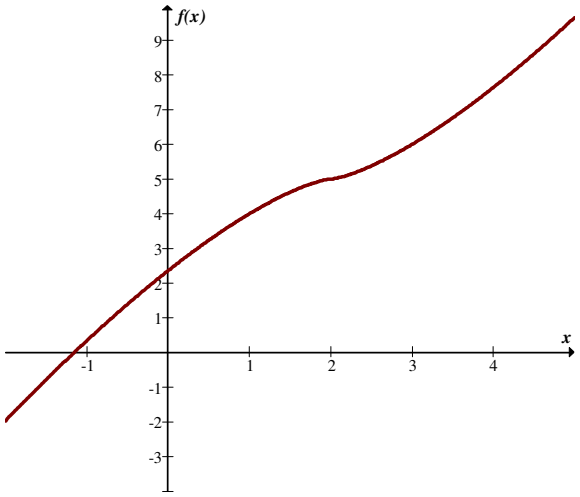
$$\frac{7}{5}(x-2)^{2/5} = 0$$

$$(x-2)^{2/5} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ é ponto crítico}$$

$f'(x)$ é sempre $> 0 \Rightarrow \nexists$ máximos nem mínimos.



h) $f(x) = 3 + (2x+3)^{4/3}$

$$f'(x) = \frac{4}{3}(2x+3)^{1/3} \cdot 2$$

$$= \frac{8}{3}(2x+3)^{1/3}$$

$$\frac{8}{3}(2x+3)^{1/3} = 0$$

$$(2x+3)^{1/3} = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ é ponto crítico}$$

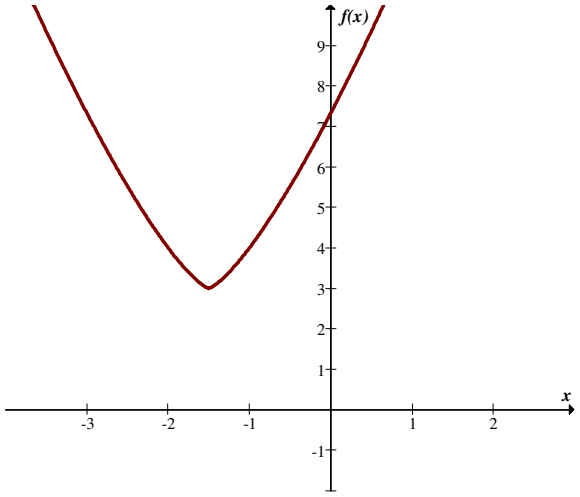
Vamos usar o teste da derivada primeira.

$$f'(x) = \frac{8}{3}(2x+3)^{1/3} > 0$$

$$(2x+3)^{1/3} > 0$$
$$\sqrt[3]{2x+3} > 0$$
$$2x+3 > 0$$
$$2x > -3$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

$f(x)$ é decrescente para em $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ e é crescente em $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$. Logo,

$x=-\frac{3}{2}$ é ponto de mínimo



i) $g(x)=\frac{4x}{x^2+4}$

$$g'(x)=\frac{(x^2+4)\,4-4x\,.\,2x}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}=0$$

$$-4x^2+16=0$$

$$4x^2=16$$

$$x^2=4$$

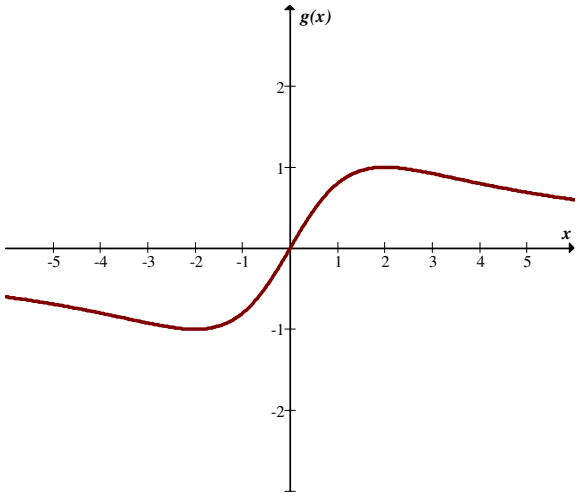
$x=\pm 2$ são pontos críticos

$$g''(x)=\frac{(x^2+4)^2(-8x)-(-4x^2+16)\,.\,2\,(x^2+4)\,.\,2x}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{8x^3-96x}{(x^2+4)^3}$$

$g''(2)=\dfrac{64-192}{512}=\dfrac{-128}{512}<0\Rightarrow 2$ é ponto de máximo

$g''(-2)=\dfrac{-64+192}{512}>0\Rightarrow -2$ é ponto de mínimo.



j) $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$

$$h'(x)=\frac{(x^2-2x+2)\,.\,1-(x+1)\,(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+2-2x^2+2x-2x+2}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{-x^2-2x+4}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$\frac{-x^2-2x+4}{(x^2-2x+2)^2}=0$$

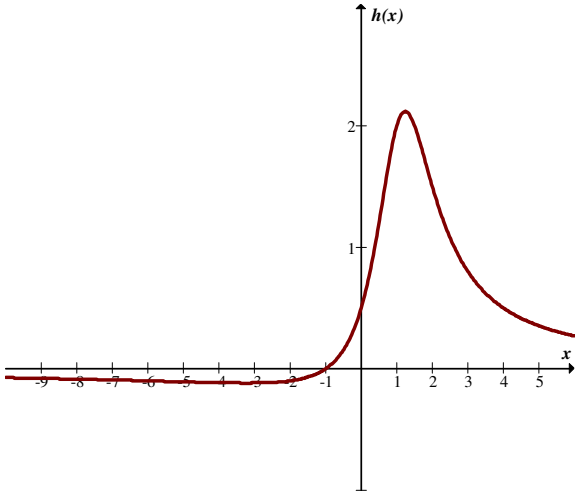
$$-x^2-2x+4=0$$

$$x^2+2x-4=0$$

$x_1=-1+\sqrt{5}$ e $x_2=-1-\sqrt{5}$ são pontos críticos

$$h'(x)>0 \Leftrightarrow -x^2-2x+4>0 \Leftrightarrow x\in\left(-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right).$$

$\Rightarrow -1+\sqrt{5}$ é ponto de máximo e $-1-\sqrt{5}$ é ponto de mínimo.



k) $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$

$$f(x)=(x+2)^2\ (x-1)^3$$

$$f'(x)=(x+2)^2\ 3\ (x-1)^2+(x-1)^3\ 2\ (x+2)$$

$$=3\ (x+2)^2\ (x-1)^2+2\ (x-1)^3\ (x+2)$$

$$3\ (x+2)^2\ (x-1)^2+2\ (x-1)^3\ (x+2)=0$$

$$(x-1)^2\ \left[3\ (x+2)^2+2\ (x-1)\ (x+2)\right]=0$$

$$(x-1)^2\ (5x^2+14x+8)=0$$

$$(x-1)^2\left(x+\frac{4}{5}\right)(x+2)=0$$

$x=1, x=-\frac{4}{5}, x=-2$ são pontos críticos

Vamos usar o teste da derivada primeira.

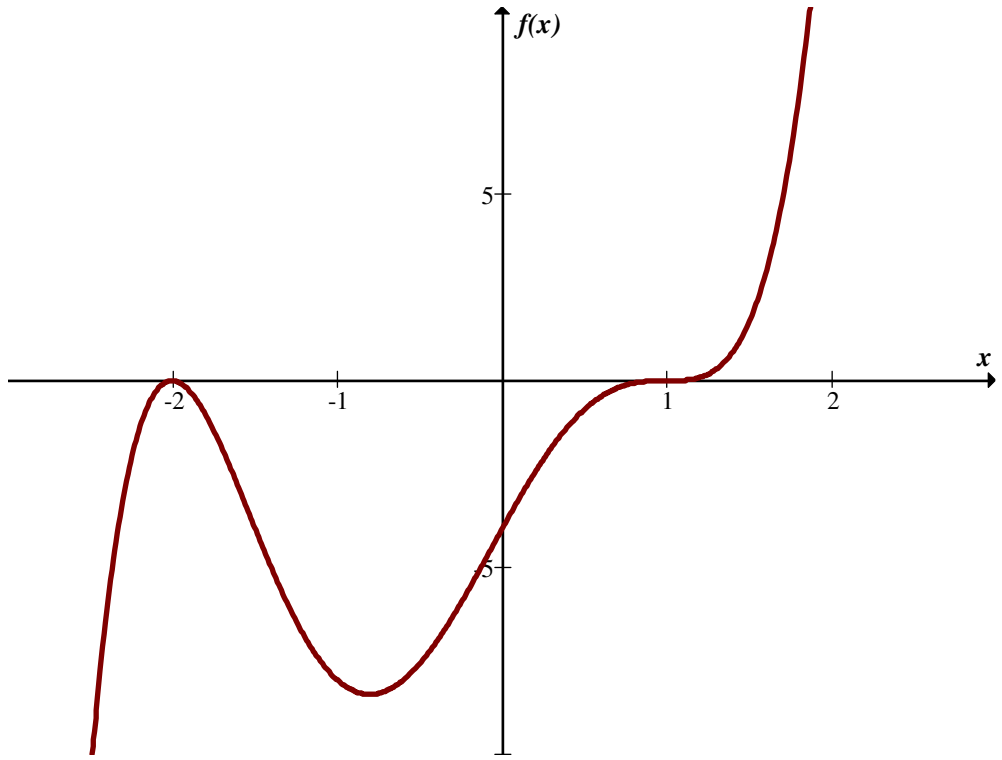
$f'(x) = (x-1)^2\ (5x^2+14x+8) > 0$

$(x-1)^2 \geq 0$

$(5x^2+14x+8) > 0$.

$x < -2$ ou $x > -\frac{4}{5}$

Portanto, $x = -2$ é ponto de máximo e $x = -\frac{4}{5}$ é ponto de mínimo. $x = 1$ não é ponto de máximo nem de mínimo.



l) $f(x) = x^2\sqrt{16-x}.$

$f'(x) = x^2\ \frac{1}{2}(16-x)^{-1/2}\ (-1) + \sqrt{16-x}.2x$

$$-\frac{x^2}{2\sqrt{16-x}}+2x\sqrt{16-x}=0$$

$$\frac{-x^2+2x\,.\,2\,(16-x)}{2\sqrt{16-x}}=0$$

$$-x^2+64x-4x^2=0$$

$$5x^2-64=0$$

$$x\,(5x-64)=0$$

$x_1=0, x_2=\frac{64}{5}$ são pontos críticos

$$f'(x)>0$$

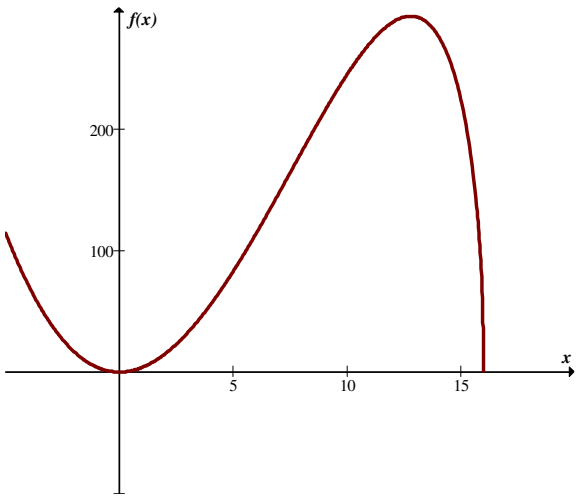
$$64x-5x^2>0$$

$$x\in\left(0,\frac{64}{5}\right)$$

Usando o teste da derivada primeira conclui-se que:

0 é ponto de mínimo

$\frac{64}{5}$ é ponto de máximo



10. Mostrar que $y=\frac{\log_a x}{x}$ tem seu valor máximo em $x=e$ (número neperiano) para todos os números a >1.

$$y=\frac{\log_a x}{x}$$

$$y' = \frac{x\,\frac{1}{x}\log_a e - \log_a x \,.\, 1}{x^2}$$

$$= \frac{\log_a e - \log_a x}{x^2}$$

$$= \frac{\log_a \frac{e}{x}}{x^2}$$

$$\frac{\log_a \frac{e}{x}}{x^2} = 0$$

$$\log_a \frac{e}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^0 = \frac{e}{x}$$

$$1 = \frac{e}{x} \quad \therefore \quad x = e$$

$$y'' = \frac{x^2 \,\frac{\frac{-e}{x^2}}{\frac{e}{x}} \,.\, \log_a e - \log_a \frac{e}{x} \,.\, 2x}{x^4}$$

$$y'' = \frac{-\log_a e - 2\log_a \frac{e}{x}}{x^3}$$

$$y''\big|_{x=e} = \frac{-\log_a e - 2\log_a 1}{e^3} = \frac{-\log_a e}{e^3} < 0 \text{ para a} > 1$$

$\Rightarrow x = e$ é ponto de máximo.

11. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + a.x^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto (-2,1).

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$3x^2 + 2ax = 0$

$x\,(3x + 2a) = 0$

$x_1 = 0$

$3x + 2a = 0$

$3x = -2a$

$x_2 = \dfrac{-2a}{3}$

Para quaisquer valor de a e b $x = 0$ é um ponto crítico.

$x = \dfrac{-2a}{3}$ é ponto crítico.

$f''(x) = 6x + 2a$

$6x + 2a = 0$

$6x = -2a \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-2a}{6} = \dfrac{-a}{3}$

$f''\left(\dfrac{-2a}{3}\right) = 6\left(\dfrac{-2a}{3}\right) + 2a = -2a \neq 0$ para a $\neq 0$.

Como o extremo deve estar no ponto (-2,1), segue que $\dfrac{-2a}{3} = -2 \Rightarrow a = 3$.

$1 = f(-2) = -8 + 12 + b \Rightarrow b = -3$.

12. Encontrar, a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é de máximo, qual é de mínimo?

$f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$

$f'(x) = 6ax^2 + 2bx - c$

$6ax^2 + 2bx - c = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

Substituindo $x = 0$, vem

$-c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

Substituindo $x = 1$, vem

$$6a + 2b - c = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a + 2b = 0$$
$$3a + b = 0$$
$$3a = -b$$
$$a = \frac{-b}{3}$$

$f''(x) = 12ax + 2b$
$f''(0) = 2b$
$f''(1) = 12a + 2b$

Ainda podemos ter:

$$\begin{cases} d = \text{qualquer real} \\ \text{c} = 0 \\ \text{a} = \text{qualquer real} \\ \text{b} = \text{-3a} \end{cases}$$

Então se $a > 0$: $f''(0) = 2b = 2(-3a) = -6a$
$f''(1) = 12a + 2(-3a)$
$= 12a - 6a = 6a$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad 0$ é ponto de máximo e1 é ponto de mínimo.

13. Demonstrar que a função $y = ax^2 + bx + c$, $x \in R$, tem máximo se, e somente se, $a < 0$; e mínimo se, e somente se, $a > 0$.

$y = ax^2 + bx + c$
$y' = 2ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad 2ax = -b$
$$x = \frac{-b}{2a}$$

$y'' = 2a$

$$y''\Big|_{\frac{-b}{2a}} = 2a \begin{cases} 2a > 0 \Leftrightarrow a > 0 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} \text{ é ponto de mínimo} \\ 2\text{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} \text{ é ponto de máximo} \end{cases}$$

14. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes têm concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$

$f'(x) = -3x^2 + 10x - 6$

$f''(x) = -6x + 10$

$-6x + 10 > 0$

$-6x > -10$

$6x < 10$

$x < \frac{10}{6}$

$x < \frac{5}{3}$

Em $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ a função é côncava para cima

Em $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ a função é côncava para baixo

Em $x = \frac{5}{3}$ temos um ponto de inflexão. $\left(\frac{5}{3}, f\left(\frac{5}{3}\right)\right)$ é um ponto de inflexão.

b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$

$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 10$

$f''(x) = 36x^2 - 60x - 24$

$36x^2 - 60x - 24 > 0$

$3x^2 - 5x - 2 > 0$

$(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0$

$x < -1/3$ ou $x > 2$

$\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ côncava para baixo

$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ côncava para cima

Em $x_1 = -\frac{1}{3}$ $x_2 = 2$ temos pontos de inflexão.

Os pontos $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ e $(2, f(2))$ são pontos de inflexão.

c) $f(x) = \frac{1}{x + 4}$

$$f'(x) = \frac{(x+4)\,0 - 1.1}{(x+4)^2} = \frac{-1}{(x+4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\,(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{2}{(x+4)^3}$$

$$f''(x) > 0$$

$$\frac{2}{(x+4)^3} > 0$$

$$(x+4)^3 > 0$$

$$x + 4 > 0$$

$$x > -4$$

A função é côncava para cima em $(-4,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty,-4)$. Como o ponto $-4 \notin D(f)$, a função não tem pontos de inflexão.

d) $f(x) = 2xe^{-3x}$

$$f'(x) = 2x.e^{-3x}.(-3) + e^{-3x}.2$$

$$= -6x\,e^{-3x} + 2e^{-3x}$$

$$f''(x) = -6x\,e^{-3x}.(-3) + e^{-3x}.(-6) + 2e^{-3x}.(-3)$$

$$= 18x\,e^{-3x} - 6e^{-3x} - 6e^{-3x}$$

$$= 18x\,e^{-3x} - 12e^{-3x}$$

$$18x\,e^{-3x} - 12e^{-3x} > 0$$

$$e^{-3x}\,(18x - 12) > 0$$

$$18x - 12 > 0$$

$$18x > 12$$

$$x > \frac{12}{18} \quad \therefore \quad x > \frac{2}{3}$$

Temos que:

Em $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ f é côncava para cima

Em $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ f é côncava para baixo

Em $x = \frac{2}{3}$ temos um ponto de inflexão e $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ é o ponto de inflexão.

e) $f(x) = x^2 e^x$

$$f'(x) = x^2.e^x + e^x.2x$$
$$f''(x) = x^2.e^x + e^x.2x + e^x.2 + 2xe^x$$
$$= x^2.e^x + 4x.e^x + 2e^x$$
$$= e^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$$

$$e^x\left(x^2 + 4x + 2\right) > 0$$
$$x^2 + 4x + 2 > 0$$

Em $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$ f é côncava para baixo.
Em $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$ f é côncava para cima.
Em $x = -2 \pm \sqrt{2}$ temos pontos de inflexão.

f) $f(x) = 4\sqrt{x+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1$

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,2x$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{2}\,x$$
$$f''(x) = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)\,(x+1)^{-3/2} - \sqrt{2}$$
$$= \frac{-1-\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$f''(x) < 0$$

$$-1-\sqrt{2}.\sqrt{(x+1)^3} < 0$$
$$-1 < \sqrt{2}.\sqrt{(x+1)^3}$$, o que ocorre para todo $x \in D(f)$

Assim, a derivada de segunda ordem da função é sempre menor que zero. Não existe ponto de inflexão e a função é côncava para baixo em todo o seu domínio.

g) $f(t) = \frac{t^2+9}{(t-3)^2}$

$$f'(t) = \frac{(t-3)^2.2t - (t^2+9).2\,(t-3)}{(t-3)^4}$$

$$= \frac{(t-3)\left[(t-3).2t - 2\,(t^2+9)\right]}{(t-3)^4}$$

$$= \frac{2t^2 - 6t - 2t^2 - 18}{(t-3)^3}$$

$$= \frac{-6t-18}{(t-3)^3}$$

$$f''(t) = \frac{(t-3)^3(-6) - (-6t-18).3\,(t-3)^2}{(t-3)^6}$$

$$= \frac{12t+72}{(t-3)^4}$$

$$f''(t) > 0$$

$$\frac{12t+72}{(t-3)^4} > 0$$

$$12t + 72 > 0$$

$$12t > -72$$

$$t > -6$$

Em $t = -6$ temos um ponto de inflexão.

A função em:

$(-6,+\infty)$ é côncava para cima;
$(-\infty,-6)$ é côncava para baixo.

h) $f(t) = e^{-t}\cos t, \quad t \in [0,2\pi]$

$$f'(t) = e^{-t}(-sen\,t) - \cos t\; e^{-t} = e^{-t}(-sen\,t - \cos t)$$

$$f''(t) = e^{-t}(-\cos t + sent) - e^{-t}(-sen\,t - \cos t)$$

$$= 2e^{-t}sen\,t$$

$$f''(t) > 0$$

$sen\,t > 0 \;\Rightarrow\; t \in (0,\pi) \;\Rightarrow f$ é côncava para cima em $[0,\pi]$
$sen\,t < 0 \;\Rightarrow\; t \in (\pi,2\pi) \;\Rightarrow f$ é côncava para baixo em $[\pi,2\pi]$
$(\pi,-e^{-\pi})$ é ponto de inflexão .

i) $f(x)=\begin{cases}2x-x^2, & x<1\\ x \quad\quad , & x\geq 1\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}2-2x, & x<1\\ 1 \quad\quad , & x>1\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases}-2, & x<1\\ 0 \quad , & x>1\end{cases}$

$f''(x)>0$ não temos valores.

$f''(x)<0$ para $x\in(-\infty,1)$; f é côncava para baixo neste intervalo

$\nexists$ pontos de inflexão.

j) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x\leq 2\\ 4-x^2, & x>2\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}2x, & x<2\\ -2x, & x>2\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases}2, & x<2\\ -2, & x>2\end{cases}$

$f''(x)>0$ para $x\in(-\infty,2) \Rightarrow f$ é côncava para cima neste intervalo

$f''(x)<0$ para $x\in(2,+\infty) \Rightarrow f$ é côncava para baixo neste intervalo

$(2,0)$ é um ponto de inflexão.

15. Seguindo as etapas apresentadas em 5.9.1. fazer um esboço do gráfico das seguintes funções:

(a) $y=x^2+4x+2$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

O domínio da função dada é o conjunto dos números reais.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$x_1 \cong -0{,}5 \qquad x_2 \cong -3{,}4$

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$y' = 2x + 4$

$2x + 4 = 0$

$2x = -4$

$$x = -\frac{4}{2}$$

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = (-2)^2 4.(-2) + 2$

$= 4 - 8 + 2 = -2$

Em $x=2$ temos um ponto crítico.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

A função é crescente para $x \geq 2$ e decrescente para $x \leq 2$.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Como $y'' = 2 > 0$, temos um ponto de mínimo relativo em $x = 2$.

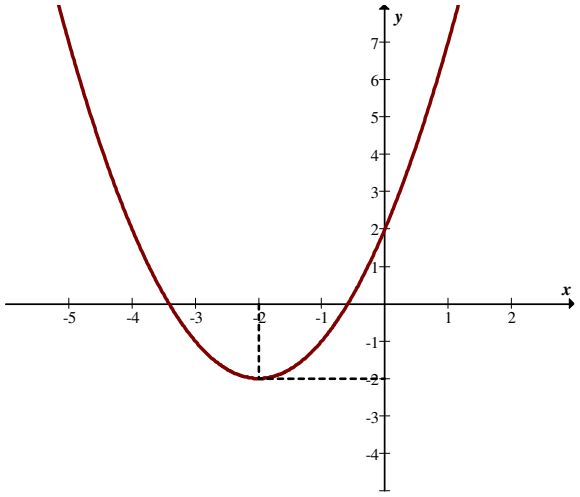
Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

A função tem a concavidade para cima.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não há assíntotas

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(b) $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{5}{6}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

O domínio da função é o conjunto dos números reais.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Quando $x = 0$ temos que $y = \frac{5}{6}$.

Quando $y = 0$ temos $\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{5}{6} = 0$. Resolvendo esta equação obtemos 5/2 e 1.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y' = \frac{-3x^2}{3} + \frac{3.2x}{2} - 2$$
$$= -x^2 + 3x - 2$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$$

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$-x^2 + 3x - 2 > 0$$

é crescente em $[1,2]$

é decrescente em $(-\infty,1] \cup [2,+\infty)$

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

$y'' = -2x + 3$

Para $x = 2$ temos que $y'' = -1$, o que nos dá um ponto de máximo em $x = 2$.

Para $x = 1$ temos que $y'' = 1$, o que nos dá um ponto de mínimo em $x = 1$.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$-2x + 3 > 0$
$-2x > -3$
$x < 3/2$

A função é côncava para cima em $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$..

$-2x + 3 < 0$
$-2x < -3$
$x > 3/2$

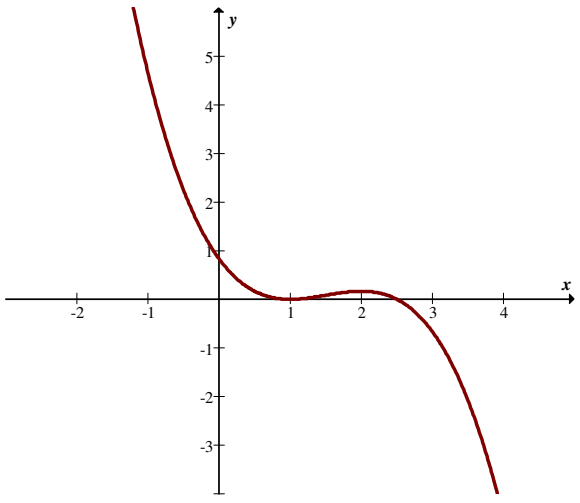
A função é côncava para baixo em $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Em $x = \frac{3}{2}$ temos um ponto de inflexão

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não temos assíntotas.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(c) $y = \frac{-1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

O domínio desta função é o conjunto dos números reais.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Fazendo $x = 0$ obtemos $y = 0$. Fazendo $y = 0$ vamos ter a equação $\frac{-1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 = 0$ que ao ser resolvida obtém-se os valores: 0 e $\frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{3}$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$y' = -x^3 + 5x^2 - 4x$

$-x^3 + 5x^2 - 4x = 0$

$x^3 - 5x^2 + 4x = 0$

$x(x^2 - 5x + 4) = 0$

Assim,

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

$x_3 = 1$

são os pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

Temos:

Crescimento: $(-\infty,0) \cup (1,4)$.

Decrescimento: $(0,1) \cup (4,+\infty)$.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

$y'' = -3x^2 + 10x - 4$

$y''|_0 = -4$. Assim, em $x = 0$ temos um ponto de máximo.

$y''|_4 = -48 + 40 - 4 = -12$. Assim, em $x = 4$ temos um ponto de máximo.

$y''\big|_1 = -3+10-4=3$. Assim, em $x=1$ temos um ponto de mínimo.

$f(0)=0$

$f(4)=-64+106{,}6-32=10{,}6$

$f(1)=-\frac{1}{4}+\frac{5}{3}-2=\frac{-3+20-24}{12}=\frac{-7}{12}=-0{,}58$

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$y''=-3x^2+10x-4$

$x_1=\frac{10+\sqrt{52}}{6}=2{,}8$

$x_2=\frac{10-\sqrt{52}}{6}=0{,}46$

$-3x^2+10x-4>0 \quad \Rightarrow \quad (0.46,\ 2.8)$ concavidade para cima.

$-3x^2+10x-4<0 \quad \Rightarrow \quad (-\infty,\ 0.46)\cup(2.8,\ +\infty)$ concavidade para baixo.

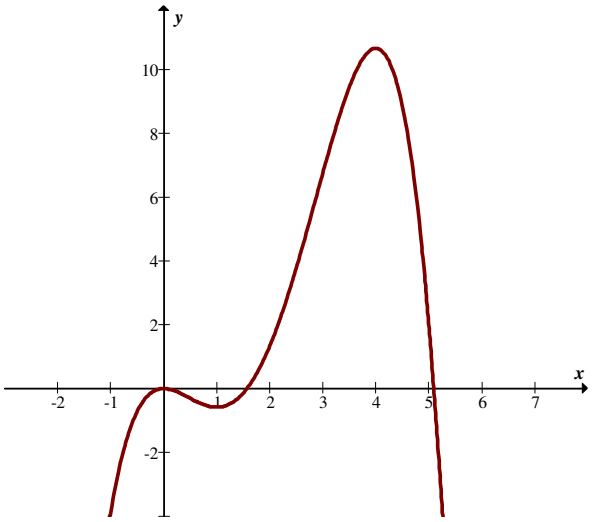
$f(0{,}4)=-\frac{0{,}0256}{4}+0{,}10-0{,}32=-0{,}22$

$f(2{,}8)=-15{,}3+36{,}5-15{,}6=5{,}6$

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não tem assíntotas.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(d) $y = x + \frac{2}{x} \quad = \frac{x^2 + 2}{x}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f) = IR - \{0\}$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Não corta os eixos.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y' = 1 + \frac{-2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 2}{x^2} = 0 \qquad \therefore \qquad x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

Em $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$ a função é crescente.
Em $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ a função é decrescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

$$y'' = \frac{4}{x^3}$$

Temos em $x = \sqrt{2}$ um ponto de mínimo e em $x = -\sqrt{2}$ um ponto de máximo

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2} = -2{,}8$$

$$f\left(+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = +2\sqrt{2} = 2{,}8$$

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

Côncava para cima em $(0, +\infty)$;

Côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.

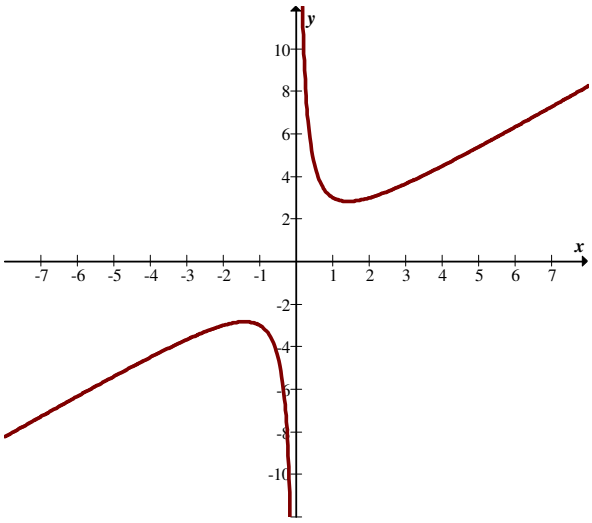
Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x}=\infty$$

Temos que $x=0$ é uma assíntota vertical.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(e) $y=\dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f)=IR-\{-2,3\}$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Fazendo $y = 0$ temos que $x=-\dfrac{1}{3}$. Fazendo $x=0$ temos $y=-\dfrac{1}{6}$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y'=-\frac{3x^2+2x+17}{(x+2)^2(x-3)^2}$$

$3x^2+2x+17=0$, tem somente raízes complexas. Assim não temos pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os pontos de crescimento e decrescimento.

A função é sempre decrescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não se têm máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 51x - 11)}{(x+2)^3 (x-3)^3}$$

Analisando o sinal dessa derivada vamos obter:

Concavidade para cima: $(-2;0{,}21) \cup (3,+\infty)$.

Concavidade para baixo: $(-0{,}21;3) \cup (-\infty,-2)$.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = 0$$

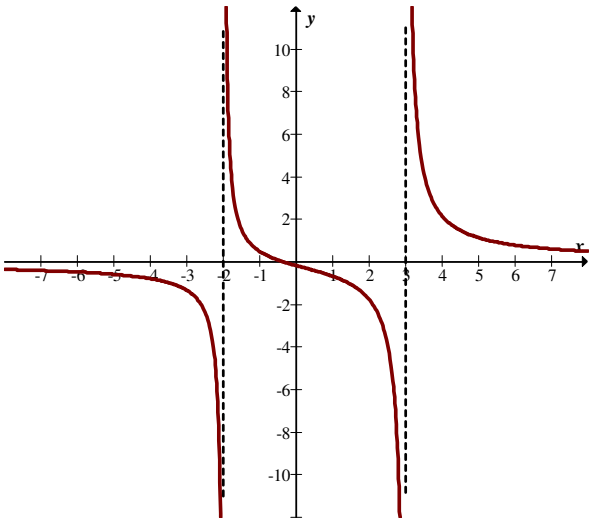
$$\lim_{x\to-2} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = \infty$$

$$\lim_{x\to3} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = \infty$$

Temos duas assíntotas verticais $x = -2$ e $x = 3$.

Temos uma assíntota horizontal em $y = 0$.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(f) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f) = (-2,+\infty)$

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Não corta o eixo dos *x*. Corta o eixo dos y em $y = 2\sqrt{2}$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$y' = \dfrac{-2}{(x+2)^{3/2}}$. Não temos pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

É sempre decrescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não têm máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$$y'' = \frac{3}{(x+2)^{5/2}} > 0$$

Não tem pontos de inflexão. A concavidade é voltada para cima.

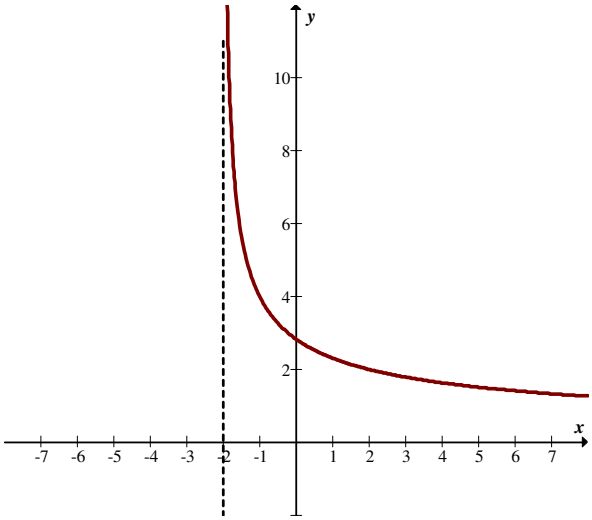
Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x \to -2} \frac{4}{\sqrt{x+2}} = \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x+2}} = 0$$

Temos que $x = -2$ é uma assíntota vertical e $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(g) $y = x^{3/2}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f) = [0,+\infty)$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Encontra os eixos em $(0,0)$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\frac{3}{2}x^{1/2} = 0$$
$$x^{1/2} = 0$$
$$\sqrt{x} = 0$$
$$x = 0$$

Em $x = 0$ temos um ponto crítico.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$\frac{3}{2}x^{1/2} > 0$$
$$x^{1/2} > 0$$
$$\sqrt{x} > 0$$
$$x > 0$$

A função é sempre crescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não têm máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

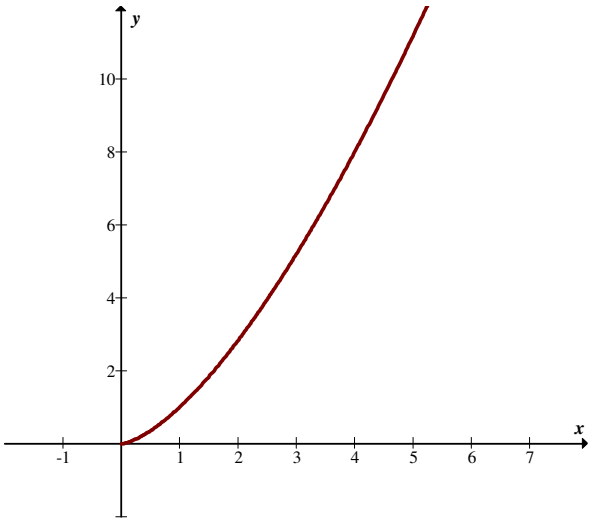
$$y'' = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

A função é côncava para cima.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não tem assíntotas.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(h) $y = \ln(2x+3)$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f) = (-3/2, +\infty)$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Quando $x = 0$ temos que $y = \ln 3$. Para $y = 0$ temos $x = -1$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y' = \frac{2}{2x+3}$$

$\frac{2}{2x+3} = 0$. Não temos pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$\frac{2}{2x+3} > 0$$
$$2x+3 > 0$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

A função é sempre crescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não tem máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$$y'' = \frac{-2.2}{(2x+3)^2} = \frac{-4}{(2x+3)^2} < 0$$

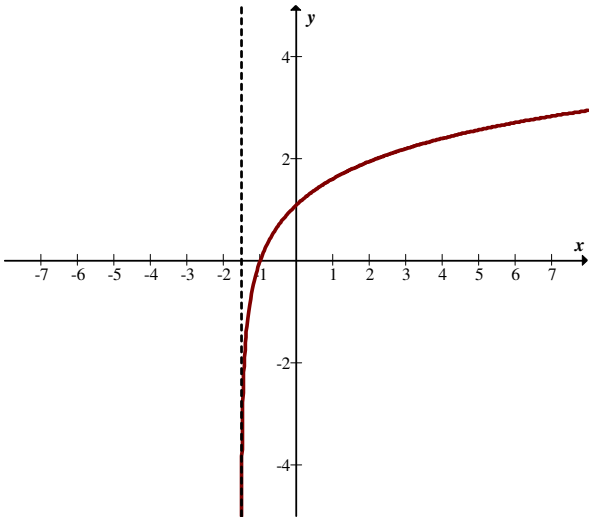
A função é côncava para baixo.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x \to -3/2} \ln(2x+3) = -\infty$$

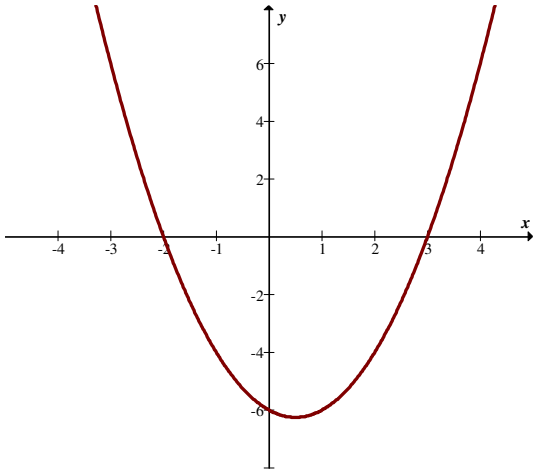
Assim em $x = -3/2$ temos uma assíntota vertical.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



16. Usando uma ferramenta gráfica, construir o gráfico das funções seguintes, analisando suas propriedades e características como apresentado em 5.9.3

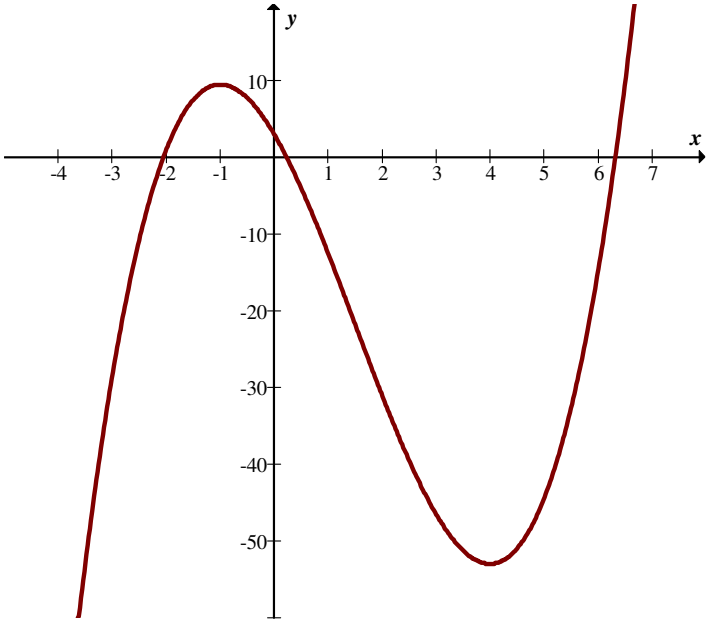
(a) $y = (x-3)(x+2)$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	Conjunto dos reais
3	Conjunto Imagem	$[-6{,}2;+\infty)$
4	Raízes reais	3 e -2
5	Pontos críticos e extremos	Vértice como ponto de mínimo: (1/2; -6,2)
6	Intervalos de crescimento	$(1/2,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,1/2)$
7	Concavidade	côncava para cima
	Pontos de inflexão	Não tem

8	Assíntotas verticais	Não tem
	Assíntotas horizontais	Não tem

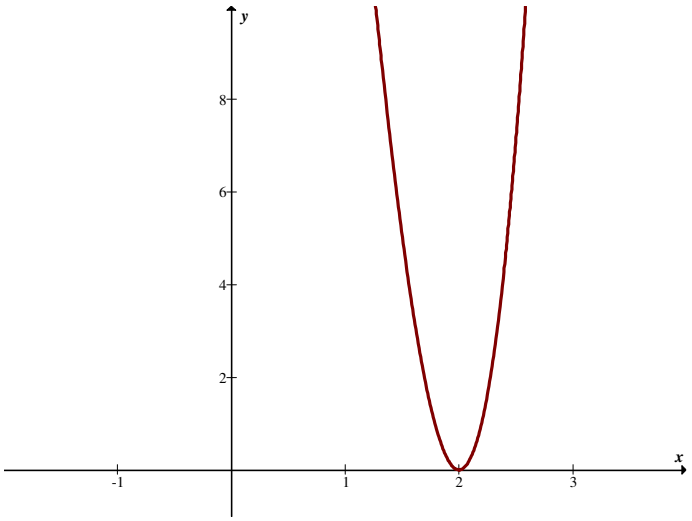
(b) $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 3$



Etapa	**Procedimento**	**Resultado da análise visual**
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	Conjunto dos reais
3	Conjunto Imagem	Conjunto dos reais
4	Raízes reais	aproximadamente em 0,2; 6,3 e -2,1.
5	Pontos críticos e extremos	Ponto de máximo em $x = -1$. Ponto de mínimo em $x = 4$.

6	Intervalos de crescimento	$(-\infty,-1) \quad e \quad (4,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-1,4)$
7	Concavidade	côncava para cima em $(1{,}5;+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty;1{,}5)$.
	Ponto de inflexão	Em $x = 1{,}5$
8	Assíntotas verticais	Não tem
	Assíntotas horizontais	Não tem

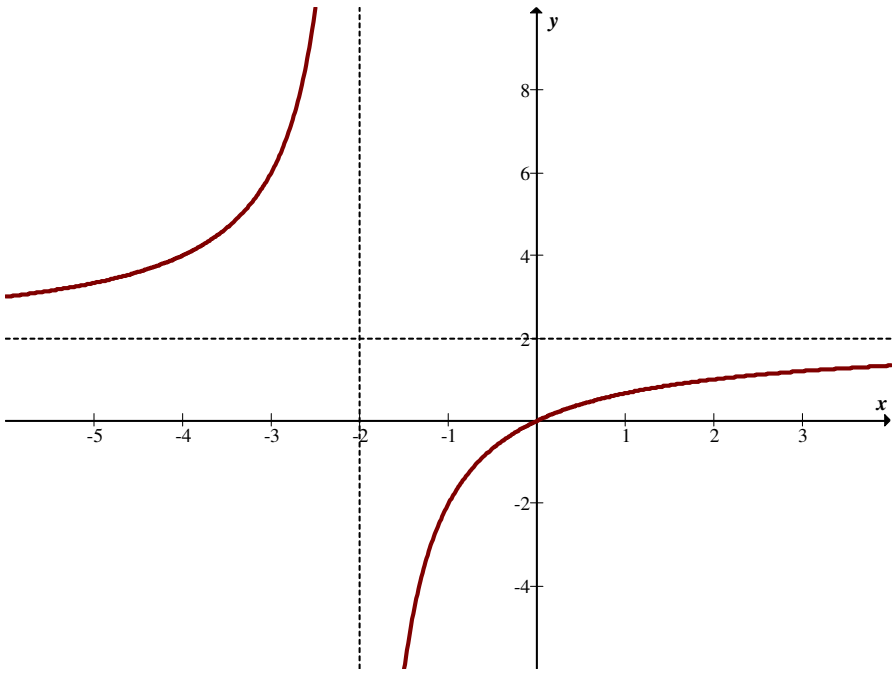
(c) $y = x^4 - 32x + 48$



Etapa	**Procedimento**	**Resultado da análise visual**
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	Conjunto dos reais
3	Conjunto Imagem	$(0,+\infty)$
4	Raízes reais	$x=2$

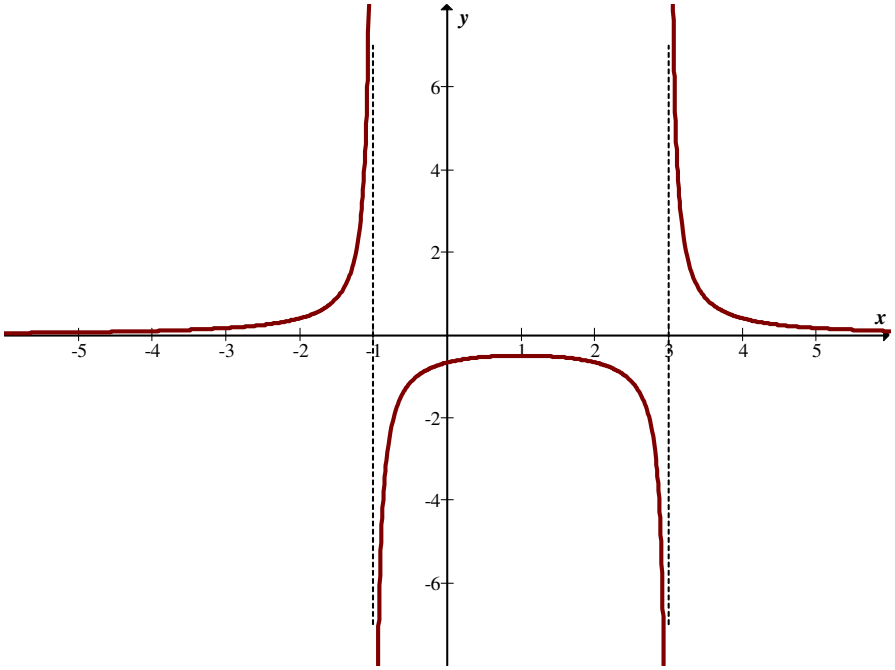
5	Pontos críticos e extremos	Ponto de mínimo em $x = 2$.
6	Intervalos de crescimento	$(2,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,2)$
7	Concavidade	côncava para cima em todo o seu domínio
	Pontos de inflexão	não tem
8	Assíntotas verticais	Não tem
	Assíntotas horizontais	Não tem

(d) $y = \dfrac{2x}{x+2}$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$IR - \{-2\}$
3	Conjunto Imagem	$IR - \{2\}$
4	Raízes reais	$x = 0$
5	Pontos críticos e extremos	não tem
6	Intervalos de crescimento	em todo o seu domínio
	Intervalos de decrescimento	não tem
7	Concavidade	côncava para cima em $(-\infty,-2)$ e côncava para baixo em $(-2,+\infty)$.
	Pontos de inflexão	não tem ponto de inflexão no seu domínio
8	Assíntotas verticais	$x = -2$
	Assíntotas horizontais	$y = 2$

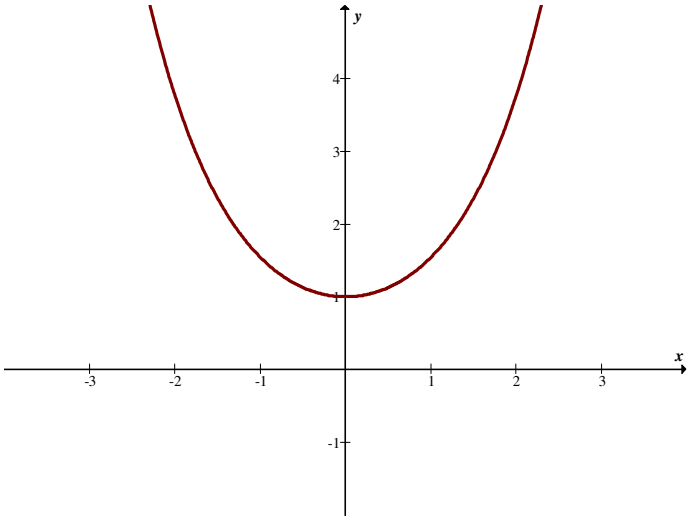
(e) $y = \dfrac{2}{x^2 - 2x - 3}$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$IR-\{-1,3\}$
3	Conjunto Imagem	$IR-\{0\}$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	$x=1$ é um ponto de máximo relativo
6	Intervalos de crescimento	$(-\infty,-1)$ e $(-1,1)$
	Intervalos de decrescimento	$(1,3)$ e $(3,+\infty)$
7	Concavidade	côncava para cima em $(-\infty,-1)$ e $(3,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-1,3)$.
	Pontos de inflexão	não tem ponto de inflexão no seu domínio
8	Assíntotas verticais	$x=-1$ e $x=3$

	Assíntotas horizontais	$y = 0$

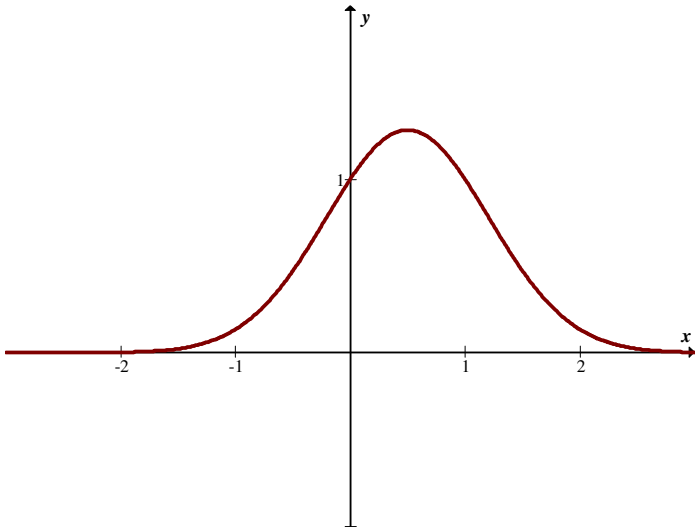
(f) $y = \cosh\, x$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	IR
3	Conjunto Imagem	$[1,+\infty)$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	$x = 0$ é um ponto de mínimo
6	Intervalos de crescimento	$(0,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,0)$
7	Concavidade	côncava para cima em todo o seu domínio.
	Pontos de inflexão	não tem ponto de inflexão.

8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

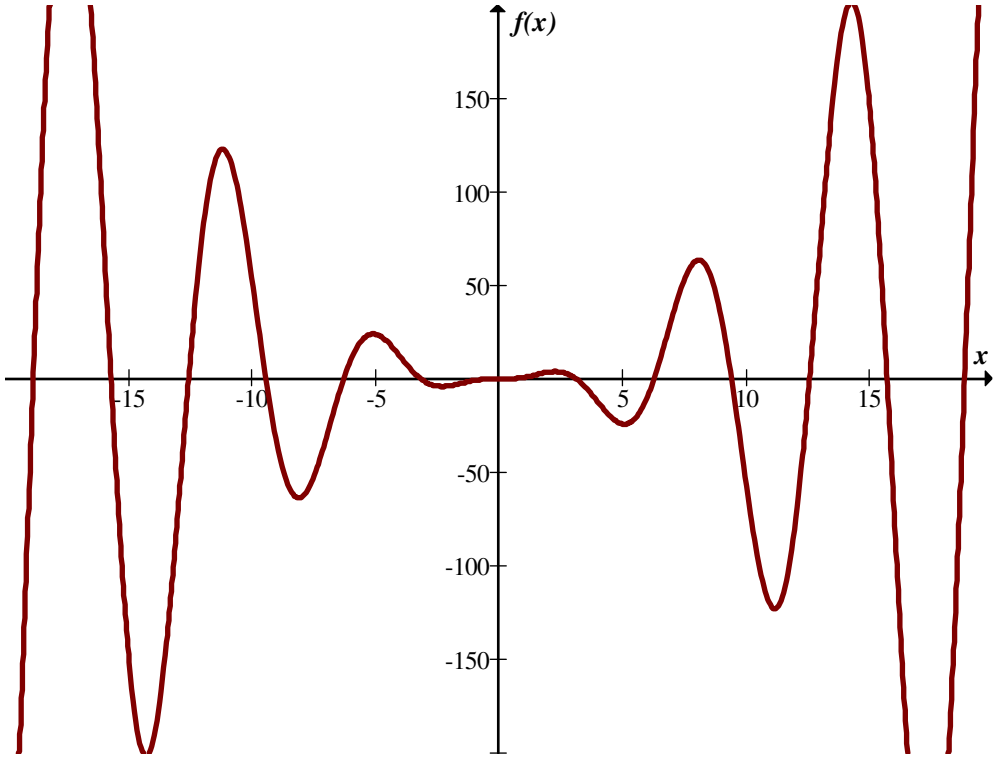
(g) $y = e^{x-x^2}$

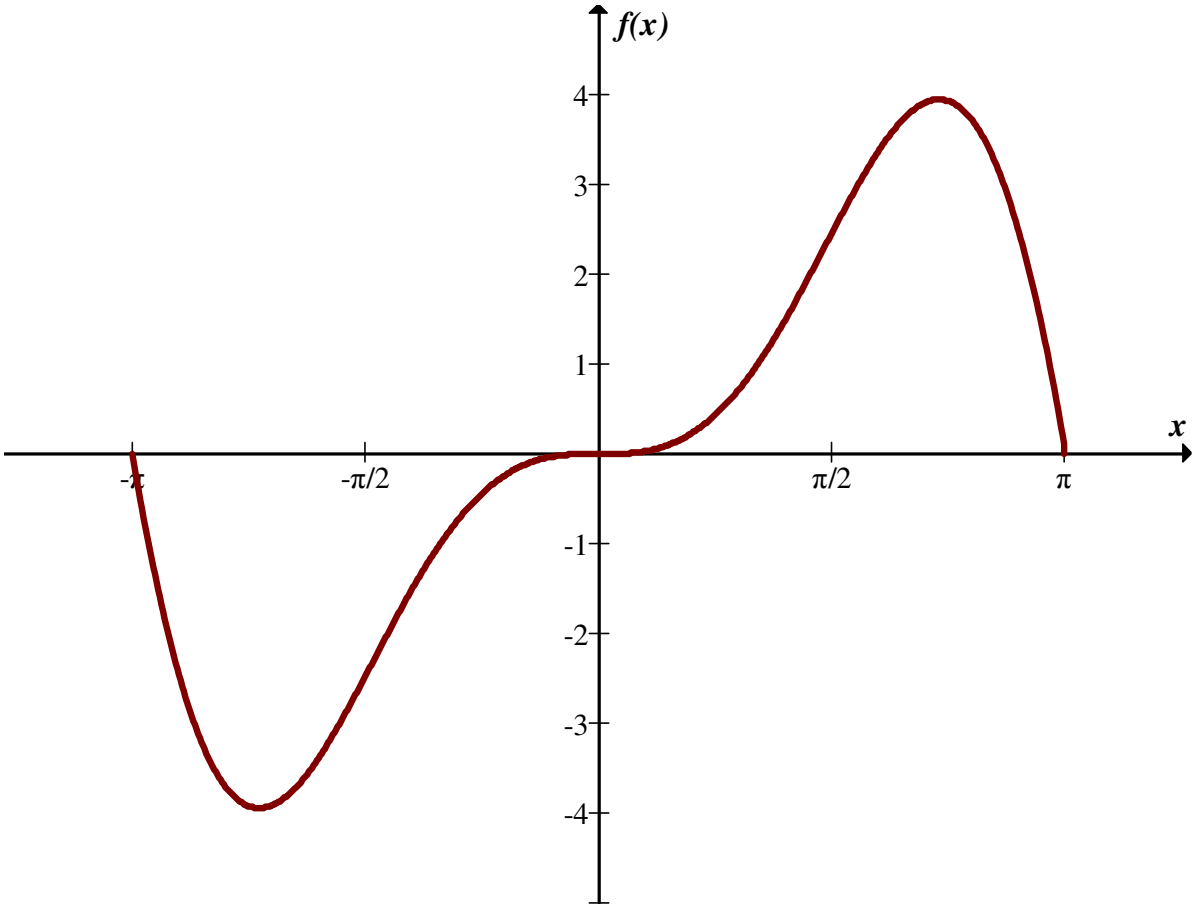


Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	IR
3	Conjunto Imagem	$(0, e^{1/4}) \cong (0;1,28)$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	$x = 1/2$ é um ponto de máximo
6	Intervalos de crescimento	$(-\infty, 1/2)$
	Intervalos de decrescimento	$(1/2, +\infty)$

7	Concavidade	côncava para baixo em $(0,21;1,21)$ côncava para cima em $(-\infty;0,21)\cup(1,21;+\infty)$
	Pontos de inflexão	Em -0,21 e 1,21
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	$y=0$.

(h) $f(x)=x^2 senx$

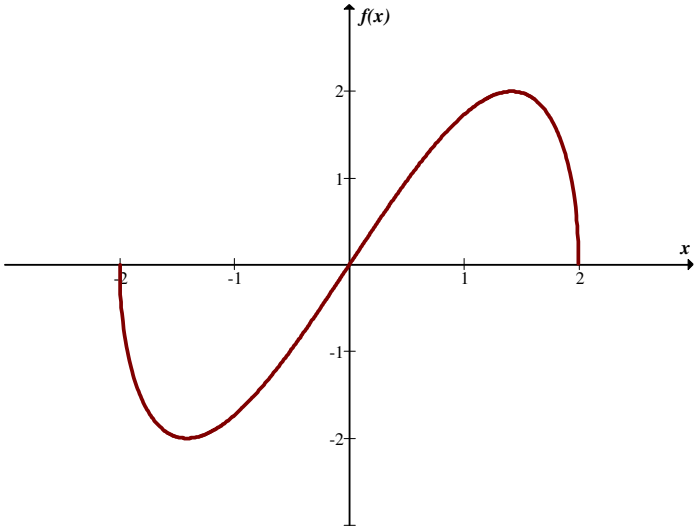




Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	As figuras acima mostram o gráfico da função. Observar que no segundo gráfico apresentamos um detalhamento no intervalo $[-\pi,\pi]$, para fazer uma análise mais detalhada da função. É importante sempre lembrar que graficamente temos condições de analisar somente o que está visualizado. Daí a importância do conhecimento teórico obtido via uso de teoremas.
2	Domínio da função	*IR*
3	Conjunto Imagem	*IR*

4	Raízes reais	Temos infinitas raízes. Especificamente no intervalo $[-\pi,\pi]$ temos: $x=-\pi$, $x=0$ *e* $x=\pi$.
5	Pontos críticos e extremos	Temos infinitos. Especificamente observa-se no intervalo $[-\pi,\pi]$ um ponto de máximo (denotado aqui por $x=b$) entre $\pi/2$ e π e um ponto de mínimo (denotado aqui por $x=a$) entre $-\pi$ e $-\pi/2$.
6	Intervalos de crescimento	Temos infinitos. Especificamente em $[-\pi,\pi]$ podemos visualizar. (a,b).
	Intervalos de decrescimento	Temos infinitos. Especificamente em $[-\pi,\pi]$ podemos ter $(-\pi,a)$ e (b,π).
7	Concavidade	Especificamente em $[-\pi,\pi]$ temos: côncava para baixo em $(0,\pi)$ e côncava para cima em $(-\pi,0)$.
	Pontos de inflexão	Temos infinitos pontos. Especificamente no intervalo $[-\pi,\pi]$ temos $x=0$.
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

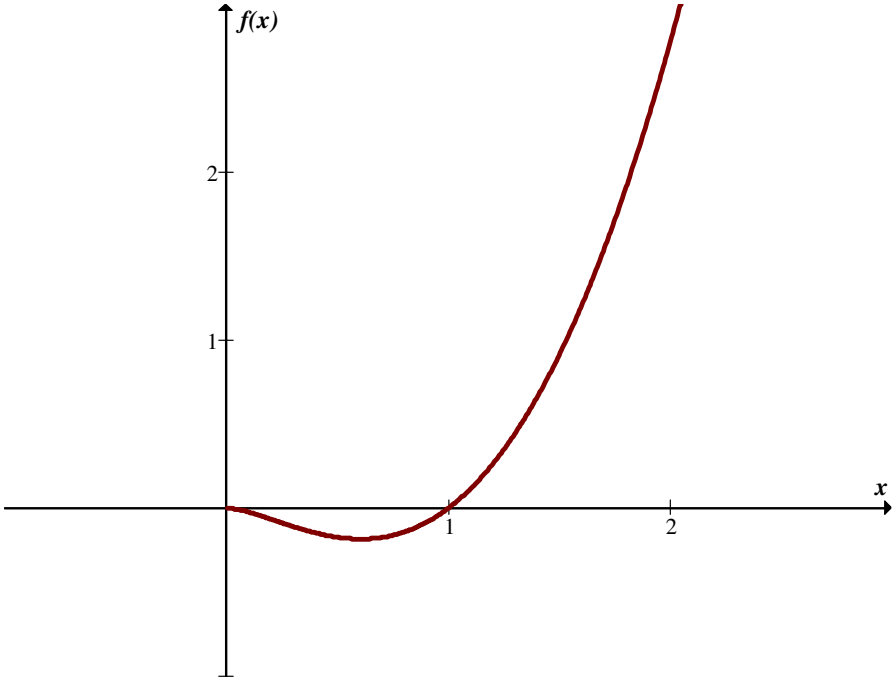
(i) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$[-2,2]$
3	Conjunto Imagem	$[-2,2]$
4	Raízes reais	$x=-2$, $x=0$ *e* $x=2$.
5	Pontos críticos e extremos	Observa-se um ponto de máximo (denotado aqui por $x=a$) entre 0 e 2 e um ponto de mínimo (denotado aqui por $x=b$) entre -2 e 0.
6	Intervalos de crescimento	(a,b)
	Intervalos de decrescimento	$(-2,a)$ e $(b,2)$
7	Concavidade	côncava para baixo em $(0,2)$ e côncava para cima em $(-2,0)$.
	Pontos de inflexão	$x=0$.
8	Assíntotas verticais	não tem.

	Assíntotas horizontais	não tem.

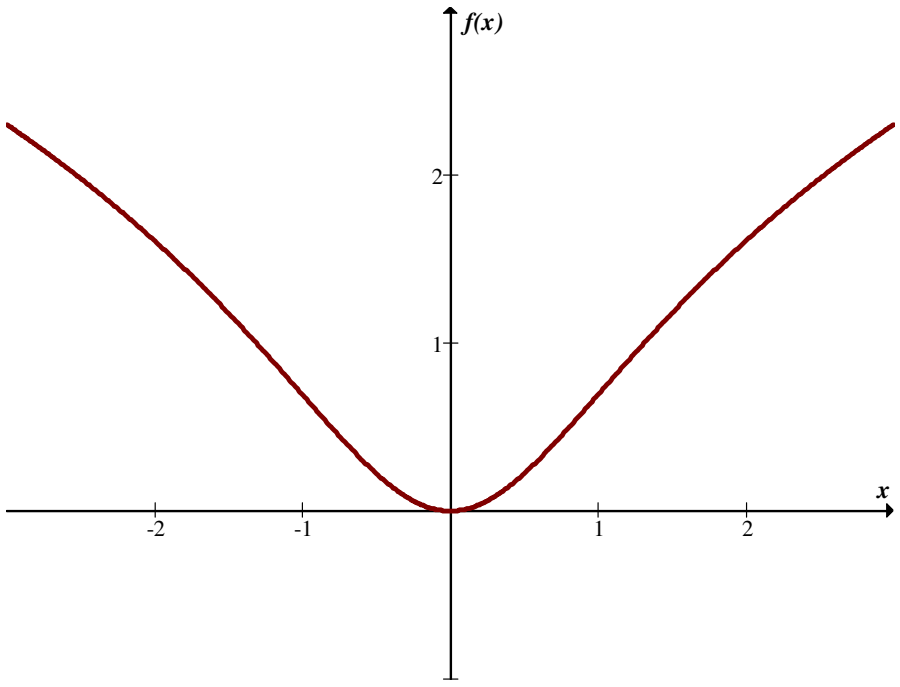
(j) $f(x) = x^2 \ln x$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$(0,+\infty)$
3	Conjunto Imagem	$[-a,+\infty]$. O valor de a não está bem visualizado graficamente, mas pode ser encontrado analiticamente.
4	Raízes reais	$x = 1$.
5	Pontos críticos e extremos	é possível visualizar um ponto de mínimo (denotado aqui de $x = b$) nas proximidades de 0,5. Observamos que este ponto pode ser encontrado algebricamente.

6	Intervalos de crescimento	$(b,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(0,b)$
7	Concavidade	É possível visualizar um intervalo em que a concavidade é para cima, mas nas proximidades do zero parece ter uma mudança de concavidade que deve ser investigada algebricamente.
	Pontos de inflexão	Tem-se a necessidade de uma investigação algébrica nas proximidades do zero.
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

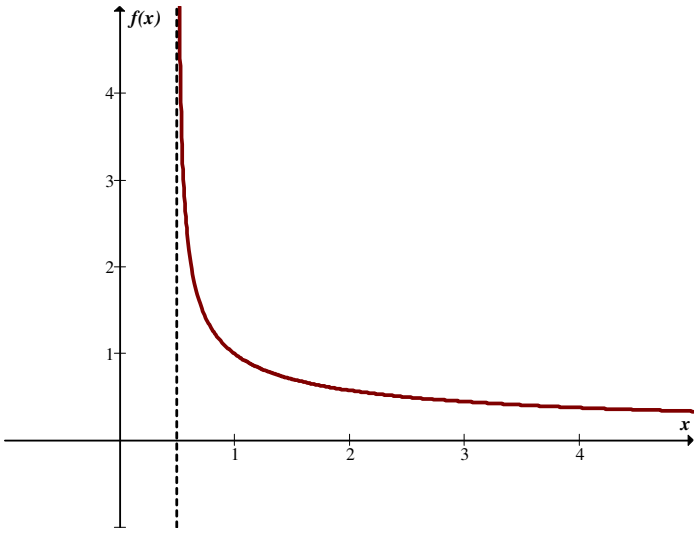
(k) $y = \ln(x^2 + 1)$.



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela

2	Domínio da função	Conjunto dos Números Reais.
3	Conjunto Imagem	$[0,+\infty)$
4	Raízes reais	$x = 0$.
5	Pontos críticos e extremos	Ponto de mínimo em $x = 0$.
6	Intervalos de crescimento	$(0,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,0)$
7	Concavidade	É possível visualizar um intervalo em que a concavidade é para cima em $(-1,1)$ e nos demais pontos do domínio tem a concavidade para baixo.
	Pontos de inflexão	Tem-se a necessidade de uma investigação algébrica nas proximidades do -1 e 1 para confirmar a visualização da concavidade.
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

(l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$(1/2,+\infty)$
3	Conjunto Imagem	$(0,+\infty)$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	não tem
6	Intervalos de crescimento	não tem
	Intervalos de decrescimento	$(1/2,+\infty)$
7	Concavidade	côncava para cima em seu domínio.
	Pontos de inflexão	não tem.
8	Assíntotas verticais	$x = 1/2$
	Assíntotas horizontais	$y = 0$.

5.12 – EXERCÍCIO – pg. 224

1. Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.

a) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?

$S = \pi r^2 + a^2$ sendo r o raio do círculo e a o lado do quadrado.

temos que $2\pi r + 4a = l \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{l - 2\pi r}{4}$.

Assim,

$$S = \pi r^2 + \left(\frac{l - 2\pi r}{4}\right)^2$$

$$S = \pi r^2 + \frac{l^2 - 4l\pi r + 4\pi^2 r^2}{16}$$

$$S' = 2\pi r + \frac{-4l\pi + 4\pi^2 .2r}{16}$$

$$2\pi r + \frac{-4l\pi + 8\pi^2 r}{16} = 0$$

$$32\pi r - 4l\pi + 8\pi^2 r = 0$$

$$r\,(32\pi + 8\pi^2) = 4l\pi$$

$$r = \frac{4l\pi}{32\pi + 8\pi^2} = \frac{l}{8 + 2\pi}$$

$$S'' = 2\pi + \frac{8\pi^2}{16}$$

$$S''\left(\frac{l}{8 + 2\pi}\right) = 2\pi + \frac{8\pi^2}{16} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{é ponto de mínimo}$$

Portanto: $r = \dfrac{l}{8 + 2\pi}$ e $a = \dfrac{l}{4 + \pi}$.

1º Pedaço: $4\,a = \dfrac{4l}{4 + \pi}$

2º Pedaço: $2\pi r = \dfrac{l\pi}{4+\pi}$

b) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

Como não existe ponto de máximo na função devemos fazer somente um círculo ou um quadrado. Temos:

$$A_{círculo} = \pi r^2 = \pi \frac{l^2}{2\pi} = \frac{l^2}{2}$$

$$A_{quadrado} = \frac{l^2}{16}$$

$$\Rightarrow \quad A_{círculo} > A_{quadrado}$$

Portanto, vamos usar o comprimento do fio para fazer somente um círculo de raio $r = \dfrac{l}{2\pi}$.

2. Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $xy = 1,$ que está mais próximo da origem.

Vamos considerar um ponto $P(x, y)$ sobre a hipérbole e a distância *d* deste ponto até a origem. Temos:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ mas } y = \frac{1}{x}$$

$$d = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}$$

Para achar o mínimo de d podemos minimizar a função

$$f = \frac{x^4+1}{x^2}$$

$$f' = \frac{2x^4 - 2}{x^3}$$

$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0$$

$$2x^4 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \text{ é ponto crítico}$$

$$f'' = \frac{2x^4 + 6}{x^4}$$

$f''|_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \pm 1$ são pontos de mínimo

$f''|_{-1} > 0$

Portanto $P(x, y) = P(1,1)$ ou $P(-1,-1)$.

3. Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou R$380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?

$\text{Custo} = 380.000 + 400t$

$\text{Venda} : 200\,(300 + 1{,}5t)\,.\,(18{,}00 - 0{,}05t)$

$L = 200\,(300 + 1{,}5t)\,.\,(18{,}00 - 0{,}05t) - (380000 + 400t)$

$L = (60000 + 300t)\,.\,(18 - 0{,}05t) - (380000 + 400t)$

$L' = (60000 + 300t)\,(-0{,}05) + (18 - 0{,}05t)\,.300 - 400$

$L' = -3000 - 15t + 5400 - 15t - 400$

$L' = 0 \quad \Rightarrow \quad -30t + 2000 = 0$

$-30t = -2000$

$t = \frac{2000}{30} \cong 67 \text{ dias}$

$L'' = -30 < 0 \quad \Rightarrow$ é ponto de máximo.

Assim, temos que o fazendeiro deve esperar 67 dias para obter o lucro máximo.

4. Achar dois números positivos cuja soma seja 70 e cujo produto seja o maior possível.

$x + y = 70$

$f = xy = x(70 - x) = 70x - x^2$

$f' = 70 - 2x$

$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad 70 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 35$

$f'' = -2$

$f''\big|_{35} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 35$ é ponto de máximo.

Portanto $x = 35$ e $y = 35$.

5. Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado a, deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.

$V = (a - 2x)^2 x = (a^2 - 4ax + 4x^2)\ x$

$V = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$

$V' = a^2 - 8ax + 12x^2$

$a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$

$x = a/2$ ou $x = a/6$

$V'' = -8a + 24x$

$V''(a/2) = -8a + 12a = 4a > 0 \Rightarrow a/2$ é ponto de mínimo

$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 24.\frac{a}{6} = -4a <\Rightarrow a/6$ é ponto de máximo.

Portanto: os lados dos quadrados devem medir $\frac{a}{6}$ unidades de medida.

6. Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V, de forma que a sua área total seja mínima.

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Temos que:

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Assim,

$$A = 2\pi r . \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

$$A' = \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2V + 4\pi r^3}{r^2} = 0$$

$$-2V + 4\pi r^3 = 0$$

$$4\pi r^3 = 2V \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$A'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi$$

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi = \frac{4V}{1} . \frac{2\pi}{V} + 4\pi$$

$$= 8\pi + 4\pi = 12\pi > 0$$

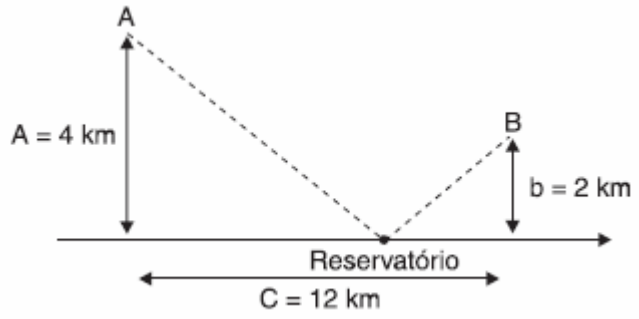
$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ é ponto de mínimo

Portanto,

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi . \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

7. Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo l, já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?



Encanamento $\overline{AR} = \sqrt{a^2 + (c-x)^2}$

Encanamento $\overline{BR} = \sqrt{b^2 + x^2}$

$L(x) = \sqrt{a^2 + (c-x)^2} + \sqrt{b^2 + x^2}$

$L(x) = \sqrt{16 + (12-x)^2} + \sqrt{4 + x^2}$

$$L'(x) = \frac{1}{2}\frac{2\,(12-x)\,(-1)}{\sqrt{16+(12-x)^2}} + \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}$$

$$= \frac{x-12}{\sqrt{16+(12-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$L' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-12}{\sqrt{16+(12-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = 0$$

$$(x-12)\sqrt{4+x^2} + x\sqrt{16+(12-x)^2} = 0$$

$$(x-12)^2\,(4+x^2) = x^2\,(16+(12-x)^2)$$

$$(x^2 - 24x + 144)\,(4+x^2) = x^2\,(16+144-24x+x^2)$$

$$12x^2 + 96x - 576 = 0$$

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$x_1 = 4$ $\qquad$ $x_2 = -12$ não interessa.

$$L''(x) = \frac{16}{\left(x^2-24x+160\right)^{3/2}} + \frac{4}{\left(x^2+4\right)^{3/2}}$$

$$L''(4) = \frac{3\sqrt{5}}{100} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ é ponto de mínimo}$$

Precisamos ainda analisar os extremos pois $0 \le x \le 12$.

$L(0) = 12{,}64 + 2 = 14{,}64$

$L(12) = 4 + 12{,}16 = 16{,}16$

$L(4) = 8{,}94 + 4{,}47 = 13{,}41$

Portanto, $x = 4$ é o ponto de mínimo procurado.

8. O custo e a receita total com a produção e comercialização e um produto são dados por:
$C(q) = 600 + 2{,}2q$

$R(q) = 10q - 0{,}006q^2$

sendo $0 \le q \le 900$.

(a) Encontrar a quantidade q que maximiza o lucro com a venda desse produto.

$L(q) = R(q) - C(q)$

$= 10q - 0{,}006q^2 - 600 - 2{,}2q$

$= -0{,}006q^2 + 7{,}8q - 600$

$L'(q) = -0{,}012q + 7{,}8 = 0$

$0{,}012q = 7{,}8$

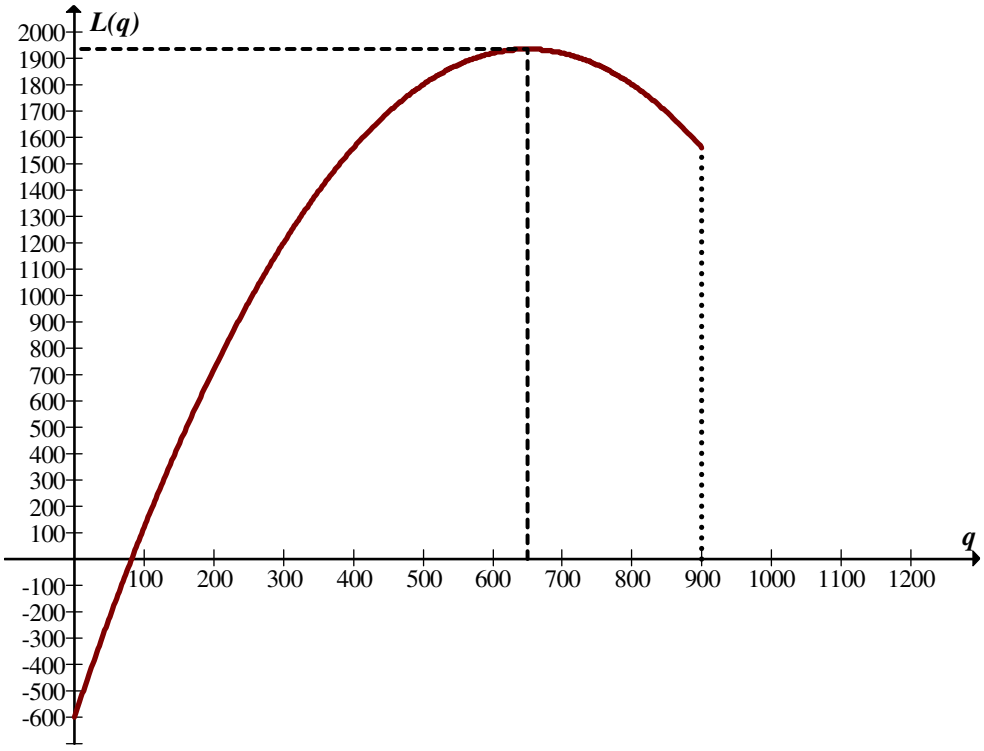
$q = 650$

$L''(q) = -0{,}012 < 0$

Assim $q = 650$ é ponto de máximo.

(b) Qual o nível de produção que minimiza o lucro?

A figura a seguir apresenta o gráfico da função lucro $L(q) = -0{,}006q^2 + 7{,}8q - 600$. Temos que o lucro mínimo é igual a zero e ocorre no nível de produção $q \cong 82$.



(c) Qual o nível de produção correspondente ao prejuízo máximo?

Observando novamente a figura podemos observar que o prejuízo é de 600 para *q=0*.

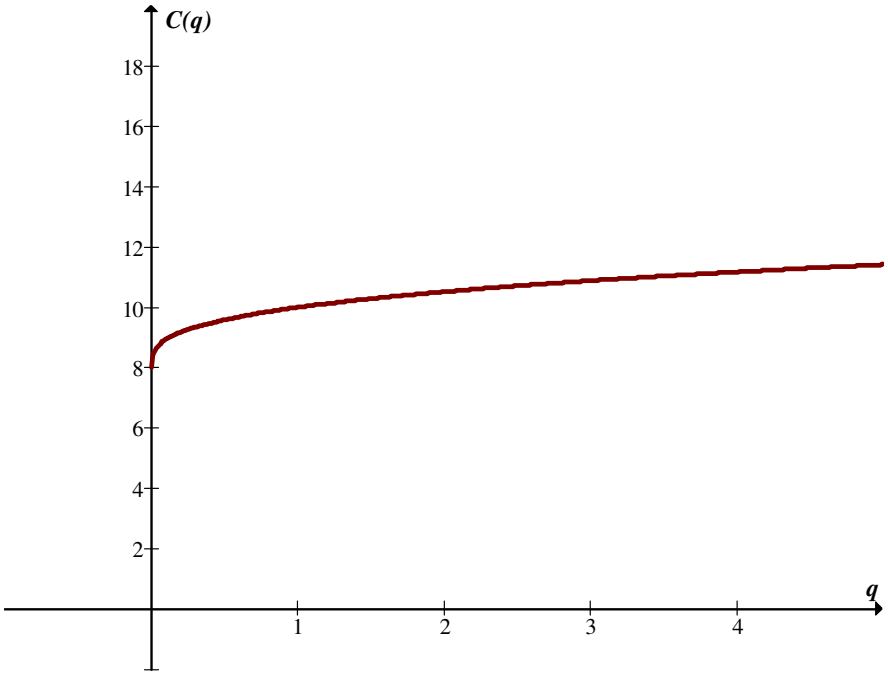
9. O gráfico da função $C(q) = Kq^{1/\alpha} + F$, $q \in [q_0, q_1]$, sendo K, α e F constantes positivas, é denominado de curvas de custos a curto prazo de Cobb – Douglas. Essa curva é bastante utilizada para representar os custos de uma empresa com a produção de um produto.

(a) Dar o significado da constante F.

Temos que F representa o custo fixo.

(b) Verificar que, quando $\alpha > 1$, a curva é côncava para baixo e interpretar esse resultado sobre o ponto de vista da Economia.

Na figura a seguir apresentamos um exemplo para $K = 2$, $\alpha = 3$ e $F = 8$.



Algebricamente podemos fazer:

$$C'(q) = k \cdot \frac{1}{\alpha} q^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$C''(q) = k \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) q^{\frac{1}{\alpha}-2}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 0 \text{ e } \left(\frac{1}{\alpha}-1\right) < 0$$

$$q^{\frac{1}{\alpha}-2} > 0$$

Portanto, $C''(q) < 0 \Rightarrow C(q)$ é côncava para baixo.

Sob o ponto de vista da economia isso significa que o custo marginal decresce a medida que o nível de produção aumenta.

(c) Supor $K = 2$, $\alpha = 3$ e $F = 8$ e determinar se existir, o valor de q que fornece o custo médio mínimo.

$$C(q) = 2\,q^{1/3} + 8$$

$$\overline{C}(q) = \frac{2\,q^{1/3} + 8}{q}$$

$$\overline{C}(q) = 2\,q^{-2/3} + 8q^{-1}$$

$$C'(q) = 2 \cdot \frac{-2}{3} \cdot q^{-5/3} - 8\,q^{-2} = -\frac{4}{3}\frac{1}{q^{5/3}} - \frac{8}{q^2} = \frac{1}{q^2}\left[-\frac{4}{3}q^{1/3} - 8\right] = 0$$

$$-\frac{4}{3}q^{1/3} = 8$$

$$q^{1/3} = -\frac{8 \cdot 3}{4} = -6$$

$$q = (-6)^3$$

Como $q < 0$ não há q que produz custo médio mínimo.

(d) Usando os mesmo valores de item (c), determinar o nível de produção que minimiza o custo marginal, no intervalo $125 \le q \le 125000$.

$C'(q) = \frac{2}{3}\,q^{-2/3}$ é o custo marginal, que vamos denotar CM.

$$CM'(q) = \frac{2}{3} \cdot -\frac{2}{3}q^{-5/3} = 0 \quad \nexists$$

$$CM\ (125\,000) = 0{,}000\,266$$

Como $CM(q)$ é decrescente, $q = 125\,000$.

10. Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito no círculo de raio 12 cm?

Supondo que o retângulo tenha lados *x* e *y* e o círculo raio *r=12* temos:

Perímetro $= 2x + 2y$

Observando o triângulo retângulo de hipotenusa igual ao diâmetro e catetos *x* e *y* temos:

$$24^2 = x^2 + y^2$$
$$y^2 = 576 - x^2$$
$$y = \sqrt{576 - x^2}$$

Substituindo esse valor na expressão do perímetro temos:

$$P = 2x + 2\sqrt{576 - x^2}$$
$$P' = 2 + \frac{2\,.\,(-1).2x}{2\sqrt{576 - x^2}} = \frac{2\sqrt{576 - x^2} - 2x}{\sqrt{576 - x^2}}$$
$$P' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{576 - x^2} - 2x = 0$$
$$2\sqrt{576 - x^2} = 2x$$
$$576 - x^2 = x^2$$
$$2x^2 = 576$$
$$x^2 = 288 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{288} \cong 16{,}97$$

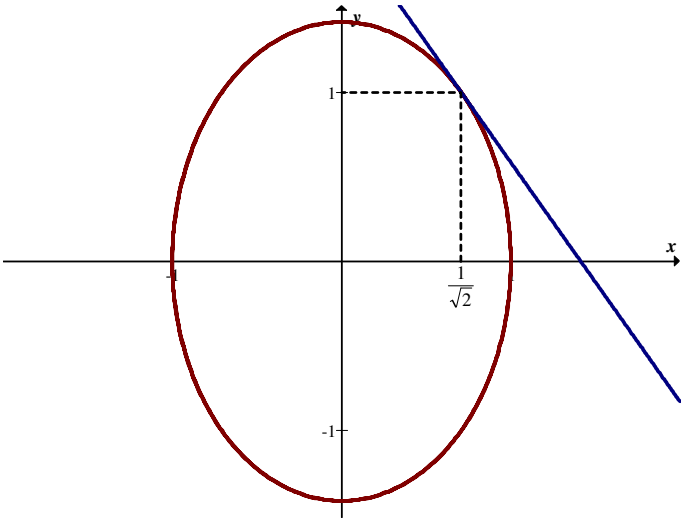
$$P'' = -\frac{-2\sqrt{576 - x^2}\,.+ 2x.\dfrac{-2x}{2\sqrt{576 - x^2}}}{576 - x^2} = \frac{-1152}{\left(576 - x^2\right)^{3/2}}$$
$$P''\big|_{16{,}97} \cong -0{,}236 < 0$$

$\therefore \quad \sqrt{288} \cong 16{,}97$ é ponto de máximo

==> O retângulo de perímetro máximo é o quadrado de lado $\sqrt{288}$.

11. Traçar uma tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 2$ de modo que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados positivos seja mínima. Obter as coordenadas do ponto de tangência e a área mínima.

Na figura que segue temos a visualização do problema.



Seja (x_1, y_1) o ponto de tangência.

A equação da tangente é dada por:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Vamos encontrar os valores de *x* e *y* onde a reta tangente corta os eixos.

Se $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y - y_1 = -m\, x_1 \qquad \therefore \qquad y = y_1 - m\, x_1$

Se $y = 0 \quad \Rightarrow \quad -y_1 = m\,(x - x_1) \qquad \therefore \qquad -\dfrac{y_1}{m} = x - x_1$

$$x = x_1 - \frac{y_1}{m}$$

Área do triângulo:

$A = \dfrac{\left(x_1 - \dfrac{y_1}{m}\right)(y_1 - mx_1)}{2}$ que é a função que queremos minimizar.

Sabemos ainda que:

$$2x^2 + y^2 = 2$$
$$4x + 2yy' = 0$$
$$2yy' = -4x$$
$$y' = \frac{-4x}{2y} = -\frac{2x}{y}$$

$$m(x_1) = \frac{-2x_1}{y_1}$$

Substituindo em A vem:

$$A = \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{y_1}{m}\right)\left(y_1 - mx_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{y_1}{\frac{-2x_1}{y_1}}\right)\left(y_1 - \frac{-2x_1}{y_1}\,x_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{{y_1}^2}{2x_1}\right)\left(y_1 + \frac{2{x_1}^2}{y_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2{x_1}^2 + {y_1}^2}{2x_1}\right)\left(\frac{{y_1}^2 + 2{x_1}^2}{y_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(2{x_1}^2 + {y_1}^2\right)^2}{2x_1\,y_1} = \frac{\left(2{x_1}^2 + {y_1}^2\right)^2}{4x_1\,y_1}$$

Ainda temos que:

$$2{x_1}^2 + {y_1}^2 = 2$$

$${y_1}^2 = 2 - 2{x_1}^2$$

$$y_1 = \sqrt{2 - 2{x_1}^2}$$

Então:

$$A = \frac{4}{4\,x_1\,\sqrt{2 - 2{x_1}^2}} = \frac{1}{x_1\,\sqrt{2 - 2{x_1}^2}}$$

$$A' = \frac{x_1\,\sqrt{2 - 2{x_1}^2}\,.0 - 1\left(x_1\,\dfrac{-4x_1}{2\sqrt{2 - 2{x_1}^2}} + \sqrt{2 - 2{x_1}^2}\right)}{\left(x_1\,\sqrt{2 - 2{x_1}^2}\right)^2} = \frac{\dfrac{2{x_1}^2}{\sqrt{2 - 2{x_1}^2}} - \sqrt{2 - 2{x_1}^2}}{{x_1}^2\left(2 - 2{x_1}^2\right)}$$

$$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2{x_1}^2}{\sqrt{2 - 2{x_1}^2}} - \sqrt{2 - 2{x_1}^2} = 0$$

$$2{x_1}^2 - \left(2 - 2{x_1}^2\right) = 0$$

$$4{x_1}^2 - 2 = 0$$

$${x_1}^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $A' < 0$ em $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e $A' > 0$ em $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+1\right)$,

temos que:

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ é ponto de mínimo

$$\Rightarrow \quad y_1 = \sqrt{2 - 2x_1^{\,2}}$$
$$= \sqrt{2 - 2\,\frac{1}{2}} = \pm 1$$

Assim as coordenadas do ponto de tangência são $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ e a área mínima:

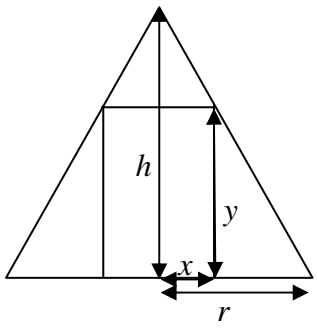
$$A\,(x_1, y_1) = \frac{\left(2x_1^{\,2} + y_1^{\,2}\right)^2}{4x_1 y_1} = \frac{\left(2\,\frac{1}{2} + 1\right)^2}{4\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,1} = \frac{4}{4\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,1} = \sqrt{2}.$$

Finalmente temos a equação da tangente no ponto encontrado:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - 1 = \frac{-2\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$y - 1 = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$y - 1 = -\sqrt{2}\,x + 1$$
$$y + \sqrt{2}\,x - 2 = 0$$

12. Mostrar que o volume do maior cilindro reto que pode ser inscrito num cone reto é $4/9$ do volume do cone.

A figura que segue mostra um corte vertical do cilindro inscrito no cone.



Temos:

$$\frac{y}{r-x}=\frac{h}{r}$$

$$y=\frac{h(r-x)}{r}$$

$$V_{\text{cilindro}}=\pi\, x^2 y$$

$$V=\pi\, x^2\,\frac{h(r-x)}{r}=\frac{\pi r h x^2-\pi h x^3}{r}$$

$$V'=\frac{2\pi r h x-3\pi h x^2}{r}$$

$$V'=0 \quad\Rightarrow\quad 2\pi r h x-3\pi h x^2=0$$

$$x(2\pi r h-3\pi h x)=0$$

$$x_1=0 \quad e \quad x_2=\frac{2r}{3}.$$

$$V''=\frac{2\pi r h-6\pi h x}{r}$$

$$V''\big|_0=\frac{2\pi r h}{r}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{ponto mínimo}$$

$$V''\big|_{\frac{2r}{3}}=\frac{2\pi r h-6\pi h\,\frac{2r}{3}}{r}=\frac{-2\pi r h}{r}<0 \Rightarrow \text{é ponto de máximo}$$

Portanto, o raio do cilindro é igual a $\frac{2}{3}r$, onde r é o raio da base do cone.

A altura do cilindro $y=\dfrac{h\left(r-\frac{2r}{3}\right)}{r}=\dfrac{h}{3}$.

Assim,

$$V_{\text{cilindro}} = \pi x^2 y = \frac{4\pi r^2 h}{27} = \frac{4}{9}\left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right) = \frac{4}{9}(V_{cone}).$$

13. Um cone reto é cortado por um plano paralelo à sua base. A que distância da base deve ser feito esse corte, para que o cone reto de base na secção determinada, e de vértice no centro da base do cone dado, tenha volume máximo?

Considerando *r* o raio da base do cone; *h* a altura do cone dado; *x* o raio da seção e *y* a altura da seção até a base do cone dado, temos:

$$\frac{h}{r} = \frac{y}{r-x}$$

$$y = \frac{h(r-x)}{r}$$

$$V(x) = \frac{\pi x^2 y}{3} = \frac{\pi x^2 \dfrac{h(r-x)}{r}}{3} = \frac{\pi r h x^2 - \pi h x^3}{3r}$$

$$V'(x) = \frac{2\pi r h x - 3\pi h x^2}{3r}$$

$$V' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi r h x - 3\pi h x^2 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad e \qquad x = \frac{2r}{3}$$

$$V''(x) = \frac{2\pi r h - 6\pi h x}{3r}$$

$$V''\left(\frac{2r}{3}\right) = \frac{2\pi r h - 4\pi r h}{3r} = \frac{-2\pi h}{3} < 0$$

Portanto, $x = \dfrac{2r}{3}$ é ponto de máximo.

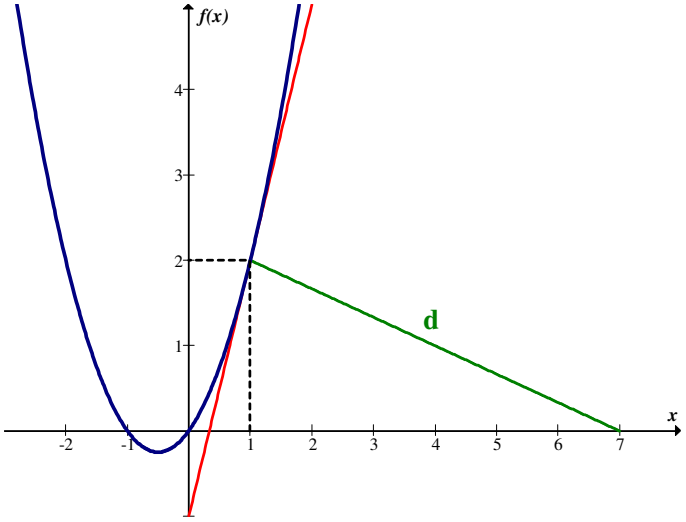
$$y = h - \frac{hx}{r}$$

$$y = h - \frac{h}{r}.\frac{2r}{3} = \frac{3h - 2h}{3} = \frac{h}{3}.$$

Portanto, a distância deve ser igual à terça parte da altura do cone reto dado.

14. Determinar o ponto A da curva $y = x^2 + x$ que se encontra mais próximo de (7, 0). Mostrar que a reta que passa por (7,0) e por A é normal à curva dada em A.

A figura que segue ilustra este problema.



Temos:

$$d = \sqrt{(x-7)^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + \left(x^2 + x\right)^2}\ .$$

Basta minimizar a função

$$f = (x-7)^2 + (x^2 + x)^2$$
$$f = x^2 - 14x + 49 + x^4 + 2x^3 + x^2$$
$$f = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 14x + 49$$
$$f' = 4x^3 + 6x^2 + 4x - 14$$
$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 + 6x^2 + 4x - 14 = 0$$
$$2x^3 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$$

$x_1 = 1$ $\quad$ x_2 e x_3 são complexas

$$f'' = 12x^2 + 12x + 4$$
$$f''\big|_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \text{ é ponto de mínimo.}$$

Reta $\overline{AP}$ que passa por :

$A(1,2)$

$P(7,0)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-2}{0-2}=\frac{x-1}{7-1}$$
$$\frac{y-2}{-2}=\frac{x-1}{6}$$
$$6y-12=-2x+2$$
$$6y=-2x+14$$
$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

que é a equação da reta que passa por $\overline{AP}$.

Equação da reta tangente:

$$y=x^2+x$$
$$y'=2x+1$$
$$y'\big|_1=2+1=3$$

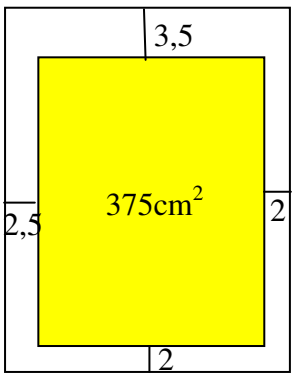
$$y-2=3(x-1)$$
$$y-2=3x-3$$
$$y=3x-1$$

As duas retas são perpendiculares, pois as declividades multiplicadas resultam -1.

$$3\frac{-1}{3}=-1.$$

15. Uma folha de papel contém 375 cm² de matéria impressa, com margem superior de 3,5 cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de 2,5 cm. Determinar quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.

A Figura que segue ilustra o problema.



Temos:

$$a.b = 375 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{375}{a}$$

$$x = a + 2{,}5 + 2 = a + 4{,}5$$

$$y = b + 3{,}5 + 2 = b + 5{,}5$$

$A = xy$ deve ser mínima.

$$A = (a + 4{,}5)\ (b + 5{,}5)$$

$$A = (a + 4{,}5)\left(\frac{375}{a} + 5{,}5\right)$$

$$A = 375 + 5{,}5a + \frac{1687{,}5}{a} + 24{,}75$$

$$A = 5{,}5a + \frac{1687{,}5}{a} + 399{,}75$$

$$A' = 5{,}5 - \frac{1687{,}5}{a^2}$$

$$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad 5{,}5 - \frac{1687{,}5}{a^2} = 0$$

$$5{,}5a^2 - 1687{,}5 = 0$$

$$5{,}5a^2 = 1687{,}5 \quad \therefore \quad a^2 = \frac{1687{,}5}{5{,}5} \cong 306{,}82 \quad a \cong \pm 17{,}51$$

$$A'' = \frac{1687{,}5.2}{a^3} = \frac{3375}{a^3}$$

$A''\big|_{17{,}51} > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cong 17{,}51$ é ponto de mínimo

Portanto,

$a \cong 17{,}51$

e

$b \cong 21{,}41$

Assim, $x = a + 4{,}5 = 17{,}51 + 4{,}5 \cong 22{,}01$

$y = b + 5{,}5 = 21{,}41 + 5{,}5 \cong 26{,}91.$

16. Uma janela tem a forma de um retângulo encimado por um semicírculo. Achar as dimensões de modo que o perímetro seja 3,2 m e a área a maior possível.

Considerando o retângulo com dimensões *h* e *2r* sendo *r* o raio do semicírculo, temos:

$$\text{Perímetro} = \pi r + 2r + 2h = 3{,}2\,\text{m}$$

$$\text{Área} = \frac{\pi r^2}{2} + 2rh$$

$$\text{Vale a relação}: 2h = 3{,}2 - \pi r - 2r$$

$$h = \frac{3{,}2 - \pi r - 2r}{2}$$

$$A = \frac{\pi r^2}{2} + 2r\,\frac{3{,}2 - \pi r - 2r}{2}$$

$$A = \frac{\pi r^2 + 6{,}4r - 2\pi r^2 - 4r^2}{2} = \frac{6{,}4r - 4r^2 - \pi r^2}{2}$$

$$A' = \frac{6{,}4 - 8r - 2\pi r}{2}$$

$$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6{,}4 - 8r - 2\pi r}{2} = 0$$

$$6{,}4 - 8r - 2\pi r = 0$$

$$8r + 2\pi r = 6{,}4$$

$$r(8 + 2\pi) = 6{,}4$$

$$r = \frac{6{,}4}{8 + 2\pi} = \frac{3{,}2}{4 + \pi}$$

$$A'' = \frac{-8 - 2\pi}{2} = -4 - \pi$$

$$A''\Big|_{\frac{3{,}2}{4+\pi}} = -4 - \pi < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3{,}2}{4 + \pi} \text{ é ponto de máximo.}$$

Agora temos que:

$$h = \frac{3{,}2 - \pi r - 2r}{2} = \frac{1}{2}\left(3{,}2 - \pi\,\frac{3{,}2}{4+\pi} - 2\,\frac{3{,}2}{4+\pi}\right)$$

$$h = \frac{1}{2}\left(3{,}2 - \frac{3{,}2\pi + 6{,}4}{4+\pi}\right)$$

$$h = \frac{1}{2}\,\frac{12{,}8 + 3{,}2\pi - 3{,}2\pi + 6{,}4}{4+\pi}$$

$$h = \frac{1}{2}\,\frac{6{,}4}{4+\pi} = \frac{6{,}4}{8+2\pi} = \frac{3{,}2}{4+\pi} \cong 0{,}44$$

$r = \dfrac{3{,}2}{4+\pi}$ é o raio do semi - círculo

$$2r = \frac{6{,}4}{4+\pi} \cong 0{,}88$$

Portanto, as dimensões do retângulo são 0.44 m x 0.88 m.

17. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α. Seja l o alcance do canhão, dado por $l = \dfrac{2v^2}{g} sen\alpha \cos\alpha$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

Temos:

$$l = \frac{2v^2}{g} sen\alpha \cos\alpha$$

$$l' = \frac{2v^2}{g}(-sen^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$l' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2v^2}{g}(-sen^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$$

$$-sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$$

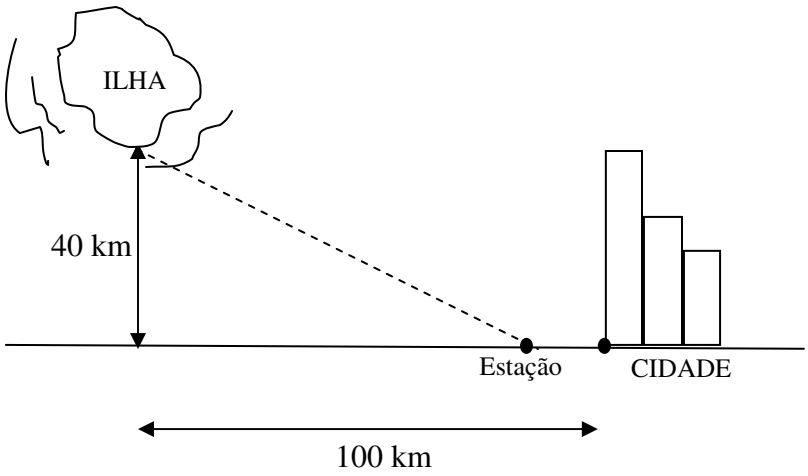
$$sen\alpha = \cos\alpha, 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$l'' = \frac{2v^2}{g}(-4sen\,\alpha\cos\alpha)$$

$$l''\Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{-4v^2}{g} < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ é ponto de máximo.}$$

18. Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km por hora, e os carros têm uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?



Temos a função:

$$t = \frac{\sqrt{40^2 + (100-x)^2}}{18} + \frac{x}{50}$$

$$t' = \frac{-2(100-x)}{2\sqrt{40^2 + (100-x)^2}} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{50}$$

$$t' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-(100-x)}{18\sqrt{40^2 + (100-x)^2}} + \frac{1}{50} = 0$$

$$-50(100-x) + 18\sqrt{40^2 + (100-x)^2} = 0$$

$$-25(100-x) + 9\sqrt{40^2 + (100-x)^2} = 0$$

$$x_1 = 115{,}43$$

$$x_2 = 84{,}56$$

$$9\sqrt{40^2+(100-x)^2} = 25(100-x)$$

$$81(40^2+(100-x)^2) = 625(100-x)^2$$

$$81(11600-200x+x^2) = 625(10000-200x+x^2)$$

$$939600-16200x+81x^2 = 6250000-125000x+625x^2$$

$$544x^2-108800x+5310400 = 0$$

$$34x^2-6800x+331900 = 0$$

$$17x^2-3400x+165950 = 0$$

$$t'' = \frac{1}{18}\cdot\frac{\sqrt{40^2+(100-x)^2}+(100-x)\cdot\dfrac{-2(100-x)}{2\sqrt{40^2+(100-x)^2}}}{40^2+(100-x)^2}$$

$$t'' = \frac{1}{18}\cdot\frac{\sqrt{40^2+(100-x)^2}-\dfrac{(100-x)^2}{\sqrt{40^2+(100-x)^2}}}{40^2+(100-x)^2}$$

$$t'' = \frac{1}{18}\cdot\frac{40^2+(100-x)^2-(100-x)^2}{\sqrt{40^2+(100-x)^2}\;40^2+(100-x)^2}$$

$$t'' = \frac{1}{18}\cdot\frac{40^2}{\left[40^2+(100-x)^2\right]\sqrt{40^2+(100-x)^2}}$$

$t''\big|_{84,56} > 0 \quad\Rightarrow\quad x = 84{,}56$ é ponto de mínimo.

$$t(84{,}56) = \frac{\sqrt{40^2+(100-84{,}56)^2}}{18}+\frac{84{,}56}{50}$$

$$= \frac{\sqrt{1600+238{,}3936}}{18}+1{,}6912$$

$$\cong \frac{42{,}87}{18}+1{,}6912$$

$$\cong 2{,}38+1{,}6912$$

$$\cong 4{,}07 \text{ horas.}$$

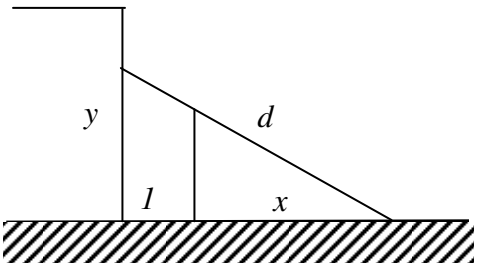
$$t(0) = \frac{\sqrt{1600+10000}}{18}+0 = 5{,}98$$

$$t(100) = \frac{\sqrt{1600+0}}{18}+\frac{100}{50} = 2{,}22+2 = 4{,}22$$

Portanto para $0 \le x \le 100$ o mínimo absoluto é em $x \cong 84{,}56\,\text{km}$.

19. Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distância de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?

A Figura que segue ilustra o problema.



Temos:

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{1+x} \quad \therefore \quad y = \frac{1(1+x)}{x}$$

$$d = \sqrt{y^2 + (1+x)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{x^2} + (1+x)^2}$$ função para ser minimizada.

Podemos minimizar $f = d^2$

$$f = \frac{1+2x+x^2+x^2(1+2x+x^2)}{x^2} = \frac{1+2x+x^2+x^2+2x^3+x^4}{x^2}$$

$$f' = \frac{x^2(4x^3+6x^2+4x+2)-(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)\,2x}{x^4}$$

$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^4+6x^3+4x^2+2x-2x^4-4x^3-4x^2-4x-2=0$$

$$2x^4+2x^3-2x-2=0$$

$$x^4+x^3-x-1=0$$

$$x=1$$

$$f' = \frac{2x^4 + 2x^3 - 2x - 2}{x^3}$$

$$f' = 2x + 2 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'' = 2 + \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}$$

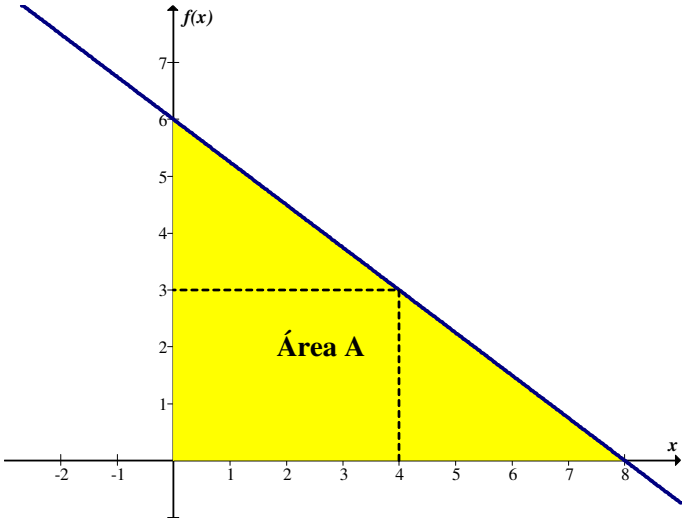
$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ é ponto de mínimo.

Portanto temos:

$d = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ m.

20. Seja s uma reta que passa pelo ponto $(4,3)$ formando um triângulo com os eixos coordenados positivos. Qual a equação de s para que a área desse triângulo seja mínima?

A Figura que segue ilustra o problema



A equação da reta é dada por:

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \mathrm{m}(x - 4)$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 3 = \mathrm{m}.0 - 4\mathrm{m} \quad \therefore \quad \mathrm{y} = -4\mathrm{m} + 3$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 = \mathrm{m}x - 4\mathrm{m} \quad \therefore \quad x = \frac{4\mathrm{m} - 3}{\mathrm{m}}$$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{4m-3}{m}.(-4\text{m}+3)\right)$ é a função para minimizar.

$$\text{A} = \frac{-(4m-3)^2}{2m}$$

$$A' = \frac{2m\,(-2)(4m-3)\;4 + (4m-3)^2\;2}{4m^2}$$

$$A' = \frac{-16m\,(4m-3) + 2\,(4m-3)^2}{4m^2}$$

$$A = 0 \quad \Rightarrow \quad -16m\,(4m-3) + 2\,(4m-3)^2 = 0$$

$$-8m\,(4m-3) + (4m-3)^2 = 0$$

$$-32m^2 + 24m + 16m^2 - 24m + 9 = 0$$

$$-16m^2 + 9 = 0$$

$$16m^2 = 9$$

$$m^2 = \frac{9}{16} \quad \therefore \quad m = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}.$$

$m = \frac{3}{4}$ não interessa.

$$A' = \frac{-8m\,(4m-3) + (4m-3)^2}{2m^2} = \frac{-16m^2 + 9}{2m^2} = -8 + \frac{9}{2m^2}$$

$$A'' = -\frac{9}{m^3}$$

$A''\big|_{-3/4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{4}$ é ponto de mínimo.

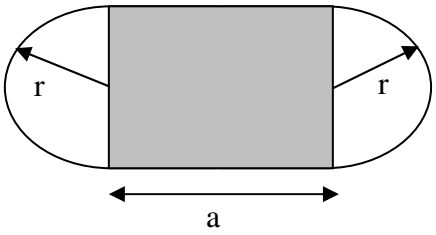
Portanto $m = -\frac{3}{4}$

A equação procurada é dada por:

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x-4)$$

$$3x + 4y - 24 = 0.$$

21 . Uma pista de atletismo com comprimento total de 400 m, consiste de 2 semicírculos e dois segmentos retos, conforme figura a seguir. Determinar as dimensões da pista, de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.



Temos:

$P = 2\pi r + 2a = 400$

$a = 200 - \pi r$

$A = a \,.\, 2r$

$A = (200 - \pi r)\, 2r$

$A = 400r - 2\pi r^2$

$A' = 400 - 4\pi r$

$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad 400 - 4\pi r = 0$

$4\pi r = 400$

$\pi r = 100$

$r = \dfrac{100}{\pi}$

$A'' = -4\pi$

$A''\Big|_{\frac{100}{\pi}} < 0 \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{100}{\pi}$ é ponto de máximo.

Portanto, $r = \dfrac{100}{\pi} m$.

$a = 200 - \pi \dfrac{100}{\pi} = 100\, m$.

22. Um cilindro circular reto está inscrito num cone circular reto de altura $H = 6\ m$ e raio da base $R = 3{,}5\ m$. Determinar a altura e o raio da base do cilindro de volume máximo.

Supondo *x* o raio da base do cilindro e *y* a sua altura, temos:

$$\frac{y}{r-x}=\frac{H}{R} \quad \therefore \quad y=\frac{H(R-x)}{R}=\frac{6\,(3{,}5-x)}{3{,}5}$$

$$V=\pi x^2 y$$

$$V=\frac{\pi R H x^2-\pi H x^3}{R}$$

$$V'=\frac{2\pi R H x-3\pi H x^2}{R}$$

$$V'=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2R}{3}=\frac{2.3{,}5}{3}=\frac{7}{3}m$$

Já foi mostrado no exercício 12 que é máximo.

$$\text{Portanto}: x=\frac{7}{3}m$$

$$y=2m$$

23. Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C=2x^3+6x^2+18x+60,$ e o valor obtido na venda é dado por $R=60x-12x^2,$ determinar o numero ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L=R-C.$

Temos:

$$L=60x-12x^2-2x^3-6x^2-18x-60$$

$$L=-2x^3-18x^2+42x-60$$

$$L'=-6x^2-36x+42$$

$$L'=0 \quad \Rightarrow \quad -6x^2-36x+42=0$$

$$x^2+6x-7=0$$

$$x_1=1 \qquad \text{e} \qquad x_2=-7$$

$$L''=-12x-36$$

$$L''(1)=-12-36<0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \text{ é ponto de máximo.}$$

Resposta: $x=1000$ unidades.

24. Um cilindro reto é inscrito numa esfera de raio R. Determinar esse cilindro, de forma que seu volume seja máximo.

Vamos considerar o cilindro com raio da base igual a *x* e altura igual a *2y*.

Vale a relação:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = R^2 - y^2$$

Temos:

$$V = \pi x^2 \,.\, 2y$$
$$V = \pi\,(R^2 - y^2)\,2y$$
$$V = 2\pi\,(R^2 y - y^3)$$
$$V' = 2\pi\,(R^2 - 3y^2)$$
$$V' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi\,(R^2 - 3y^2) = 0$$
$$R^2 - 3y^2 = 0$$
$$y^2 = \frac{R^2}{3} \quad \therefore \quad y = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$V'' = 2\pi\,(-6y)$$

$V''\Big|_{\frac{R}{\sqrt{3}}} < 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ é ponto de máximo.

Portanto: $y = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$, altura $= \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ e raio $= \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,R$.

25. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b, com um lado comum a. Se cada pasto deve medir 400m² de área, determinar as dimensões a e b, de forma que o comprimento da cerca seja mínimo?

Temos:

$$A_1 = 400m^2 \qquad a\,.\,b = 400$$
$$A_2 = 400m^2 \qquad b = \frac{400}{a}$$

$$P = 4b + 3a$$

$$P = 4\,\frac{400}{a} + 3a = \frac{1600 + 3a^2}{a}$$

$$P' = \frac{a\ 6\ a - (1600 + 3a^2)}{a^2}$$

$$= \frac{6a^2 - 1600 - 3a^2}{a^2} = \frac{3a^2 - 1600}{a^2}$$

$$P' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a^2 - 1600 = 0$$

$$3a^2 = 1600$$

$$a^2 = \frac{1600}{3} \quad \therefore \quad a = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

$$P'' = \frac{a^2\ 6a - (3a^2 - 1600)\ 2a}{a^4} = \frac{6a^2 - 6a^2 + 3200}{a^3} = \frac{3200}{a^3}$$

$P''\Big|_{\frac{40\sqrt{3}}{3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ é ponto de mínimo.

Portanto, temos:

$a = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ e $b = 10\sqrt{3}$.

26. Um fabricante, ao comprar caixas de embalagens, retangulares, exige que o comprimento de cada caixa seja 2 m e o volume 3 m³. Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação de caixas, quais devem ser suas dimensões.

Considerando-se as dimensões da caixa como 2 m. × x m. × y m temos:

$$V = 2xy = 3$$

$$y = \frac{3}{2x}$$

$$A = (4 + 2x)\,y + 4x$$

$$A = (4 + 2x).\frac{3}{2x} + 4x$$

$$A = \frac{12 + 6x + 8x^2}{2x}$$

$$A' = \frac{2x(6+16x) - (12+6x+8x^2).2}{4x^2}$$

$$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x + 32x^2 - 24 - 12x - 16x^2 = 0$$

$$16x^2 - 24 = 0$$

$$16x^2 = 24$$

$$x^2 = \frac{24}{16} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \qquad \therefore \qquad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

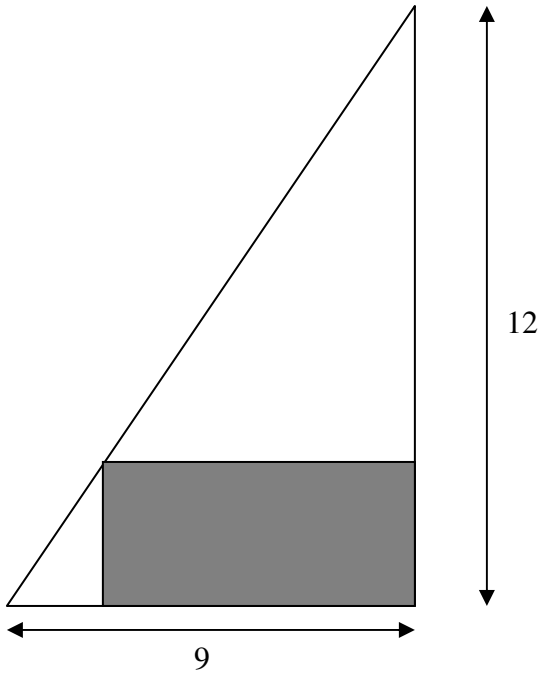
$$A' = \frac{16x^2 - 24}{4x^2} = 4 - \frac{6}{x^2}$$

$$A'' = \frac{12}{x^3}$$

$$A''\Big|_{\sqrt{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ é ponto de mínimo.}$$

$$\text{Dimensões}: 2m \times \frac{\sqrt{6}}{2} m \times \frac{\sqrt{6}}{2} m.$$

27. Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos medindo 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que sua posição é dada na figura a seguir.



Considerando-se x e y as dimensões do retângulo, temos:

$9^2 + 12^2 = 225 \quad \Rightarrow \quad$ hipotenusa do Δ é 15.

$$\frac{x}{9} = \frac{12 - y}{12} \qquad \therefore \qquad x = \frac{9(12 - y)}{12} = \frac{3(12 - y)}{4}$$

$$A = xy = \frac{3(12 - y)}{4}.y = \frac{36y - 3y^2}{4}$$

$$A' = \frac{36 - 6y}{4}$$

$$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad 36 - 6y = 0$$

$$6y = 36 \quad \therefore \quad y = 6$$

$$A'' = -\frac{6}{4}$$

$A''\big|_6 \quad < 0 \quad \therefore \quad y = 6$ é ponto de máximo.

$$x = \frac{3(12 - 6)}{4} = \frac{3.6}{4} = 4{,}5$$

Assim, temos que as dimensões do retângulo são: $4{,}5cm \times 6cm$.

5.14 – EXERCÍCIO – pg. 232

Determinar os seguintes limites com auxílio das regras de L´Hospital.

1 - $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{2x-1} = \dfrac{0}{3} = 0\,.$

2 - $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x}{2x+4} = \dfrac{-2}{-2+4} = -1\,.$

3 - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+6x}{x^3+7x^2+5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+6}{3x^2+14x+5} = \dfrac{6}{5}\,.$

4 - $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x+1}{8x-4} = \dfrac{4\frac{1}{2}+1}{8\frac{1}{2}-4} = \dfrac{2+1}{4-4} = \dfrac{3}{0} = \infty\,.$

5 - $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6-2x+3x^2-x^3}{x^4-3x^3-x+3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2+6x-3x^2}{4x^3-9x^2-1} = \dfrac{-11}{26}\,.$

6 - $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{2x^4+2x^3+3x^2+2x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{8x^3+6x^2+6x+2} = \dfrac{1}{-8+6-6+2} = -\dfrac{1}{6}\,.$

7 - $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-6x+7}{x^3+7x-1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x-6}{3x^2+7} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2}{6x} = 0\,.$

8 - $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5-5x^3}{2-2x^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-15x^2}{-6x^2} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}\,.$

9 - $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^5-6}{4x^2-2x+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{35x^4}{8x-2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{140x^3}{8} = +\infty\,.$

10 - $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5-x+x^2}{2-x-2x^2} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-1+2x}{-1-4x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}\,.$

11 - $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty\,.$

12 - $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{99}}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{99x^{98}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{k}{e^x} = 0\,.$

13 - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-\cos x}\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x+sen\,x} = \dfrac{1}{1+0} = 1\,.$

14 - $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ $\qquad 0\,.\,\infty\,?$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{-2x}{x^4}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^4}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\, e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty$$

15 - $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{(x-\pi/2)^2}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-sen\, x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{-1}{0} = \infty\,.$$

16 - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{2^x-1}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{2^x \ln 2} = 1\,.$$

17 - $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2x-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2-2x+4}{(2x-4)(x-2)}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(2x-4)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{2x^2-8x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{4x-8} = \frac{-1}{0} = \infty$$

18 - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x}{x+1}\right)$

$$= \ln \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1} = \ln 1 = 0\,.$$

19 - $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\cot g\, x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2x\cos x-\pi\cot g\, x}{\cot g\, x\, 2\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2x\cos x-\pi\dfrac{\cos x}{senx}}{2\dfrac{\cos x}{senx}\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2xsenx-\pi}{2\cos x}\right)= \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2x\cos x+2senx}{-2senx}\right)=-1.$$

20 - $\lim\limits_{x\to+\infty} tgh\, x$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\dfrac{1}{e^x}}{e^x+\dfrac{1}{e^x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}}= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}.2}{e^{2x}.2}=1$$

21 - $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{senh\, x}{sen\, x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cosh x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$$

22 - $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}= \lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3\dfrac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}}{1}= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=0$$

23 - $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sec^2 x-2tg\, x}{1+\cos\, 4x}$

$$= \lim_{x\to\pi/4} \frac{2\sec^2 x\ tg\ x - 2\sec^2 x}{-\ sen\ 4x.4}$$

$$= \lim_{x\to\pi/4} \frac{2\sec^2 x.\sec^2 x + tg^2\ x.4\sec^2 x - 4\sec^2 x\ tg\ x}{-16\cos 4x} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

24 - $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{senh\ x}{+\ sen\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

25 - $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)\cot g\ x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\dfrac{1}{\cot g\ x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{tg\ x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{\sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

26 - $\lim_{x\to 1} [\ln x \ln(x-1)]$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(\ln x)^2}{-\dfrac{1}{x}} = -\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2 x}{x-1}$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2 1 + x\ 2\ln x \dfrac{1}{x}}{1} = -\lim_{x\to 1} (\ln x)^2 + 2\ln x = 0$$

27 - $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{2\left(1 - \sqrt{x}\right)} - \dfrac{1}{3\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)} \right]$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{3-3\sqrt[3]{x}-2+2\sqrt{x}}{6\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^{1/3}+2x^{1/2}}{1-x^{1/3}-x^{1/2}+x^{5/6}}$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{-x^{-2/3}+x^{-1/2}}{-\frac{1}{3}x^{-2/3}-\frac{1}{2}x^{-1/2}-\frac{5}{6}x^{-1/6}}$$

$$\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{3}x^{-5/3}-\frac{1}{2}x^{-3/2}}{\frac{2}{9}x^{-5/3}+\frac{1}{4}x^{-3/2}-\frac{5}{36}x^{-7/6}}$$

$$= \frac{1}{12}$$

28 - $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

$$\ln \lim_{x\to 0^+} \ln x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{\frac{3}{4+\ln x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{4+\ln x}\ln x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \left[\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = e^3\right]$$

29 - $\lim_{x\to 0^+} x^{sen\, x}$

$$\ln \lim_{x\to 0^+} x^{sen\,x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{sen\,x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} sen\,x . \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{sen\,x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\cos\sec x . \cot g\, x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x \cos\sec x . \cot g\, x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-sen^2 x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\ sen\ x \cos x}{-x\ sen\ x + \cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} x^{sen\,x} = e^0 = 1$$

30 - $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

$$\ln \lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} \ln x$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

31 - $\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

$$\ln \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi x}{2} . \ln(1-x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\sec\frac{\pi x}{2}\, tg\, \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(1-x)\sec\frac{\pi x}{2}\, tg\, \frac{\pi x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(1-x)\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}} \cdot \dfrac{sen\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)\,sen\dfrac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}\,sen\dfrac{\pi x}{2}}{\dfrac{\pi}{2}(1-x)\cos\dfrac{\pi x}{2} - sen\dfrac{\pi x}{2}} = 0$$

Assim, $\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} = e^0 = 1.$

32 - $\lim_{x\to+\infty} x\,sen\,\pi/x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{sen\dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)\dfrac{-\pi}{x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \pi\cos\frac{\pi}{x} = \pi$$

33 - $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{2/3}}{(x^2+2)^{1/3}}$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = 1$$

34 - $\lim_{x\to\infty} \dfrac{senh\,x}{x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{1} = \infty$$

35 - $\lim_{x\to\infty} (2x-1)^{2/x}$

$$\ln \lim_{x\to\infty} (2x-1)^{2/x} = \lim_{x\to\infty} \ln\,(2x-1)^{2/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}\ln(2x-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(2x-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\dfrac{2}{2x-1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2x-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} (2x-1)^{\frac{2}{x}} = e^0 = 1$$

36 - $\lim_{x\to 0} (\cos\ 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

$$\ln \lim_{x\to 0} (\cos\ 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \ln(\cos\ 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} \ln(\cos\ 2x) = \lim_{x\to 0} \frac{3\,\dfrac{-sen\,2x.2}{\cos\ 2x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-6\,sen\,2x}{\cos\ 2x}\,\frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-6.2\cos 2x}{2(\cos\ 2x)+2x(-sen\,2x)2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-12\cos\ 2x}{2\cos\ 2x - 4x\ sen\,2x} = \frac{-12}{2-0} = -6$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} (\cos\ 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

37 - $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(sen\,a\,x)}{\ln(sen\ x)}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{a\cos ax}{sen\ ax}}{\dfrac{\cos x}{sen\ x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a\cos ax\ sen\ x}{sen\ ax\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{a\cos ax\cos x - a^2 sen\ x.sen\ ax}{-sen\ ax.sen\ x + a\cos x.\cos ax}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{a-0}{0+a} = 1$$

38 - $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

$$= \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{(x-3)(x+2)}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x+2-5}{(x-3)(x+2)}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{5}$$

39 - $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{tgx}}$

$$\ln \lim_{x\to 0^+} x^{-tgx} = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{-tgx} = \lim_{x\to 0^+} -tgx \ln x = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln x}{\dfrac{1}{tg\ x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln x}{\cot g\ x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\cos\sec^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\dfrac{x}{sen^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{sen^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ sen\ x \cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{tgx}} = e^0 = 1$$

40 - $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{2+\ln x}}$

$$\ln \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{2+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln\ x^{\frac{2}{2+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{2+\ln x} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{2+\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{2+\ln x}} = e^2$$

41 - $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (1 - tg\ x)\sec 2x$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-tg\ x}{\frac{1}{\sec 2x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-tg\ x}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{-2\ sen\ 2x} = \frac{-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}{-2} = \frac{4}{2}.\frac{1}{2} = 1$$

42 - $\lim_{x\to\infty} \frac{x\ \ln\ x}{x+\ln x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\frac{1}{x} + \ln\ x}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{1+\frac{1}{x}} = \infty$$

43 - $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$

$$\ln \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \ln (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\ (e^x + x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\ (e^x + x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

$$= \frac{1+1}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

5.16 – EXERCÍCIO – pg. 239

1. Determinar o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto c dado, das seguintes funções:

a) $f(x) = e^{x/2}$; $c = 0$ e 1; $n = 5$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$$
$$f''(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2.2} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8}$$
$$f^{IV}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{16}$$
$$f^{V}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{32}$$

No ponto $c = 0$:

$$P_5(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4.2!}x^2 + \frac{1}{8.3!}x^3 + \frac{1}{16.4!}x^4 + \frac{1}{32.5!}x^5$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + \frac{1}{3840}x^5$$

No ponto $c = 1$:

$$P_5(x) = e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}(x-1) + \frac{1}{4.2!}e^{\frac{1}{2}}(x-1)^2 + \frac{1}{8.3!}e^{\frac{1}{2}}(x-1)^3 + \frac{1}{16.4!}e^{\frac{1}{2}}(x-1)^4 + \frac{1}{32.5!}e^{\frac{1}{2}}(x-1)^5$$
$$= e^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{48}(x-1)^3 + \frac{1}{384}(x-1)^4 + \frac{1}{3840}(x-1)^5\right)$$

b) $f(x) = e^{-x}$; $c = -1$ e 2; $n = 4$

$$f'(x) = -e^{-x}$$
$$f''(x) = e^{-x}$$
$$f'''(x) = -e^{-x}$$
$$f^{IV}(x) = e^{-x}$$
$$f^{V}(x) = -e^{-x}$$

Para $c = -1$:

$$P_4(x) = e + (-e^1)\,(x+1) + \frac{e^1}{2!}(x+1)^2 - \frac{e^1}{3!}(x+1)^3 + \frac{e^1}{4!}(x+1)^4$$

$$= e - e\,(x+1) + \frac{e}{2}(x+1)^2 - \frac{e}{6}(x+1)^3 + \frac{e}{24}(x+1)^4$$

$$= e\left(1 - (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+1)^3}{6} + \frac{(x+1)^4}{24}\right)$$

Para $c = 2$:

$$P_4(x) = e^{-2} - e^{-2}(x-2) + \frac{e^{-2}}{2!}(x-2)^2 - \frac{e^{-2}}{3!}(x-2)^3 + \frac{e^{-2}}{4!}(x-2)^4$$

$$= e^{-2}\left(1 - (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{(x-2)^3}{3!} + \frac{(x-2)^4}{4!}\right)$$

c) $f(x) = \ln(1-x);\ c = 0 \text{ e } 1/2;\ n = 4$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x).0 + (-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2(1-x).(-1)}{(1-x)^4} = \frac{-2}{(1-x)^3}$$

$$f^{IV}(x) = \frac{2.3(1-x)^2.(-1)}{(1-x)^6} = \frac{-6}{(1-x)^4}$$

$$f^{V}(x) = \frac{6.4(1-x)^3.(-1)}{(1-x)^8} = \frac{-24}{(1-x)^5}$$

Para $c = 0$:

$$P_4(x) = 0 + \frac{-1}{1}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$

Para $c = 1/2$:

$$P_4(x) = -\ln 2 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{16}{3!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{96}{4!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$$

d) $f(x) = sen\ x;\ c = \pi/2;\ n = 8$

$$f'(x) = \cos x = f^{V}$$
$$f''(x) = -sen\, x = f^{VI}$$
$$f'''(x) = -\cos x = f^{VII}$$
$$f^{IV}(x) = sen\, x = f^{VIII}$$

$$P_8(x) = 1 + \frac{(-1)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \frac{1}{8!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^8$$

e) $f(x) = \cos 2x;\ c = 0 \text{ e } \pi/2;\ n = 6$

$$f^{I}(x) = -2sen\, 2x$$
$$f^{II}(x) = -4\cos 2x$$
$$f^{III}(x) = 8sen\, 2x$$
$$f^{IV}(x) = 16\cos 2x$$
$$f^{V}(x) = -32sen\, 2x$$
$$f^{VI}(x) = -64\cos 2x$$

Para $c = 0$:

$$P_6(x) = 1 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 - \frac{64}{6!}x^6$$
$$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6$$

Para $c = \frac{\pi}{2}$:

$$P_6(x) = -1 + \frac{4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{16}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{64}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6$$
$$= -1 + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{4}{45}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6$$

f) $f(x) = \frac{1}{1+x};\ c = 0 \text{ e } 1;\ n = 4$

$$f^{I}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f^{II}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{III}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$f^{IV}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$$

Para $c=0$:

$$\begin{aligned}P_4(x)&=1-x+\frac{2}{2!}x^2-\frac{6}{3!}x^3+\frac{24}{4!}x^4\\&=1-x+x^2-x^3+x^4\end{aligned}$$

Para $c=1$:

$$\begin{aligned}P_4(x)&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{4.2!}(x-1)^2-\frac{3}{8.3!}(x-1)^3+\frac{3}{4.4!}(x-1)^4\\&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^2-\frac{1}{16}(x-1)^3+\frac{1}{32}(x-1)^4\end{aligned}$$

2. Encontrar o polinômio de Taylor de grau n no ponto c e escrever a função que define o resto na forma de Lagrange, das seguintes funções:

a) $y=\cosh x,\ n=4,\ c=0$

$$y=\cosh x=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=1$$

$$y^{I}=senhx=\frac{e^0-e^{-0}}{2}=0$$

$$y^{II}=\cosh x=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=1$$

$$y^{III}=senhx=\frac{e^0-e^{-0}}{2}=0$$

$$y^{IV}=\cosh x=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=1$$

$$P_4(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$P_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$R_4(x) = \frac{f^{v}(z)}{5!}(x-0)^5$$

$$R_4(x) = \frac{senhz}{5!}x^5 \quad \text{onde} \quad z \text{ é um n° entre 0 e } x.$$

b) $y = tgx,\ n = 3,\ c = \pi$

$$y = tgx \Rightarrow y(\pi) = 0$$
$$y^{I} = \sec^2 x \Rightarrow y'(\pi) = 1$$
$$y^{II} = 2\sec^2 x.tgx \Rightarrow y''(\pi) = 0$$
$$y^{III} = 2\sec^2 x.\sec^2 x + tgx.4\sec^2 x.tgx \Rightarrow y'''(\pi) = 2$$
$$y^{IV} = 8\sec^3 x.\sec x.tgx + 4\sec^2 x.\sec^2 x.(-2tgx) + tg^2 x.8\sec^2 x.tgx$$

$$P_3(x) = 1(x-\pi) + \frac{2(x-\pi)^3}{3!}$$
$$= x - \pi + \frac{(x-\pi)^3}{3}$$
$$R_3(x) = \frac{16\sec^4 z.tgz + 8\sec^2 z.tg^3 z}{4!}(x-\pi)^4$$

c) $y = \sqrt{x};\ n = 3;\ c = 1$

$$y = x^{1/2} \Rightarrow y(1) = 1$$
$$y^{I} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow y^{I}(1) = \frac{1}{2}$$
$$y^{II} = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow y^{II}(1) = -\frac{1}{4}$$
$$y^{III} = \frac{3}{8}x^{-5/2} \Rightarrow y^{III}(1) = \frac{3}{8}$$
$$y^{IV} = -\frac{15}{16}x^{-7/2}$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}(x-1)^3$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$
$$R_3(x) = \frac{-15}{16z^3\sqrt{z}}\cdot\frac{1}{24}(x-1)^4$$

d) $y = e^{-x^2}$; n = 4; c = 0.

$$y = e^{-x^2}$$
$$y^I = -e^{-x^2}\ 2x$$
$$y^{II} = -e^{-x^2}\ 2 + 2x.-e^{-x^2}\ (-2x)$$
$$= -2e^{-x^2} + 4x^2\ e^{-x^2}$$
$$y^{III} = -2e^{-x^2}(-2x) + 4x^2e^{-x^2}(-2x) + e^{-x^2}\ .8x$$
$$y^{IV} = -48x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2} + 12e^{-x^2}$$
$$y^V = 160x^3e^{-x^2} - 120xe^{-x^2} - 32x^5e^{-x^2}$$

$$y(0) = 1$$
$$y^I(0) = 0$$
$$y^{II}(0) = -2$$
$$y^{III}(0) = 0$$
$$y^{IV}(0) = 12$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4$$
$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$
$$R_4(x) = \frac{e^{-z^2}}{5!}\left(160z^3 - 120z - 32z^5\right)x^5$$

3. Usando o resultado encontrado no exercício 1, item (c), com $c = 0$, determinar um valor aproximado para $\ln 0{,}5$. Fazer uma estimativa para o erro.

$$\ln 0{,}5 = P_4(0{,}5) + R_4(0{,}5)$$

$$P_4(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

$$R_4(x) = \frac{-24}{(1-z)^5} \cdot \frac{1}{5!}x^5$$

$$= \frac{-x^5}{5(1-z)^5}$$

$$\Rightarrow \ln 0{,}5 = -0{,}5 - \frac{1}{2}(0{,}5)^2 - \frac{1}{3}(0{,}5)^3 - \frac{1}{4}(0{,}5)^4 + \frac{-(0{,}5)^5}{5(1-z)^5}$$ onde z é um número entre 0 e 0,5.

$$\ln 0{,}5 = -0{,}5 - 0{,}125 - 0{,}041666 - 0{,}015625$$

$$= -0{,}682292$$

$$0 < z < 0{,}5$$

$$-0{,}5 < -z < 0$$

$$0{,}5 < 1 - z < 1$$

$$\frac{1}{0{,}5} > \frac{1}{1-z} > 1$$

$$\frac{1}{0{,}5^5} > \frac{1}{(1-z)^5} > 1$$

$$\left|R_4(0{,}5)\right| = \left|\frac{-0{,}00625}{(1-z)^5}\right| < \frac{0{,}00625}{0{,}5^5} = 0{,}2$$

4. Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = 1 + \cos x$ no ponto $c = \pi$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $\cos 5\pi/6$. Fazer uma estimativa para o erro.

$$f(x) = 1 + \cos x \Rightarrow f(\pi) = 0$$
$$f^{I}(x) = 0 - senx \Rightarrow f'(\pi) = 0$$
$$f^{II}(x) = -\cos x \Rightarrow f''(\pi) = 1$$
$$f^{III}(x) = senx \Rightarrow f'''(\pi) = 0$$
$$f^{IV}(x) = \cos x \Rightarrow f'^{v}(\pi) = -1$$
$$f^{v}(x) = -senx \Rightarrow f^{v}(\pi) = 0$$
$$f^{VI}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{VI}(\pi) = 1$$
$$f^{VII}(x) = senx$$

$$P_6(x) = \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4 + \frac{1}{6!}(x-\pi)^6$$
$$= \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + \frac{1}{720}(x-\pi)^6$$

$$\cos x = f(x) - 1$$
$$\cos x \cong -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + \frac{1}{720}(x-\pi)^6$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cong -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)^2 - \frac{1}{24}\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)^6$$
$$= -1 + 0{,}13707 - 0{,}0031317 + 0{,}000028619$$
$$= -0{,}8660331$$

$$R_6(x) = \frac{senz}{7!}(x-\pi)^7$$
$$R_6\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{senz}{7!}\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)^7$$
$$|senz| \le 1$$
$$\left|R_6\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right| \le \frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)^7}{7!} \cong 0{,}0000213$$

5. Demonstrar que a diferença entre sen($a + h$) e $sen\, a + h \cos a$ é menor ou igual a $\frac{1}{2}h^{2.}$.

$$y = senx$$
$$y' = \cos x$$
$$y'' = -senx$$

$$senx = sena + \cos a(x-a) + R_1(x)$$
$$sen(a+h) = sena + \cos a(a+h-a) + R_1(a+h)$$
$$sen(a+h) = sena + h\cos a + R_1(a+h)$$

$$R_1(a+h) = \frac{-senz}{2}h^2$$
$$\left|R_1(a+h)\right| = \left|\frac{-senz}{2}h^2\right|$$
$$= \frac{h^2}{2}\left|-senz\right|$$
$$= \frac{h^2}{2}\left|senz\right|$$
$$\leq \frac{h^2}{2}$$

6. Um fio delgado, pela ação da gravidade, assume a forma da catenária $y = a\cosh\frac{x}{a}$. Demonstrar que, para valores pequenos de $|x|$, a forma que o fio toma pode ser representada, aproximadamente, pela parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \Rightarrow y(0) = a$$
$$y' = \frac{a}{a}senh\frac{x}{a} = senh\frac{x}{a} \Rightarrow y'(0) = 0$$
$$y'' = \frac{1}{a}\cos h\frac{x}{a} \Rightarrow y''(0) = \frac{1}{a}$$

$$P_2(x) = a + \frac{1}{a}.\frac{1}{2!}x^2$$
$$= a + \frac{x^2}{2a}$$

7. Pesquisar máximos e mínimos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 2$ $\quad \nexists$ pontos críticos
$\nexists$ máximos nem mínimos.

b) $f(x) = 4 - 5x + 6x^2$

$f'(x) = -5 + 12x$

$-5 + 12x = 0$

$12x = 5$

$x = \frac{5}{12}$

$f''(x) = 12$

$f''\big|_{5/12} > 0 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$ é ponto de mínimo

c) $f(x) = (x-4)^{10}$

$f'(x) = 10(x-4)^9$

$10(x-4)^9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

$f^{II}(x) = 90(x-4)^8$

$f^{III}(x) = 720(x-4)^7$

$f^{IV}(x) = 5040(x-4)^6$

$f^{V} = f^{VI} = f^{VII} = f^{VIII} = f^{9} = 0$

$f^{10} = K > 0 \quad \Rightarrow x = 4$ é ponto de mínimo.

d) $f(x) = 4(x+2)^7$

$f^{I}(x) = 28(x+2)^6$

$f^{II}(x) = k(x+2)^5$

$f^{III}(x) = k_1(x+2)^4$

$f^{IV}(x) = k_2(x+2)^3$

$f^{V}(x) = k_3(x+2)^2$

$f^{VI}(x) = k_4(x+2)$

$f^{VII}(x) = k_5$

$\Rightarrow \quad x = -2$ é ponto de inflexão.

e) $f(x) = x^6 - 2x^4$

$f(x) = x^6 - 2x^4$

$f'(x) = 6x^5 - 8x^3$

$6x^5 - 8x^3 = 0$

$x^3(6x^2 - 8) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad x_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$f^{II}(x) = 30x^4 - 24x^2$

$f^{III}(x) = 120x^3 - 48x$

$f^{IV}(x) = 360x^2 - 48$

$f^{IV}\Big|_0 < 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$ é ponto de máximo

$f^{II}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}} > 0 \quad \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ é ponto de mínimo.

$f^{II}\Big|_{\frac{-2}{\sqrt{3}}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ é ponto de mínimo.

f) $f(x) = x^5 - \frac{125}{3}x^3$

$f'(x) = 5x^4 - \frac{125}{3}3x^2$

$5x^4 - 125x^2 = 0$

$x^2(5x^2 - 125) = 0$

$5x^2 - 125 = 0$

$5x^2 = 125$

$x^2 = \frac{125}{5}$

$x^2 = 25$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = -5$

$f'' = 20x^3 - 250x$

$f''\big|_5 > 0 \quad \Rightarrow x = 5$ é ponto de mínimo.

$f''\big|_{-5} = -2500 + 1250 \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5$ é ponto de máximo.

$f''' = 60x^2 - 250$

$f'''\big|_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ é ponto de inflexão.

5.3 – EXERCÍCIO – pg. 191

1. Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas

$$W(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t+4)^2 , 0 \le t \le 60 \\ 24,4t + 604 \quad , 60 \le t \le 90, \end{cases}$$

onde t é medido em dias.

(a) Qual a razão de aumento do peso da ave quando $t = 50$?

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=50} = \left.\frac{1}{2} . 2(t+4)\right|_{t=50}$$
$$= 50 + 4 = 54 \text{ gramas/dia}$$

(b) Quanto a ave aumentará no 5lº dia?

$$w(51) - w(50)$$
$$= 20 + \frac{1}{2}(51+4)^2 - 20 - \frac{1}{2}(50+4)^2$$
$$= 54,5 \text{ gramas}$$

(c) Qual a razão de aumento do peso quando $t = 80$?

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=80} = 24,4 \text{ gramas/dia}$$

2. Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, 0 \le t \le 5.$$

Qual a velocidade de redução de sua temperatura após 2 horas?

$$\frac{dT}{dt} = -5 + \frac{-4}{(t+1)^2}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=2h} = -5 + \frac{-4}{(2+1)^2} = -5 - \frac{4}{9}$$
$$= -5,444... \ ^oC/h$$

3. A temperatura de um gás é mantida constante e sua pressão p em kgf/cm³ e volume v em cm³ estão relacionadas pela igualdade $vp = c$, onde c é constante. Achar a razão de variação do volume em relação à pressão quando esta vale 10 kgf/cm³.

$$vp = c \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{p}$$

$$\frac{dv}{dp} = \frac{-c}{p^2}$$

$$\left.\frac{dv}{dp}\right|_{p=10} = \frac{-c}{10^2} = \frac{-c}{100}\ cm^3/kgf/cm^3$$

4. Uma piscina está sendo drenada para limpeza. Se o seu volume de água inicial era de 90.000 litros e depois de um tempo de t horas este volume diminuiu $2500\,t^2$ litros, determinar:

(a) tempo necessário para o esvaziamento da piscina;

Seja $v(t)$ o volume de água no instante *t.*

$$v(t) = 90000 - 2500t^2$$
$$v(t) = 0$$

$$2500\,t^2 = 90000$$

$$t^2 = \frac{90000}{2500} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{900}{25}} = \frac{30}{5} = 6\ horas$$

(b) taxa média de escoamento no intervalo [2,5];

$$f(t) = 2500t^2$$

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(1)}{3}$$

$$= \frac{2500 \,.\, 5^2 - 2500 \,.\, 2^2}{3}$$

$$= \frac{62500 - 10000}{3}$$

$$= \frac{52500}{3} = 1750\ l/hora$$

(c) taxa de escoamento depois de 2 horas do início do processo.

$$\frac{df}{dt} = 2500.2t = 5000t$$

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=2h} = 10000\ l/horas$$

5. Um apartamento está alugado por R$ 4.500,00. Este aluguel sofrerá um reajuste anual de R$ 1.550,00.

(a) Expresse a função com a qual podemos calcular a taxa de variação do aluguel, em t anos.

$f(t) = 4500{,}00 + 1.550{,}00t$.

(b) Calcule a taxa de variação do aluguel após 4 anos.

$f'(t)\big|_{t=4} = 1.550{,}00$.

(c) Qual a porcentagem de variação do aluguel depois de 1 ano do primeiro reajuste?

$f(t) \to 100$

$f'(t) \to x$

$$x = \frac{100.f'(t)}{f(t)}$$

$$x = \frac{100\,.1550{,}00}{4500{,}00 + 1550{,}00} = \frac{155000{,}00}{6050{,}00}$$

$$x = 25{,}6\%$$

(d) Que acontecerá à porcentagem de variação depois de alguns anos?

Tenderá para zero, pois:

$$\lim_{t\to\infty} = \frac{100.f'(t)}{f(t)} = 0\,.$$

6. Numa pequena comunidade obteve-se uma estimativa que daqui a t anos a população será de $p(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$ milhares .

(a) Daqui a 18 meses, qual será a taxa de variação da população desta comunidade?

$$p(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$$

$$p'(t) = \frac{+5}{(t+1)^2}$$

$$p'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{+5}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2} = \frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= 5 \,.\, \frac{4}{25} = 0{,}8 \text{ milhares de pessoas/ano}$$

(b) Qual será a variação real sofrida durante o 18º mês?

$$p\left(\frac{18}{12}\right) - p\left(\frac{17}{12}\right)$$

$$= \left(20 - \frac{5}{\frac{3}{2}+1}\right) - \left(20 - \frac{5}{\frac{17}{12}+1}\right)$$

$$= \frac{-58+60}{29} = \frac{2}{29}$$

$$= 0{,}068965 \text{ milhares de pessoas}$$

7. Seja r a raiz cúbica de um número real x. Encontre a taxa de variação de r em relação a x quando x for igual a 8.

$$r = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\left.\frac{dr}{dx}\right|_{x=8} = \frac{1}{3}\, 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{(2^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

8. Um líquido goteja em um recipiente. Após t horas, há $5t - t^{1/2}$ litros no recipiente. Qual a taxa de gotejamento de líquido no recipiente, em 1/hora, quando $t = 16$ horas?

$$f(t) = 5t - t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{df}{dt} = 5 - \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=4} = 5 - \frac{1}{2} \ \frac{1}{\sqrt{16}} = 5 - \frac{1}{2} \ \frac{1}{4} = 5 - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{40-1}{8} = \frac{39}{8} = 4{,}875 \text{ l/hora}$$

9. Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de 5 m de raio de base e 10 m de altura. No tempo $t = 0$, a água começa a fluir no tanque à razão de 25 m^3 / h. Com que velocidade o nível de água sobe? Quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?

Sejam:

$v = v(t)$ o volume de água no tanque;

$h = h(t)$ a altura da água no instante *t;*

r o raio da base.

Temos:

$$\frac{dv}{dt} = 25 \ m^3 / h$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{v}{\pi r^2}$$

$$h = \frac{v}{\pi .25}$$

$$\frac{dh}{dv} = \frac{1}{\pi .25}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dv} . \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi .25} .25$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{ m/horas}$$

O nível da água sobe com uma velocidade de $\frac{1}{\pi}$ m/hora .

O volume do tanque é: $\pi r^2 h = \pi.5^2.10 = 250\pi$.

$25m^3 \leftrightarrow 1\,\text{hora}$

$250\text{m}^3 \leftrightarrow x\,\text{horas}$

Portanto, $x = 10\pi$ horas.

10. Achar a razão de variação do volume v de um cubo em relação ao comprimento de sua diagonal. Se a diagonal está se expandindo a uma taxa de 2 m/s, qual a razão de variação do volume quando a diagonal mede 3 m?

Sejam *D* a diagonal do cubo e *x* o seu lado. Da geometria elementar obtemos $D = \sqrt{3}x$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{3}} D$. Temos

$$v = x^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 D^3$$

$$\frac{dv}{dD} = \frac{3}{3\sqrt{3}}.D^2 = \frac{D^2}{\sqrt{3}} m^3 / m = m^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dD}.\frac{dD}{dt} = \frac{D^2}{\sqrt{3}}.2 = \frac{2\,D^2}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{D=3} = \frac{2.3^2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\ m^3 / seg$$

11. Uma usina de britagem produz pó de pedra, que, ao ser depositado no solo, forma uma pilha cônica onde a altura é aproximadamente igual a 4/3 do raio da base.

(a) Determinar a razão de variação do volume em relação ao raio da base.

$$h = \frac{4}{3}r \ ; \ v = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{4}{9}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{4}{9}\pi.3r^2$$

$$= \frac{4\pi r^2}{3}$$

(b) Se o raio da base varia a uma taxa de 20 cm/s, qual a razão de variação do volume quando o raio mede 2 m?

$$\frac{dr}{dt} = 20\ m/s$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi r^2}{3} . 20$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{r=2} = \frac{4\pi . 200^2}{3} . 20 = \frac{80 . 40000}{3} . \pi = 1066666{,}6\ \pi\ cm^3/s$$

$$= 1{,}066\pi\ cm^3/s$$

12. Os lados de um triângulo eqüilátero crescem à taxa de 2,5 cm/s.

(a) Qual é a taxa de crescimento da área desse triângulo, quando os lados tiverem 12 cm de comprimento?

Sejam A a área e l o lado do triângulo.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} \qquad \text{como } A = \frac{\sqrt{3}\ l^2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} . 2l . \frac{dl}{dt}$$

$$= \frac{l\sqrt{3}}{2} . 2{,}5$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{l=12} = \frac{12\sqrt{3} . 2{,}5}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{2}\ cm^2/seg$$

$$= 15\sqrt{3}\ cm^2/seg$$

(b) Qual é a taxa de crescimento do perímetro, quando os lados medirem 10 cm de comprimento?

Seja P o perímetro do triângulo.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dl} \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dP}{dl} = 3 . 2{,}5 \qquad P = 3l$$

$$= 7{,}5\ cm/seg$$

13. Um objeto se move sobre a parábola $y = 2x^2 + 3x - 1$ de tal modo que sua abscissa varia à taxa de 6 unidades por minuto. Qual é a taxa de variação de sua ordenada quando o objeto estiver no ponto $(0, -1)$?

$y = 2x^2 + 3x - 1$ $\qquad\qquad$ $\frac{dx}{dt} = 6\ u/\min$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$= (4x + 3) \,.\, 6$$
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=0} = (4.0 + 3) \,.\, 6 = 18\ un/\min$$

14. Um trem deixa uma estação, num certo instante, e vai para a direção norte à razão de 80 km/h. Um segundo trem deixa a mesma estação 2 horas depois e vai na direção leste à razão de 95 km/h. Achar a taxa na qual estão se separando os dois trens 2 horas e 30 minutos depois do segundo trem deixar a estação.

O instante $t = 0$ corresponde à saída do segundo trem. Posicionando o primeiro trem sobre o eixo positivo dos *y* e o segundo sobre o eixo positivo dos *x*, num instante qualquer *t*, suas posições são dadas por:

$$y = 160 + 80t$$
$$x = 95t$$

A taxa na qual os dois trens estão se separando coincide com a taxa de crescimento da diagonal do triângulo xoy. Temos,

$$D^2 = x^2 + y$$
$$2D\,\frac{dD}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}$$
$$431{,}28441\,\frac{dD}{dt} = 237{,}5 \,.\, 95 + 360 \,.\, 80$$
$$\frac{dD}{dt} = \frac{22562{,}5 + 28800}{431{,}28441}$$
$$= \frac{51362{,}5}{431{,}28441}$$
$$= 119{,}09\ km/hora$$

15. Uma lâmpada colocada em um poste está a 4 m de altura. Se uma criança de 90 cm de altura caminha afastando-se da lâmpada à razão de 5 m/s, com que rapidez se alonga sua sombra?

Sejam:

y a distância da criança até o poste;

x a sombra da criança.

Temos:

Altura do poste = 4m;

Altura da criança=0,9m;

$\frac{dy}{dt} = 5\ m/seg$.

Usando semelhança de triângulos, vem:

$$\frac{x}{y+x} = 4$$

$$x = \frac{0{,}225}{0{,}775}\, y$$

Portanto,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{0{,}225}{0{,}775}.5 \cong 1{,}45 m/seg\ .$$

16. O raio de um cone é sempre igual à metade de sua altura h . Determinar a taxa de variação da área da base em relação ao volume do cone.

Sejam:

A = área da base;

V = volume do cone;

h = altura do cone.

Temos:

$$\frac{dA}{dV} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dV}$$

$$A = \pi r^2$$

$$V = \frac{\pi r^2\ .\ h}{3} = \frac{\pi r^2\ .\ 2r}{3}$$

$$V = \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$r = \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

$$\frac{dr}{dV} = \frac{1}{3}\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-2/3} \cdot \frac{3}{2\pi}$$

$$\frac{dA}{dV} = \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dA}{dV} = \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dA}{dV} = \left(\frac{2\pi}{3V}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{3V}} \text{ unid.área/unid.vol.}$$

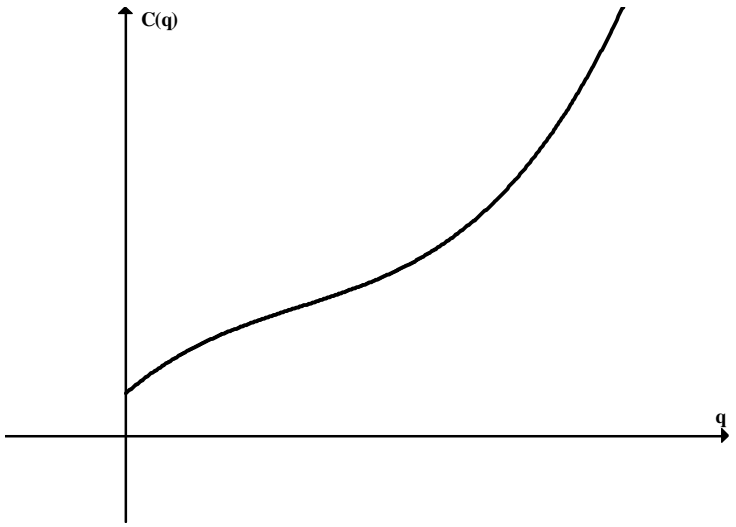
17. Supor que o custo total de produção de uma quantidade de um certo produto é dado pelo gráfico da figura que segue.

(a) Dar o significado de $C(0)$.

$C(0)$ corresponde a parcela de custo fixos.

(b) Descrever o comportamento do custo marginal.

O custo marginal vai diminuindo inicialmente e depois passa a aumentar.



18. O custo total $C(q)$ da produção de q unidades de um produto é dado por.

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 5q^2 + 10q + 120$$

(a) Qual é o custo fixo?

O custo fixo é 120.

(b) Qual é o custo marginal quando o nível de produção é $q = 20$ unidades.

$$C'(q) = \frac{3}{2}q^2 - 10q + 10$$

$$C'(20) = \frac{3}{2}(20)^2 - 10 \,.\, 20 + 10 = 410$$

(c) Determinar se existem, os valores de q tais que o custo marginal é nulo.

$$\frac{3}{2}q^2 - 10q + 10 = 0$$

$$3q^2 - 20q + 20 = 0$$

$$q = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \,.\, 3 \,.\, 20}}{2 \,.\, 3} = \frac{20 \pm 12{,}65}{6}$$

$$q_1 = 5{,}44 \qquad\qquad q_2 = 1{,}2$$

19. A função $q = 20000 - 400p$ representa a demanda de um produto em relação a seu preço p. Calcular e interpretar o valor da elasticidade da demanda ao nível de preço $p = 4$.

$$E(q,\ p) = \frac{dq}{dp} \,.\, \frac{p}{q}$$

$$= -400 \,.\, \frac{p}{q}$$

$$p = 4 \quad \Rightarrow \quad q = 20\,000 - 400 \,.\, 4$$

$$= 20\,000 - 1600$$

$$= 18\,400$$

$$E = -400 \,.\, \frac{4}{18\,400}$$

$$E \cong -0{,}087$$

Interpretação: A elasticidade é negativa e muito baixa. Isso significa que um pequeno aumento percentual no preço diminuirá muito pouco a demanda.

20. A função $q = 15 + 60y - 0{,}06y^2$ mede a demanda de um bem em função da renda média per capita denotada por y (unidade monetária), quando os outros fatores que influenciam a demanda são considerados constantes.

(a) Determinar a elasticidade da demanda em relação à renda y.

$$E(q, y) = \frac{dq}{dy} . \frac{y}{q}$$

$$= (60 - 0{,}12y) \frac{y}{15 + 60y - 0{,}06y^2}$$

(b)Dar o valor da elasticidade da demanda, para um nível de renda $y = 300$. Interpretar o resultado.

$$E = (60 - 0{,}12 . 300) \frac{300}{15 + 60 . 300 - 0{,}06 . 300^2}$$

$$= (60 - 36) \frac{300}{15 + 18\,000 - 5\,400}$$

$$= \frac{24 . 300}{12\,615}$$

$$= 0{,}57$$

E é positiva e igual a $0{,}57$. Isso significa que o aumento da renda per capita aumentará a demanda.
1% de aumento na renda implicará em $0{,}57\%$ de aumento na demanda.